1 Zusammenfassung

1) Induktive Definitionen (z.B. für Terme und Formeln in der Prädikatenlogik) spielen in der Informatik eine zentrale Rolle:
Zitate von Prof. Kindler (Semantik, Skript zur Vorlesung Semantik von Programmiersprachen im WS 2003/04 an der Universit¨at Paderborn. Überarbeitet im WS 2004/05 Ekkart Kindler Version: 0.2.8 vom 28. Januar 2005. Kapitel 4 induktive Definitionen und Beweise):
"Wenn man genau hinsieht, gibt es in der Informatik fast nichts, was nicht induktiv definiert wäre" ..."Deshalb spielen induktive Definitionen und Beweise in der Informatik eine ganz zentrale Rolle – ob man sie nun explizit macht oder nicht"...
"Ein weiterer Grund ist, ein Bewußtsein dafür zu schaffen, daß in der Informatik fast uberall nur mit Wasser gekocht wird, wobei das Wasser die Konzepte des induktiven Definierens und Beweisens sind."

2) Neben den induktiven Definitionen spielen Rekursionen in der Informatik auch eine Rolle. Während induktiv definierte Mengen "von unten her", von der leeren Menge aus, aufgebaut werden, wird eine Rekursion durch "Zurücklaufen", also von "oben her" durchgeführt.

3) In diesem Skript wird versucht, einen Zusammenhang zwischen einer induktiv definierten Menge und einer rekursiven Funktion herzustellen:
Wie kann man eine rekursive Funktion angeben, die "entscheidet", ob ein vorgegebenes Element zu einer induktiv definierten Menge gehört oder nicht?
Diese rekursive Funktion kann dann (nach der induktiven Definition) rekursiv implementiert werden (die Formel gibt "anschaulich gesprochen" den Algorithmus vor).
Da die rekursive Funktion ein Problem lösen soll, muß sie berechenbar sein. Deshalb werden dazu bestimmte Voraussetzungen gemacht.
Man muss sich also keine problemspezifischen Backtrack-Strategien überlegen:
spezifisch sind hier nur die Regeln für induktive definierte Mengen.
Das was man also informal unter Backtrack-Strategie versteht, wird hier u.a. versucht zu präzisieren (formalisieren).

4) Beispiele
Die in den folgenden Beispielen angegebenen Formeln, also e(...)= und N(...)=
sind Spezialfälle einer allgemeineren Formel, die in dem Artikel entwickelt wird.

Beispiel 1:
Man kann mit Hilfe von Regeln Zahlenterme aufbauen (Regeln dazu kommen gleich).
Unter Zahlenterme verstehen wir hier z.B. die Zeichenfolgen "((3+4)+5)" "bzw. " (2+9)", wohingegen z.B. die Zeichenfolge "(++++((((" kein Zahlenterm ist.
Formalisieren kann man dies mit Hilfe von Regeln, die hier in einer Regelnkurznotation angegeben werden:

$X = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; (;) ; + \}^*$
|N = Menge der natürlichen Zahlen
$R = \{(\{x_1; x_2\}, (x_1 + x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \cup \{(\emptyset;n) \mid n \in |N \}$

R kann man informal kürzer durch folgende Regelnkurznotation ($r \in X$, $s \in X$, $n \in |N$) darstellen:

$\emptyset$	{r ; s}
---	-------
n	(r + s)

Mit I(R) bezeichnet man dann die durch R induktiv definierte Menge, hier also die Menge der Zahlenterme.
Es soll dann "berechnet" werden, ob eine Zeichenfolge ein Zahlenterme ist.
Damit kann man "berechnen", ob z.B. "(2+9)" oder "(++++((((" ein bzw. kein Zahlenterm ist.

Dazu wurde die folgende rekursive Formel (e wie evaluate) entwickelt:
Für alle $x \in X$ gilt ($\cdot$ entspricht dem logischen UND , + entspricht dem logischen ODER):

$(\emptyset, x) \in R \quad ==> \quad e(x) = 1$

$R^{-1}[\{x\}] = \emptyset \quad ==> \quad e(x) = 0$

sonst $\quad ==> \quad e(x) = \sum_{\{x_1 \dots x_m\} \in R^{-1}[\{x\}]} e(x_1) \cdot \dots \cdot e(x_m)$

