Matrizenrechnung

31. Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Zusammenhang: lineare Abbildungen und Matrizen **3**

1.1 Um was es geht - die Idee . . . 3
1.2 Isomorphismus . . . 3
1.2.1 Definition Isomorphismus . . . 3
1.2.2 Satz über Isomorphismus . . . 3
1.3 Partielle Funktionen total machen . . . 3
1.3.1 Einschränken auf den Definitionsbereich . . . 3
1.3.2 Erweitern der Zielmenge . . . 3
1.3.3 Einführen eines Sonderzeichens # . . . 4
1.4 Strukturelle Rekursionssatz für eine freie Termalgebra . . . 4
1.4.1 Beispiel Zahlenterme . . . 4
1.4.2 Beispiel mit linearen Abbildungen . . . 4
1.4.3 S-Struktur lineare Abbildungen . . . 4
1.4.4 S-Struktur Matrizen . . . 7
1.4.4.1 Bijektion von Trägermenge A von Struktur $\mathfrak{A}$ auf Matrizen definieren . . . 7
1.4.4.2 Isomorphismus basteln . . . 8
1.5 Behauptung . . . 9
1.6 Satz über lineare Abbildungen . . . 9
1.7 Satz über Matrizen . . . 9
1.8 Substitutionslemma . . . 9
1.9 Satz Übertragbarkeit auf Terme . . . 10

1 Zusammenhang: lineare Abbildungen und Matrizen

1.1 Um was es geht - die Idee

Kann man Behauptungen über lineare Abbildungen sofort auf entsprechende Behauptungen über Matrizen übertragen. Wenn das geht, muss man nicht Sätze aus der Matrizenrechnung mit Matrizen beweisen, sondern kann sich auf entsprechende Sätze aus der linearen Abbildungen berufen.

1.2 Isomorphismus

1.2.1 Definition Isomorphismus

$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{b})$ seien S-Strukturen.
1) Eine Abbildung $\pi : A \to B$ heißt ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ (kurz $\pi : A \cong B$) gdw
   a) π ist eine Bijektion von A auf B
   b) Für jedes n-stelliges $R \in S$ und $a_1, ..., a_n \in A$ mit: $R^{\mathfrak{A}} :\iff \mathfrak{a}(R)$
   $R^{\mathfrak{A}} a_1 ... a_n$ gdw $R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) ... \pi(a_n)$.
   c) Für für jedes n-stellige $f \in S$ und $a_1, ..., a_n \in A$ mit: $f^{\mathfrak{A}} := \mathfrak{a}(f)$
   $\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1 ... a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1) ... \pi(a_n))$.
   d) Für jedes $c \in S$ mit: $c^{\mathfrak{A}} := \mathfrak{a}(c)$ ist
   $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

2) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen isomorph (kurz A $\cong B$) gdw es einen Isomorphismus $\pi : A \cong B$ gibt.

1.2.2 Satz über Isomorphismus

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien isomorphe S-Strukturen.
Dann gilt für alle S-Sätze ϕ:
$\mathfrak{A} \models \phi$ gdw $\mathfrak{B} \models \phi$

1.3 Partielle Funktionen total machen

Bei der Definition von Strukturen wird verlangt, dass Funktionssymbole durch totale Funktionen interpretiert werden müssen. Das geht aber nicht immer so einfach, wie man z.B. bei der Division siehe, wo die Division durch 0 nicht definiert ist.

$f : X \rightharpoonup Y$ mit $Def(X) \subset X$
sei eine partielle Funktion, wobei der Definitionsbereich von f Teilmenge von X ist.
Hier 3 Vorschläge, wie man eine partielle Funktion total machen kann:

1.3.1 Einschränken auf den Definitionsbereich

$\overline{f} : X|_{Def(f)} : Def(f) \to Y$

1.3.2 Erweitern der Zielmenge

Wähle $z \in Y \neq \emptyset$
$\overline{f} : \{W, F\} \times X \to \{W, F\} \times Y$ mit:
$$\overline{f}(w, x) := \begin{cases} (W, f(x)), & w = W \wedge x \in Def(f) \\ (F, z), & sonst \end{cases}$$
mit $w \in \{W, F\}$

1.3.3 Einführen eines Sonderzeichens

Es sei $\# \notin Y$
$\overline{f} : X \to Y \cup \{\#\}$ mit:
$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in Def(f) \\ \#, & sonst \end{cases}$$

1.4 Strukturelle Rekursionssatz für eine freie Termalgebra

Voraussetzungen:
Σ ist eine Signatur (sie ordnet jedem Element aus des Symbolmenge eine Stelligkeit zu),
$V \subset T$ ist eine Variablenmenge,
T ist die freie Termalgebra über der Signatur mit Variablenmenge V,
Z eine Menge (z.B. von reellen Zahlen),
$F_0 : V \to Z$
für jedes Konstantensymbol $c \in \Sigma$ ein Element $b_c \in Z$,
für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in \Sigma$ eine Funktion $g_f : Z^n \to Z$

Behauptung:
Es gibt genau eine Funktion $F : T \to Z$ (d.h. F ist eine Fortsetzung von F_0 auf T) mit:
$$F(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in V \\ b_c, & x = c, \text{ c ist Konstantensymbol .} \\ g_f(F(t_1), ..., F(t_n)) & x = f(t_1, ..., t_n) \end{cases}$$

1.4.1 Beispiel Zahlenterme

$V = \{x_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $F_0(x_r) = (W, r)$
Symbolmenge $S = \{+, -, *, /\}$
Termalgebra = Menge der S-Terme.
$Z = \{W, F\} \times \mathbb{R}$
$g_+ \colon Z \times Z \to Z$ mit
$$g_+((w_1, x), (w_2, y)) = \begin{cases} (W, add(x, y)) & w_1 = w_2 = W \\ (F, 0) & sonst \end{cases}$$
$g_- \colon Z \times Z \to Z$ mit
$$g_-((w_1, x), (w_2, y)) = \begin{cases} (W, sub(x, y)) & w_1 = w_2 = W \\ (F, 0) & sonst \end{cases}$$
$g_* \colon Z \times Z \to Z$ mit
$$g_*((w_1, x), (w_2, y)) = \begin{cases} (W, mul(x, y)) & w_1 = w_2 = W \\ (F, 0) & sonst \end{cases}$$
$g_/ \colon Z \times Z \to Z$ mit
$$g_/((w_1, x), (w_2, y)) = \begin{cases} (W, div(x, y)) & w_1 = w_2 = W \text{ und } y \neq 0 \\ (F, 0) & sonst \end{cases}$$
Dabei bezeichnen add, sub, mul, div die üblichen reellen Rechenoperationen.

1.4.2 Beispiel mit linearen Abbildungen

siehe unten

1.4.3 S-Struktur lineare Abbildungen

Struktur $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$
1) Die Trägermenge A wird definiert:
$A = Lin(\mathbb{K}) \sqcup Vec(\mathbb{K}) \sqcup \mathbb{K} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \{\#\}$ mit:
$\mathbb{K}$ istein Körper
$\mathbb{K}$ = Menge der Skalare

$Lin(\mathbb{K}, n, m) = \{l \mid l : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \text{ ist eine lineare Abbildung}\}$
$Lin(\mathbb{K})$ = Menge aller linearen Abbildungen = $\bigcup_{n,m\geq 1} Lin(\mathbb{K}, n, m)$
$Lin^{\#}(\mathbb{K}) = Lin(\mathbb{K}) \cup \{\#\}$
$Vec(\mathbb{K})$ = Menge aller Vektoren = $\bigcup_{i\geq 1} \mathbb{K}^i$
wobei $\sqcup$ die disjunkte Vereinigung bedeutet.
Falls die Mengen nicht disjunkt sind, kann man dies durch geordnete Paare kennzeichnen (wobei z.B. die 2. Komponente des Paares die Unterscheidung macht).