Damit kann man "berechnen", ob z.B. "(2+9)" ein Zahlenterm ist.
Man bildet dazu e((2+9)) .
Um die Formel zu verwenden müssen vorher die Elemente der Umkehrrelation $R^{-1}[\{ (2+9) \}]$ ermittelt werden, also alle Mengen {r;s} mit $(\{r;s\};(2+9)) \in R$. Das ist nur die Menge {2;9}
Mit Hilfe obiger rekursiven Formelfolgt dann:
e((2+9)) = e(2) * e(9)

Um weiter zu rechnen, müssen jetzt noch e(2) und e(9) "berechnet" werden.
Dazu müssen die Elemente der Umkehrrelation $R^{-1}[\{2\}]$ und $R^{-1}[\{9\}]$ ermittelt werden:
also $R^{-1}[\{2\}] = = \{\emptyset\}$ und $R^{-1}[\{9\}] = = \{\emptyset\}$
Mit Hilfe obiger rekursiven Formel folgt dann:
e(2) = 1 und e(9) = 1 also insgesamt:
e((2+9)) = e(2) * e(9) = 1 * 1 = 1,
also ist (2+9) ein Zahlenterm.
Wäre e((2+9)) = 0, dann wäre "(2+9)" kein Zahlenterm.

Beispiel 2:
Man kann mit Hilfe von Regeln Zahlenterme mit ihren Werten aufbauen (Regeln dazu kommen gleich).
Das 1. Element im Tupel ist der Zahlenterm und das 2. Element (= der Nachbar des Zahlenterms) ist der Wert des Zahlenterms.
Da die mathematische Addition nicht mehr mit + bezeichnet werden kann (da dieses Zeichnen schon bei den Zahlentermen verwendet wird, nimmt man hier dafür die Bezeichnung add.
Die in dem vorigen Beispiel definierte Menge aller Zahlenterme wird hier mit MAZ abgekürzt.

$R = \{(\{(T_1; w_1); (T_2; w_2)\}; ((T_1 + T_2); add(w_1, w_2))) \mid$
$\quad T_1 \in MAZ \wedge T_2 \in MAZ \wedge w_1 \in |N \wedge w_2 \in |N\} \cup \{(\emptyset;(n;n)) \mid n \in |N \}$

R kann man informal kürzer durch folgende Regelnkurznotation ($r\in X$, $s\in X$, $n\in |N$, $T_1\in MAZ$, $T_2\in MAZ$) darstellen:

$\varnothing$	$(T_1 , w_1) , (T_2 , w_2)$
--------	------------------------------
$(n ; n)$	$((T_1+T_2), add(w_1,w_2))$

Es soll dann der Wert eines Zahlenterms (siehe letztes Beispiel) "berechnet" werden. Damit kann man z.B. den Wert des Zahlenterms "(2+9) " "berechnen".
Dazu wurde die folgende rekursive Formel (N wie Nachbar) entwickelt:

Für alle $a\in MAZ$ gilt:

$N(a) = a$	falls $a\in |N$
$N((a_1+a_2)) = add((N(a_1), N(a_2)))$	sonst, d.h. $a = (a_1+a_2)$

Damit kann man dann z.B. den Wert des. Zahlenterms "(2+9)" "berechnen"
Man bildet dazu N((2+9)) und "berechnet":
$N((2+9)) = add((N(2), N(9)) = add(2,9) = 11$

5) Der Zusammenhang zwischen induktiver Definition und Rekursion wird durch 4 Sätze (Rekindsatz 1- Rekindsatz 4) beschrieben.
Diese Sätze werden auf konkrete Beispiele angewendet:
- Syntaxchecker (Terme, Formeln, Anweisungen),
- Wert von (eindeutigen bzw. mehrdeutigen) Termen "berechnen",
- reguläre Ausdrucke prüfen (bzw. Semantik davon bestimmen),
- optimale Spielstrategien "berechnen" von z,B:
  Nimm-Spiel, Würfelkippen, Acht-Damen-Problem, magisches Quadrat, Sudokulöser
- Erfüllbarkeitsprobelm der Aussagenlogik, operationale Semantik, usw.

2 Kurzeinführung: induktiv definierte Mengen

2.1 Grundlagen

2.1.1 Regelmenge

X sei die Grundmenge
Eine Menge $R \subset P(X) \times X$ heißt eine Regelmenge über X, wobei für alle $(Y,x) \in R$ gilt, dass Y eine endliche Menge ist. Mit P(X) wird die Potenzmenge von X bezeichnet.

2.1.1.1 Bemerkungen:

1) Statt $(Y,x) \in R$ schreibt man auch: Y --> x oder
 Y
----
 x

2) Eine Regel $(\emptyset,x) \in R$ heißt auch Axiom und zu x sagt man dann auch Atom.

2.1.2 Folgerungsmenge (Ableitungsschritt)

Für eine Menge $M \subset X$ wird die direkte Folgerungsmenge (Konsequenz) wie folgt definiert:
$K(M) = \{x \in X \mid \exists Y \subset M \; (Y,x) \in R\}$

2.1.3 Korollar K1 (Monotonie)

$A \subset B \Longrightarrow K(A) \subset K(B)$

Beweis:
Sei $x \in K(A)$
dann existiert eine Teilmenge Y mit $Y \subset A$ und $(Y,x) \in R\}$.
Da laut Voraussetzung $A \subset B$, gilt: $Y \subset B$.
Damit $x \in K(B)$

2.1.4 Definition induktiv definierte Menge

$D_0 = \emptyset$
$D_{i+1} = K(D_i)$

Dann heißt $I(R) = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ....$
die durch R induktiv definierte Menge.

2.1.5 Korollar K2 (monotoner Aufbau)

$D_i \subset D_{i+1}$

Beweis:
Es gilt trivialerweise:
$\emptyset = D_0 \subset D_1$
aus $D_0 \subset D_1$ folgt dann nach obigem Korollar K1:
$K(D_0) \subset K(D_1)$, also:$D_1 \subset D_2$, usw.

2.1.6 Satz

R ist eine entscheidbare Regelmenge über X ==> I(R) ist semi-entscheidbar.

Beweis: fehlt noch

2.1.7 Korollar K3

Voraussetzungen:
X sei die Grundmenge
R ist eine Regelmenge über X.
$m_1 \in X \wedge ... \wedge m_k \in X$

Behauptung:
$\forall i \leq k \; m_i \in I(R)$ ==> $\exists r \; \{m_1, ..., m_k\} \subset D_r$

Beweis.
$\exists t_1, ..., \exists t_k \;\; m_1 \in D_{t1} \wedge ... \wedge m_k \in D_{tr}$
Bilde $r = \max(t_1, ..., t_k)$
Dann gilt:
$m_1 \in D_{t1} \subset D_r \wedge ... \wedge m_k \in D_{tk} \subset D_r$ ==> $m_1 \in D_r \wedge ... \wedge m_k \in D_r$ ==>
$\{m_1, ..., m_k\} \subset D_r$

2.1.8 Korollar K4 (Induktionspfad)

Voraussetzungen:
X sei die Grundmenge
R ist eine Regelmenge über X.

Behauptung:
$x \in I(R)$ <==> $\exists \; T \subset I(R)$ mit $(T,x) \in R$
oder anders formuliert:
Die Relation (P(X), R, I(R)) ist rechtstotal

Beweis:
1) ==>
$x \in I(R)$ ==> $\exists k>0 \; x \in D_k$ ==> $\exists M \subset D_{k-1} \; (M,x) \in R$ ==> $\exists M \subset D_{k-1} \subset I(R) \; (M,x) \in R$
==> $\exists M \subset I(R) \; (M,x) \in R$

2) <==
$\exists \; T \subset I(R)$ mit $(T,x) \in R$ ==>
Setze $T := \{t_1, ..., t_k\}$, dann gilt Korollar mit K3:
$\exists r \; \{t_1, ..., t_k\} \subset D_r$ ==> $x \in D_{r+1}$ ==> $x \in D_{r+1} \subset I(R)$ ==> $x \in I(R)$

2.1.9 Satz (Induktion über die induktiv definierte Menge)

Mit B(d) werden Behauptungen über eine Variable d bezeichnet.
R sei eine Regelmenge über X.

Behauptung:
aus $\forall(Y,x)\in R$ ($\forall y\in Y$ B(y) ==> B(x)) folgt $\forall z\in I(R)$ B(z)

Beweis: fehlt noch

2.1.10 Definition längen-lexikographische Ordnung

Eine längen-lexikographische Ordnung auf der Menge A* aller Worte auf einer nichtleeren, endlichen Menge A (wird Alphabet genannt) wird wie folgt hergestellt:
Zuerst wird eine Ordnung < auf A definiert.
Danach ordnet man die Wörter von A* zunächst ihrer Länge nach und dann bei gleicher Länge lexikographisch (wie im Lexikon) unter Zugrundelegung der Ordnung von A.