2) $\mathfrak{a}$ besteht aus den folgenden Relationen, Funktionen und Konstanten,
die alle über der Trägermenge A definiert und total gemacht werden:
$\cdot_L$: Skalarmultiplikation (lin. Abbildung mit Skalar)
$+_L$: Addition als partielle Funktion (lin. Abbildung mit lin. Abbildung)
$\circ_L$: Multiplikation als partielle Funktion (Hintereinanderausführung lin. Abbildung)
$\overset{-1}{}_L$: Inverse (als partielle Funktion) einer linearen Abbildung
$\oplus_L$: Addition auf Körper $\mathbb{K}$
$\odot_L$: Multiplikation auf Körper $\mathbb{K}$
app_L : Wendet eine lineare Funktion auf einen Vektor an, Ergebnis ist wieder ein Vektor
$\overset{v}{+}_L$: Addition zweier Vektoren
$\overset{v}{\cdot}_L$: Skalarmultiplikation mit Vektor
$IstSk_L$: 1-stelliges Relationszeichen „ist Skalar“
$IstLin_L$: 1-stelliges Relationszeichen „ist lin. Abbildung “
$IstNat_L$: 1-stelliges Relationszeichen „ist natürliche Zahl“
Dim_L : 3-stelliges Relationszeichen mit Dim(l,n,m) gdw $l : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist einen lin. Abbildung bzw. lin Funktion.
$\overset{\mathbb{K}}{0}_{n,m_L}$; neutrale 0 Elemente bei linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
$\overset{\mathbb{K}}{1}_{nL}$; neutrale 1 Elemente bei linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$
$\overset{\mathbb{K}}{0}_{nL}$; neutrale 0 Elemente bei Vektoren $(v_1, ..., v_n)$
$\overset{\mathbb{K}}{0}_L$: neutrales 0 Element bei Körpern
$\overset{\mathbb{K}}{1}_L$: neutrales 1 Element bei Körpern

Präziser
1) $+_L$: $A \times A \to A$ mit
$$+_L (l_1, l_2) = \begin{cases} l_1 \text{ add } l_2, & (l_1, l_2) \in Def(add) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
wobei add die bekannte (partielle Funktion) Addition von linearen Abbildungen bedeutet und
$(l_1, l_2) \in Def(add) = \bigcup_{n,m\geq 1} Lin(\mathbb{K}, n, m) \times Lin(\mathbb{K}, n, m)$
bedeutet, dass die Abbildungen zusammen passen.

2) $\circ_L$: $A \times A \to A$ mit
$$\circ_L (l_1, l_2) = \begin{cases} l_1 \text{ mul } l_2, & (l_1, l_2) \in Def(mul) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
wobei mul die bekannte (partielle Funktion) Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen bedeutet und
$(l_1, l_2) \in Def(mul) = \{(f_{n,m}, g_{p,n}) \mid f_{n,m} \in Lin(\mathbb{K}, n, m) \text{ und } g_{p,n} \in Lin(\mathbb{K}, p, n)\}$
bedeutet, dass die Abbildungen zusammen passen.

3) $\overset{-1}{}_L$: $A \to A$ mit
$$\overset{-1}{}_L(l) = \begin{cases} inv(l), & l \in Def(inv) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
wobei inv die bekannte (partielle Funktion) Inverse von linearen Abbildungen bedeutet und

$f \in Def(inv) = \{l \in Lin(\mathbb{K}) \mid \text{l ist bijektiv}$
bedeutet, dass die Inverse zu f existiert.

4) $\cdot_L \colon A \times A \to A$ mit
$$\cdot_L (k,l) = \begin{cases} k \text{ smul } l, & (k,l) \in Def(skmul) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
wobei smul die bekannte Skalarmultiplikation bei linearen Abbildungen bedeutet und
$(k,l) \in Def(skmul) = \mathbb{K} \times Lin(\mathbb{K})$
bedeutet, dass die Skalarmultiplikation existiert, d.h. dass z.B. k ein Körperelement und l eine linerare Abbildung ist.

5) $\oplus_L \colon A \times A \to A$ mit
$$\oplus_L (k_1,k_2) = \begin{cases} k_1 \text{ addd } k_2, & (k_1,k_2) \in Def(addd) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
wobei addd die bekannte Addition auf Körpern bedeutet und
$(k_1,k_2) \in Def(addd) = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$
bedeutet, dass z.B. k_1 und k_2 Körperelemente sind.

6) $\odot_L \colon A \times A \to A$ mit
$$\odot_L (k_1,k_2) = \begin{cases} k_1 \text{ mull } k_2, & (k_1,k_2) \in Def(mull) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
wobei mull die bekannte Multiplikation auf Körpern bedeutet und
$(k_1,k_2) \in Def(mull) = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$
bedeutet, dass z.B. k_1 und k_2 Körperelemente sind.

7) $app_L \colon A \times A \to A$ mit
$$app_L(f,x) = \begin{cases} f(x), & (f,x) \in Def(appp) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
$$(f,x) \in Def(appp) = \bigcup_{n,m \geq 1} Lin(\mathbb{K},n,m) \times \mathbb{K}^n$$

8) $\overset{-i}{_L} \colon A \to A$ mit
$$\overset{-i}{_L}(k) = \begin{cases} invers(k), & k \in Def(invers) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
wobei invers die bekannte Inverse eines Körperelements (Skalar) bedeutet und
$k \in Def(invers) = \mathbb{K} \setminus \{\overset{\mathbb{K}}{0}_L\}$
bedeutet, dass die Inverse zu k existiert.

9) $\overset{v}{+}_L \colon A \times A \to A$ mit
$$\overset{v}{+}_L (v_1,v_2) = \begin{cases} v_1 \text{ vadd } v_2, & (v_1,v_2) \in Def(vadd) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
wobei vadd die bekannte Vektoraddition bedeutet und
$$(v_1,v_2) \in Def(vadd) = \bigcup_{n,m \geq 1} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$$

10) $\overset{v}{\cdot}_L \colon A \times A \to A$ mit
$$\overset{v}{\cdot}_L (k,v) = \begin{cases} k \text{ vsmul } , & (k,v) \in Def(vsmul) \\ \#, & sonst \end{cases}.$$
wobei vsmul die bekannte Skalarmultiplikation eines Körperelements (Skalar) mit einem Vektor bedeutet und
$(k,v) \in Def(vsmul) = \mathbb{K} \times Vec(\mathbb{K})$

1.4.4 S-Struktur Matrizen

Struktur $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{b})$
1) Es werden zuerst folgende Mengen definiert:
K = Menge der Skalare
$Mat(\mathbb{K})$ = Menge aller Matrizen = $\bigcup_{n,m\geq 1} \mathbb{K}^{m\times n}$
$Mat^{\#}(\mathbb{K})$ = Mat($\mathbb{K}$) $\cup \{\#\}$
$MatVec(\mathbb{K})$ = Menge aller Matrizenvektoren = $\bigcup_{m\geq 1} \mathbb{K}^{m\times 1}$
wobei $\sqcup$ die disjunkte Vereinigung bedeutet.
Falls die Mengen nicht disjunkt sind, kann man dies durch geordnete Paare kennzeichnen (wobei z.B. die 2. Komponente des Paars die Unterscheidung macht).

2) $\mathfrak{b}$ besteht aus den folgenden Relationen, Funktionen und Konstanten:
$\cdot_M$: Skalarmultiplikation (Matrix mit Skalar)
$+_M$: Addition (Matrix mit Matrix)
$\circ_M$: Multiplikation (Matrix mit Matrix)
$\overset{-1}{M}$: Inverse (als partielle Funktion) einer Matrix
$\oplus_M$: Addition auf Körpern
$\odot_M$: Multiplikation auf Körpern
app_M : Multiplikation Matrix mit einspaltiger Matrix
$\overset{v}{+}_M$: Addition zweier Spaltenvektoren
$\overset{v}{\cdot}_M$: Skalarmultiplikation mit Spaltenvektor
$IstSk_M$: 1-stelliges Relationszeichen „ist Skalar“
$IstLin_M$: 1-stelliges Relationszeichen „ist Matrix“
$IstNat_M$: 1-stelliges Relationszeichen „ist natürliche Zahl“
Dim_M : 3-stelliges Relationszeichen mit Dim(M,n,m) gdw M ist eine m × n Matrix
$\underset{n,m_M}{\overset{\mathbb{K}}{0}}$; neutrale 0 Elemente bei linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
$\underset{n,m_M}{\overset{\mathbb{K}}{1}}$; neutrale 1 Elemente bei linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
$\underset{n_M}{\overset{\mathbb{K}}{0}}$; neutrale 0 Elemente bei Vektoren $(v_1, ..., v_n)$
$\overset{\mathbb{K}}{0}_M$: neutrales 0 Element bei Körpern
$\overset{\mathbb{K}}{1}_M$: neutrales 1 Element bei Körpern

1.4.4.1 Bijektion von Trägermenge A von Struktur $\mathfrak{A}$ auf Matrizen definieren

1) Zu jeder linearen Abbildung aus $Lin(\mathbb{K})$ wird bezüglich der Standardbasen eindeutig (bijektiv) ihre Darstellungsmatrix $M_{m,n} \in Mat(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{m\times n}$ zugeordnet. Dies gilt nach einem Satz aus der linearen Algebra.