2.1.11 monotektonisch induktiv definierte Menge

R ist eine Regelmenge über X.
I(R) ist monotektonisch : <==>
$\forall x\in I(R)$ $\exists$ genau ein $M\subset I(R)$ $(M,x)\in R$
(<==> ((P(X), R, X) ist linkseindeutig und rechtstotal)

2.1.12 Definition

$X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$ ist eine effektiv geordnete Menge (ist "effektiv ordenbar") : <==>
Es existiert eine effektiv angebbare Ordnung < auf X mit:
$X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$ und $x_0< x_1< x_2< x_3< x_4 <...$ und alle x_i sind paarweise verschieden.

2.1.13 Definition

Eine Sprache $X \subset A^*$ heißt rekursiv aufzählbar (effektiv aufzählbar) : <==>
A = leere Menge oder es gibt eine berechenbare Funktion f mit
f : N --> A* mit f(N) = X
d.h:
X = {f(0), f)1), f(2), ... }
Spechweise:
f zählt A auf, wobei ein $i \neq j$ existieren kann mit f(i) = f(j), d.h. f muß nicht injektiv sein.

Bemerkung:
Man kann oBdA verlangen, daß f injektiv ist.

2.1.14 Behauptung

M ist rekursiv aufzählbar <==> M hat eine effektive Ordnung ist "effektiv ordenbar"
Beweis:
1) ==>
Der Algorithmus erzeugt die Menge
$M = \{m_1, m_2, m_3, \ ...\}$ mit $m_1 < m_2 < m_3 < \ ...$
Allerdings können dort gleiche Elemente mehrfach auftauchen.
Deswegen wird dieser Algorithmus A noch mit dem nachfolgende Algorithmus verbunden, der dann die Liste E erzeugt:

```
M = {m_1}
E = {m_1}
k=2
while (k>1) do{
  zähle m_k mit dem Algorithmus A auf
  if(m_k ist nicht in der Liste {m_1, ..., m_k-1} )
     E = E + m_k   //  m_k wird an die Liste E angefügt
  }
  erhöhe k um 1
}
```

Bemerkung:
Die Ordnung kann man dann wie folgt erzeugen:
$x_i < x_j \iff i < j$
Man kann $x_i < x_j$ entscheiden.
Man lässt einfach die Aufzählung laufen und stellst fest, welches Element zuerst auftaucht.
Das ist das kleinere.

2) <==
Es gibt einen Algorithmus mit dem M ordnen kann, so daß gilt:
$M = \{m_1, m_2, m_3, \ ...\}$ mit $m_1 < m_2 < m_3 < \ ...$
und alle m_i sind jeweils paarweise verschieden.
Dieser Algorithmus zählt also die Elemente von M auf.

2.1.15 Definition

R ist eine kontrahierende Regelmenge über der effektiv geordneten Menge $X = \{x_0, x_1, \ ...\}$
:<==>
$(M,x) \in R \implies \forall a_i \in M \ a_i < x$

2.1.16 Korollar K5 (Kontraktionskorollar)

R ist eine kontrahierende Regelmenge über der effektiv geordneten Menge $X = \{x_0, x_1, ...\}$ und (P(X), R, X) ist rechtstotal (also $\forall x \in X\ \exists\ (\{a_1, ..., a_r\}, x) \in R$)
==> I(R) = X

Beweis: (mit Induktion)
B(n) :<==> $x_n \in X$ ==> $x_n \in I(R)$
1) Zeige B(0)
$x_0 \in X$. Da R rechtstotal, existiert ein M mit $(M, x_0) \in R$
Fall1: $M = \{x_{k1}, ..., x_{kr}\}$
Da R eine kontrahierende Regelmenge ist, folgt: $x_{k1} < x_0 \wedge \ldots \wedge x_{kr} < x_0$
also: $k_1 < 0 \wedge \ldots \wedge k_r < 0$ Widerspruch.
Fall2: $M = \emptyset$
also $(M, x_0) \in R$, also $(\emptyset, x_0) \in R$, also $x_0 \in I(R)$