2) Jedem Vektor $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{\kappa}$ wird die einspaltige Matrix $m((x_1, ..., x_n))$, also die transponierte Matrix zugeordnet.
3) Jedem # aus A wird # zugeordnet
4) Jedem $k \in \mathbb{K}$ wird das gleiche $k \in \mathbb{K}$ zugeordnet (identische Abbildung).
5) Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird das gleiche $n \in \mathbb{N}$ zugeordnet (identische Abbildung).
$\overset{\mathbb{K}}{0}_L$ wird $\overset{\mathbb{K}}{0}_M$ zugeordnet
$\overset{\mathbb{K}}{1}_L$ wird $\overset{\mathbb{K}}{1}_M$ zugeordnet
$\overset{\mathbb{V}}{0}_L$ wird $\overset{\mathbb{V}}{0}_M$ zugeordnet
$\overset{\mathbb{L}}{0}_L$ wird $\overset{\mathbb{L}}{0}_M$ zugeordnet
$\overset{\mathbb{L}}{1}_L$ wird $\overset{\mathbb{L}}{1}_M$ zugeordnet

Damit existiert die Bijektion:
$n \to n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K} \to m((x_1, ..., x_n))$,
$k \to k$ für alle $k \in \mathbb{K}$,
$l_{n,m} \to M_{m,n}$ für alle $l_{n,m} \in Lin(\mathbb{K})$
$\# \to \#$
Diese Bijektion wird mit π bezeichnet.

Damit wird dann definiert:
$B := \pi(A)$
konkret: $B = \pi(Lin(\mathbb{K})) \sqcup \pi(Vec(\mathbb{K})) \sqcup \pi(\mathbb{K}) \sqcup \pi(\mathbb{N}) \sqcup \{\#\}$
wobei $\sqcup$ die disjunkte Vereinigung bedeutet.
Falls die Mengen nicht disjunkt sind, kann man dies durch geordnete Paare kennzeichnen (wobei z.B. die 2. Komponente des Paares die Unterscheidung macht).
Beispiel:
$M_{3,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$l : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^3$ mit:
$l(x) := (x, 2x, 3x)$ Damit wäre keine Bijektion mehr vorhanden, denn :
$l \to M_{3,1}$ und
$(1, 2, 3) \to M_{3,1}$
Um die Notation nicht zu überladen, könnte man wie folgt eine Unterscheidung treffen:
$(1, 2, 3) \to {}^{L}M_{3,1}$ und
$l \to M_{3,1}$

1.4.4.2 Isomorphismus basteln

$M_1 +_M M_2 := \pi(\pi^{-1}(M_1) +_L \pi^{-1}(M_2))$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$M_1 \circ_M M_2 := \pi(\pi^{-1}(M_1) \circ_L \pi^{-1}(M_2))$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$M_1 \cdot_M M_2 := \pi(\pi^{-1}(M_1) \cdot_L \pi^{-1}(M_2))$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$M_1\ app_M\ M_2 := \pi(\pi^{-1}(M_1)\ app_L\ \pi^{-1}(M_2))$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$M_1 \oplus_M M_2 := \pi(\pi^{-1}(M_1) \oplus_L \pi^{-1}(M_2))$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$M_1 \odot_M M_2 := \pi(\pi^{-1}(M_1) \odot_L \pi^{-1}(M_2))$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$M_1 \overset{v}{+}_M M_2 := \pi(\pi^{-1}(M_1) \overset{v}{+}_L \pi^{-1}(M_2))$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$M_1 \overset{v}{\cdot}_M M_2 := \pi(\pi^{-1}(M_1) \overset{v}{\cdot}_L \pi^{-1}(M_2))$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$M^{-1} := \pi((\pi^{-1}(M))^{-1})$ für alle $M \in B$
$\overset{\mathbb{K}}{0}_M := \pi(\overset{\mathbb{K}}{0}_L)$
$\overset{\mathbb{K}}{1}_M := \pi(\overset{\mathbb{K}}{1}_L)$
$\overset{\mathbb{V}}{0}_M := \pi(\overset{\mathbb{V}}{0}_L)$
$\overset{\mathbb{L}}{0}_M := \pi(\overset{\mathbb{L}}{0}_L)$
$\overset{\mathbb{L}}{1}_M := \pi(\overset{\mathbb{L}}{1}_L)$
$IstSk_M(k) \iff IstSk_L(\pi^{-1}(k))$ für alle $k \in B$
$IstLin_M(C) \iff IstLin_L(\pi^{-1}(C))$ für alle $C \in B$
$IstNat_M(n) \iff IstNat_L(\pi^{-1}(n))$ für alle $n \in B$
$Dim_M(C, n, m) \iff Dim_L(\pi^{-1}(C), \pi^{-1}(n), \pi^{-1}(m))$ für alle $C, n, m \in B$

Damit gilt:
$\pi^{-1}(M_1 +_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) +_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M_1 \circ_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) \circ_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M_1 \cdot_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) \cdot_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M_1\ app_M\ M_2) = \pi^{-1}(M_1)\ app_L\ \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M^{-1}) = (\pi^{-1}(M))^{-1}$ für alle $M \in B$

1.5 Behauptung

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph

Beweis:
$\pi^{-1}(M_1 +_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) +_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M_1 \circ_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) \circ_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M_1 \cdot_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) \cdot_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M_1\ app_M\ M_2) = \pi^{-1}(M_1)\ app_L\ \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M^{-1}) = (\pi^{-1}(M))^{-1}$ für alle $M \in B$ $\pi^{-1}(M_1 \oplus_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) \oplus_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M_1 \odot_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) \odot_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M_1 \overset{v}{+}_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) \overset{v}{+}_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$
$\pi^{-1}(M_1 \overset{v}{\cdot}_M M_2) = \pi^{-1}(M_1) \overset{v}{\cdot}_L \pi^{-1}(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in B$

1.6 Satz über lineare Abbildungen

Behauptung:
1)
$\mathfrak{A} \models \forall l_1\ \forall l_2\ \forall l_3 \quad l_1 + (l_2 + l_3) = (l_1 + l_2) + l_3$
$\mathfrak{A} \models \forall l_1\ \forall l_2\ \forall l_3 \quad l_1 \circ (l_2 \circ l_3) = (l_1 \circ l_2) \circ l_3$
$\mathfrak{A} \models \forall l_1\ \forall l_2\ \forall l_3 \quad (l_1 + l_2) \circ l_3 = l_1 \circ l_3 + l_2 \circ l_3$
$\mathfrak{A} \models \forall l_1\ \forall l_2\ \forall l_3 \quad l_1 \circ (l_2 + l_3) = l_1 \circ l_2 + l_1 \circ l_3$
$\mathfrak{A} \models \forall \lambda\ \forall l_1\ \forall l_2 \quad (\lambda \cdot l_1) \circ l_2 = \lambda \cdot (l_1 \circ l_2) = l_1 \circ (\lambda \cdot l_2)$
$\mathfrak{A} \models \forall \lambda\ \forall \mu\ \forall l_1\ \forall l_2\ \forall l_3 \quad (\lambda \cdot l_1 + \mu \cdot l_2) \circ l_3 = \lambda \cdot (l_1 \circ l_3) + \mu \cdot (l_2 \circ l_3)$
$\mathfrak{A} \models \forall \lambda\ \forall \mu\ \forall l_1\ \forall l_2\ \forall l_3 \quad l_1 \circ (\lambda \cdot l_2 + \mu \cdot l_3) = \lambda \cdot (l_1 \circ l_2) + \mu \cdot (l_1 \circ l_3)$
$\mathfrak{A} \models \forall \lambda\ \forall \mu\ \forall l \quad (\lambda \oplus \mu) \cdot l = \lambda \cdot l + \mu \cdot l$
$\mathfrak{A} \models \forall \lambda\ \forall l_1\ \forall l_2 \quad \lambda \cdot (l_1 + l_2) = \lambda \cdot l_1 + \lambda \cdot l_2$

2)
$\mathfrak{A} \models \forall l\ \forall x\ \forall y \quad app(l, x \overset{v}{+} y) = app(l, x) \overset{v}{+} app(l, y)$
$\mathfrak{A} \models \forall \lambda\ \forall l\ \forall x \quad app(\lambda \cdot l, x) = app(l, \lambda \overset{v}{\cdot} x)$
$\mathfrak{A} \models \forall \lambda\ \forall \mu\ \forall l\ \forall x\ \forall y \quad app(l, \lambda \overset{v}{\cdot} x \overset{v}{+} \mu \overset{v}{\cdot} y) = \lambda \overset{v}{\cdot} app(l, x) \overset{v}{+} \mu \overset{v}{\cdot} app(l, y)$
$\mathfrak{A} \models \forall x\ \forall l_1\ \forall l_2 \quad app(l_1 + l_2, x) = app(l_1, x) \overset{v}{+} app(l_2, x)$
$\mathfrak{A} \models \forall \lambda\ \forall l\ \forall x \quad app(\lambda \cdot l, x) = \lambda \overset{v}{\cdot} app(l, x)$