2) Es gelte B(0), B(1), ..., B(n-1). Zeige B(n)
$x_n \in X$. Da R rechtstotal, existiert ein M mit $(M, x_n) \in R$
Fall1: $M = \{x_{k1}, ..., x_{kr}\}$
Da R eine kontrahierende Regelmenge ist, folgt: $x_{k1} < x_n \wedge \ldots \wedge x_{kr} < x_n$
also: $k_1 < n \wedge \ldots \wedge k_r < n$
also gilt nach Ind.Vor. $B(k_1) \wedge \ldots \wedge B(k_r)$
also
$x_{k1} \in X$ ==> $x_{k1} \in I(R) \wedge \ldots \wedge x_{kr} \in X$ ==> $x_{kr} \in I(R)$
also: $x_{k1} \in I(R) \wedge \ldots \wedge x_{kr} \in I(R)$
also: $x_n \in I(R)$
Fall2: $M = \emptyset$
also $(M, x_n) \in R$, also $(\emptyset, x_n) \in R$, also $x_n \in I(R)$

2.2 Beispiel

2.2.1 Anschaulich

Induktive Definition:
Die neue Zahlenmenge erhält man aus der alten Zahlenmenge, indem man jeweils 2 **verschiedene** Zahlen addiert und diese der alten Zahlenmenge hinzufügt.

Konkret:
Gegeben sind zwei Zahlen, z.B.
$a_0 = 3$, $a_1 = 5$
$D_0 := \emptyset$
$D_1 := \{a_0 ; a_1\} = \{3 ; 5\}$

Addiere jeweils zwei verschiedene Zahlen aus D_1 (3+5). Die Ergebnisse werden zu D_1 dazugefügt und in D_2 abgelegt:
$D_2 = \{3 ; 5 ; 8\}$

Addiere jeweils zwei verschiedene Zahlen aus D_2 (3+5, 3+8, 5+8). Die Ergebnisse werden zu D_2 dazugefügt und in D_3 abgelegt:
$D_3 = \{3 ; 5 ; 8 ; 11 , 13\}$

Addiere jeweils zwei verschiedene Zahlen aus D_3 (3+5, 3+8, 3+11, 3+13, 5+8, 5+11, 5+13, 8+11, 8+13, 11+13). Die Ergebnisse werden zu D_3 dazugefügt und in D_4 abgelegt:
$D_4 = \{3 ; 5 ; 8 ; 11 ; 13 ; 14 ; 16 ; 18 ; 19 ; 21 ; 24\}$
....

Man definiert:
$D = D0 \cup D1 \cup D2 \cup D3$ ....

2.2.2 Formale Darstellung

$X = \{1 ; 2 ; 3 ; 4; 5 ... \}$
$R = \{(B,x) \in M(X) x X \mid \exists r,s \in X \; B=\{r;s\} \wedge x = r + s \wedge r \neq s\} \cup$
$\{(\emptyset ; 3)\} \cup \{(\emptyset ; 5)\}$

Regelnkurznotation: $(r \in X , s \in X)$

$$\frac{\emptyset}{3} \qquad \frac{\emptyset}{5} \qquad \frac{\{r ; s\}}{r + s} \quad \text{wobei } r \neq s$$

Definiere:
$D_0 = \emptyset$

$D_1 = K(D_0) = \{3 ; 5\}$

$D_2 = K(D_1) = \{3 ; 5 ; 8\}$

$D_3 = K(D_2) = \{3 ; 5 ; 8 ; 11 ; 13\}$
...
$D = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup$ ....

3 Induktion und Rekursion

3.1 Grundlagen

3.1.1 Definitionen

3.1.1.1 Definitionen mit Relationen und Funktionen

1)
Wenn $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung ist, dann induziert dies eine Abbildung
$f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$ auf den Potenzmengen von A und B mit
$f_*(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$
Üblicherweise schreibt man zwar f(A) statt $f_*(A)$, aber dies ist strenggenommen falsch.
Manchmal findet man auch die Bezeichnung f[A] statt $f_*(A)$.

2)
Sei $R \subset A \times B$
Dann heißt das Tripel (A, R, B) eine zweistellige Relation.
Manchmal sagt man nur - weniger präzise - R ist eine Relation.

3) Mit $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$ wird die Umkehrrelation von R bezeichnet.