3)
$\mathfrak{A} \models \forall l \quad (l \neq \# \wedge l^{-1} \neq \#) \rightarrow (l^{-1})^{-1} = l$
$\mathfrak{A} \models \forall l_1\ \forall l_2 \quad (l_1 \neq \# \wedge l_2 \neq \# \wedge l_1 \circ l_2 \neq \#) \rightarrow (l_1 \circ l_2)^{-1} = l_2^{-1} \circ l_1^{-1}$
$\mathfrak{A} \models \forall \lambda\ \forall l \quad (\lambda \cdot l)^{-1} = \lambda^{-i} \cdot l^{-1}$

1.7 Satz über Matrizen

Nach dem Isomorphiesatz folgt das Analoge für Matrizen

1.8 Substitutionslemma

1)
Für alle S-Term T gilt:
$(\mathfrak{A}, h)(T^{t_1, ..., t_n}_{x_1, ..., x_n}) = (\mathfrak{A}, h^{(\mathfrak{A},h)(t_1), ..., (\mathfrak{A},h)(t_n)}_{x_1, ..., x_n})(T)$

2)
Für alle S-Ausdrücke ϕ gilt:
$(\mathfrak{A}, h) \models \phi^{t_1, ..., t_n}_{x_1, ..., x_n}$ gdw $(\mathfrak{A}, h^{(\mathfrak{A},h)(t_1), ..., (\mathfrak{A},h)(t_n)}_{x_1, ..., x_n}) \models \phi$

1.9 Satz Übertragbarkeit auf Terme

Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, h)$ eine S-Interpretation. Dann gilt:
Wenn
$\mathfrak{I} \models \forall x_1 \ ... \ \forall x_n \ \phi(x_1, ..., x_n)$
dann:
Für alle S-Terme $T_1, ..., T_n$ gilt: $\mathfrak{I} \models \ \phi \, {}^{T_1}_{x_1}, ..., {}^{T_n}_{x_n}$

Beweis 1:
Zeige:
$(\mathfrak{A}, h) \models \forall x_1 \ ... \ \forall x_n \ \phi(x_1, ..., x_n) \quad \Rightarrow \quad$ Für alle S-Terme $T_1, ..., T_n$ gilt: $(\mathfrak{A}, h) \models \ \phi^{T_1}_{x_1}, ..., {}^{T_n}_{x_n}$
Sei $(\mathfrak{A}, h) \models \forall x_1 \ ... \ \forall x_n \ \phi(x_1, ..., x_n)$ und $T_1, ..., T_n$ beliebige S-Terme, also:
Für alle $\kappa_1, ..., \kappa_n \in A$ gilt: $(\mathfrak{A}, h^{\kappa_1}_{x_1}, ..., {}^{\kappa_n}_{x_n}) \models \phi(x_1, ..., x_n)$
also gilt auch speziell für $\kappa_1 = (\mathfrak{A}, h)(T_1), ..., \kappa_n = (\mathfrak{A}, h)(T_n)$:
$(\mathfrak{A}, h^{(\mathfrak{A},h)(T_1)}_{x_1}, ..., {}^{(\mathfrak{A},h)(T_n)}_{x_n}) \models \phi(x_1, ..., x_n)$
Nach dem Substitutionslemma folgt dann:
$(\mathfrak{A}, h) \models \phi^{T_1}_{x_1}, ..., {}^{T_n}_{x_n}$

Beweis 2:
Man kann zeigen (durch Substitutionsregel):
$\emptyset \vdash \forall x.\phi \to \phi \frac{t}{x}$ Also gilt nach dem Vollständigkeitssatz: $\emptyset \models \forall x.\phi \to \phi \frac{t}{x}$
Also gilt für jedes Modell $\mathfrak{M}$ der leeren Menge:
$\mathfrak{M} \models \forall x.\phi \to \phi \frac{t}{x}$
Da für jede Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{I}$=$(\mathfrak{A}, h)$ mit h als beliebieg Belegung ein Modell der leeren Menge ist, gilt:
$\mathfrak{I} \models \forall x.\phi \to \phi \frac{t}{x}$ Also gilt:
$\mathfrak{I} \models \forall x.\phi \Rightarrow \mathfrak{I} \models \phi \frac{t}{x}$