4) $T \subset A \Longrightarrow R[T] := \{y \in B \mid \exists x \in T\ (x,y) \in R\}$
Speziell:
$x \in A \Longrightarrow R[\{x\}] = \{y \in B \mid (x,y) \in R\}$
also:
$T \subset B \Longrightarrow R^{-1}[T] = \{x \in A \mid \exists y \in T\ (y,x) \in R^{-1}\} = \{x \in A \mid \exists y \in T\ (x,y) \in R\}$

5)
$pr_1((x,y)) := x$
$(pr_1)_*(R) := \{ pr_1((x,y)) \mid (x,y) \in R\} = \{x \in A \mid \exists\ y \in B\ (x,y) \in R\}$
heißt die Projektion in die 1. Koordinate der Relation R
Statt $(pr_1)_*(R)$ kann man auch schreiben: $pr_1[R]$
Analoges gilt für $(pr_2)_*(R)$

6) $A^k := A \times \ldots \times A$

7) R rechtseindeutig und linkstotal (d.h. $P_1(R) = A$) ist und $R[x] = \{y\}$, dann definiert man:
$R(x) := y$

8) Folgen
Ein Alphabet V ist eine nichtleere, endliche Menge von Zeichen (auch Symbole oder Buchstaben genannt).
Eine endliche Folge $(x_1, .., x_k)$ heißt mit $x_i \in V$ heißt Wort über V derLänge k.
Wenn es keine Mehrdeutigkeiten gibt, wird eine Folge $(x_1, .., x_k)$ durch $x_1, .., x_k$ abgekürtzt.
Es gibt genau ein Wort der Länge 0, das sogenannte Leerwort, das man mit ε bezeichnet
$\varepsilon := (\,) := \{\varnothing\}$
$(a,b) := \{a, \{a,b\}\}$
$(a,b,c) := (a, (b,c))$

3.1.1.2 Definition Vereinigung

1) Q sei eine Menge von Mengen

$\bigcup_{M \in Q} M$: = {x | ∃ M∈Q x∈M}, falls Q ≠ ∅

$\bigcup_{M \in Q} M$: = ∅, falls Q = ∅

3.1.2 Lemmata

3.1.2.1 Lemma L1 (Monotonie)

Vorausssetzungen:
R ⊂ A x B

Behauptung:
T1 ⊂ T2 ==> R[T1] ⊂ R[T2]

Beweis:
Es sei b∈R[T1]
Dann existiert ein t∈T1⊂ T2 mit (t,b)∈R.
Also existiert ein t∈T2 mit (t,b)∈R.
Also: b∈R[T2]

3.1.2.2 Lemma L2

Voraussetzungen:
R ⊂ A x B und und T ⊂ A und $T = T_1 \cup T_2$

Behauptung:
$R[T] = R[T_1] \cup R[T_2]$

Beweis:
Zeige:
$\{y \in B \mid \exists x \in T\ (x,y) \in R\} = \{y \in B \mid \exists x \in T_1\ (x,y) \in R\} \cup \{y \in B \mid \exists x \in T_2\ (x,y) \in R\}$
1) ==>
$y \in LS \implies \exists x \in T\ (x,y) \in R \implies \exists x \in T_1\ (x,y) \in R \vee \exists x \in T_2\ (x,y) \in R \implies y \in RS$

2) ==>
$y \in RS \implies \exists x \in T_1\ (x,y) \in R \vee \exists x \in T_2\ (x,y) \in R \implies \exists x \in T\ (x,y) \in R \implies y \in LS$

3.1.2.3 Definition für RekIndsatz 1

X sei die Grundmenge, P(X) die Potenzmenge von X
$R \subset P(X) \times X$ sei eine zu X gehörende Regelmenge.
Sei $x \in X$

$e(x) = 1$, wenn $x \in I(R)$
$e(x) = 0$, wenn $x \notin I(R)$

Bemerkung:
e wie evaluate

3.1.3 RekIndsatz 1

Voraussetzungen:
1) X sei die Grundmenge
$R \subset P(X) \times X$ sei eine entscheidbare Regelmenge über X mit $I(R) \neq \emptyset$
$x \in X$
$R^{-1}[\{x\}] = \{T \mid (x,T) \in R^{-1}\} = \{T \mid (T,x) \in R\}$

2) (wird für die Berechenbarkeit der Abbildung e gebraucht)
$X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$ mit $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < ...$ ist aufzählbar und
$(\{x_1, ..., x_r\}, x) \in R \implies x_1 < x \wedge \ldots \wedge x_r < x$

Behauptung:
I)
e ist berechenbar und

II)
$(\emptyset, x) \in R \implies e(x) = 1$
$R^{-1}[\{x\}] = \emptyset \implies e(x) = 0$
sonst $\implies e(x) = \sum_{\{x_1 \ldots x_m\} \in R^{-1}[\{x\}]} e(x_1) \cdot \ldots \cdot e(x_m)$

Bemerkungen:
1) Das Zeichen · ist das logische UND, + (bei der Summe) ist das logische ODER

Beweis:
I)
1) Da X aufzählbar ist, existiert ein Verfahren mit dem man die Liste
$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots$ erzeugen kann.
Beweis wird über vollständige Induktion gemacht.
Definiere : B(n) :<==> $e(x_n)$ ist "berechenbar"

2) Unterbehauptung 1:
$R^{-1}[] : P_{fin1}(A) \dashrightarrow P(A)$ ist berechenbar und $| R^{-1}[\{x\}] | < 00$
wobei $P_{fin1}(A)$ die einelementigen Teilmengen von A bedeutet.
mit
$R^{-1}[\{x\}] = \{T \subset X \mid (T,x) \in R\}$

Unterbeweis1:
Da X aufzählbar ist, existiert ein Verfahren mit dem man die Liste
$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots$ erzeugen kann.
Da $x \in X$, gibt es ein n mit $x = x_n$
Verwende folgendes Verfahren, um $R^{-1}[\{x\}]$ zu bestimmen:
Lege sämtliche Teilmengen Y von $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ in einer Liste ab. Dies ist möglich, da es nur endlich viele Teilmengen von $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ gibt.
Gehe die Liste durch und bestimme für jedes Element der Liste, ob $(Y,a) \in R$.
Ist dies der Fall wird das Element Y in eine neue Liste L geschrieben, sonst nicht. Die Elemente dieser Liste bildet die Menge $R^{-1}[\{x\}]$.
Da $((a_0, \ldots, a_r),x) \notin R^{-1}[\{x\}]$ falls für mindestens ein a_k mit $0 \le k \le r$ gilt $a_k > x_{n-1}$ genügt es die obigen Teilmengen zu betrachten.

3) Zeige: e ist berechenbar
Definiere: B(n) : <==> $e(x_n)$ ist "berechenbar"
3.1) Induktionsanfang: n = 0
Dann gibt es folgende 2 Fälle:
Fall1: $(\emptyset, x_0) \in R$
also $e(x_0) = 1$, also $e(x_0)$ "berechenbar".
Fall2: $R^{-1}[\{x_0\}] = \emptyset$
also $e(x_0) = 0$, also $e(x_0)$ "berechenbar".

3.2) Induktionsvoraussetzung: Es gelte B(0) und .... B(n-1). Zeige B(n), also:$e(x_n)$ berechenbar.
Es gelte: $e(x_0)$ "berechenbar" $\wedge \ldots \wedge$ $e(x_{n-1})$ "berechenbar".
Es gibt folgende Fälle:
Fall1: $(\emptyset, x_n) \in R$
also $e(x_n) = 1$, also $e(x_n)$ "berechenbar".
Fall2: $R^{-1}[\{x_n\}] = \emptyset$
also $e(x_n) = 0$, also $e(x_n)$ "berechenbar".
Fall3: sonst
also $e(x_n) = \sum_{\{x_1 \ldots x_m\} \in R^{-1}[\{x\}]} e(x_1) \cdot \ldots \cdot e(x_m)$
Da $R^{-1}[\{x_n\}]$ "berechenbar" und endlich, kann man alle Elemente davon in eine Liste schreiben.

Es sei $\{a_0, ..., a_r\} \in R^{-1}[\{x_n\}]$. Dann kann man das Produkt $e(a_0) \cdot ... \cdot e(a_r)$ mit Hilfe einer Schleife berechnen. Die Summe $\sum_{\{x_1 ... x_m\} \in R^{-1}[\{x\}]} e(x_1) \cdot ... \cdot e(x_m)$ läßt sich dann ebenfalls mit Hilfe einer Schleife erzeugen.

II)
1) $(\emptyset, x) \in R$
$\Longrightarrow x \in D_1 \Longrightarrow x \in I(R) \Longrightarrow e(x) = 1$

2) $R^{-1}[\{x\}] = \emptyset$
Annahme: $e(x) = 1$
$\Longrightarrow x \in I(R) \Longrightarrow \exists\, k>0\ x \in D_k \Longrightarrow \exists\, Y \subset D_{k-1} \subset I(R)$ mit $(Y,x) \in R \Longrightarrow$
$Y \in R^{-1}[\{x\}]$ Widerspruch

3) sonst, d.h: $R^{-1}[\{x\}] \neq \emptyset$ und $(\emptyset, x) \notin R$
a) Fall1: $e(x) = 1$
$\Longrightarrow x \in I(R) \Longrightarrow \exists\, k>0\ x \in D_k \Longrightarrow \exists\, Y = \{x_1, ..., x_n\} \subset D_{k-1} \subset I(R)$ mit $(Y,x) \in R$
und Y ist endlich wegen der Voraussetzung der Definition der Regelmenge
$\Longrightarrow \{x_1, ..., x_n\} \subset I(R) \Longrightarrow x_1 \in I(R) \wedge ... \wedge x_n \in I(R) \Longrightarrow e(x_1) = 1 \wedge ... \wedge e(x_n) = 1$
$\Longrightarrow e(x_1) \cdot ... \cdot e(x_n) = 1$

b) Fall2: $e(x) = 0$
$\Longrightarrow x \notin I(R)$
Annahme: Rechte Seite = 1, also:
$$\sum_{\{x_1 ... x_m\} \in R^{-1}[\{x\}]} e(x_1) \cdot ... \cdot e(x_m) = 1 \Longrightarrow \exists\, Y=\{x_1, ..., x_n\} \in R^{-1}(x)\ e(x_1) \cdot ... \cdot e(x_n) = 1$$
$\Longrightarrow e(x_1) = 1 \wedge ... \wedge e(x_n) = 1 \Longrightarrow x_1 \in I(R) \wedge ... \wedge x_n \in I(R)$
$\Longrightarrow \exists\, k_1 ... \exists\, k_n\ x_1 \in D_{k1} \wedge ... \wedge x_n \in D_{kn}$
Definiere: $k = \max(k_1, ..., k_n)$
$\Longrightarrow x_1 \in D_k \wedge ... \wedge x_n \in D_k$
$\Longrightarrow \{x_1, ..., x_n\} \subset D_k$
Da $\{x_1, ..., x_n\} \in R^{-1}(\{x\})$, folgt $(\{x_1, ..., x_n\}, x) \in R$
$\Longrightarrow x \in D_{k+1} \subset I(R)$
$\Longrightarrow x \in I(R)$
$\Longrightarrow e(x) = 1$ (Widerspruch)

Bemerkungen zum Beweis:
Der Beweis kann auch mit Hilfe des Kleeneschen Fixpunktsatzes gemacht werden.

3.1.4 RekIndsatz 2

Voraussetzungen:
A und B sind beliebige Mengen.
A* = Menge aller endlichen Folgen von A = $\bigcup_{i \in N \setminus \{0\}} A^i$ und
B* = Menge aller endlichen Folgen von B = $\bigcup_{i \in N \setminus \{0\}} B^i$ und
S sei eine nichtleere Teilmenge ("Startmengen") von A x B, also $S \subset A \times B$

1)
$F = \{ f_1 , ..., f_k \}$ und $G = \{ g_1 , ..., g_k \}$ seien endliche Mengen und $|F| = |G|$ mit
$\varnothing \neq f_i \subset A^* \times A$ ist **nicht notwendig** eine Abbildung, muß also nicht notwendig rechtseindeutig sein.
$\varnothing \neq g_i \subset B^* \times B$ ist **nicht notwendig** eine Abbildung, muß also nicht notwendig rechtseindeutig sein.

2)
$\overline{R}$ (F, G, S) :=
$(M,(a,b)) \mid \exists a_1 \exists b_1, ..., \exists a_r \exists b_r \, \exists i \, \exists r \; M = \{(a_1,b_1), ..., (a_r, b_r)\} \wedge ((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \wedge$
$((b_1, ..., b_r),b) \in g_i \wedge f_i \in F \wedge g_i \in G\} \cup \{ (\varnothing,(a,b)) \mid (a,b) \in S \}$
heißt die durch F, G und S induzierte Regelmenge über A x B
$R_A := \{ (\varnothing,(a,b)) \mid (a,b) \in S \} \neq \varnothing$ (d.h. $I(R) \neq \varnothing$)
$D_1 = \{(a,b) \mid (\varnothing,(a,b)) \in R_A\} = S$

Regelnkurznotation:
$\{(a_1,b_1); ... ; (a_r,b_r)\}$
------------------------- mit $((a_1, ..., a_r),a) \in f_i$ und $((b_1, ..., b_r),b) \in g_i$
(a,b)

$R^i_F = \{ (M,a) \mid \exists a_1, ..., \exists a_r \; M=\{a_1, ..., a_r\}$ und $((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \}$
Kurzform dafür:
$R^i_F := \{ (\{a_1, ..., a_r\},a) \mid ((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \}$ ist die duch f_i induzierte Regelmenge
$R^0_F := \{(\varnothing,x) \mid \exists b \, (\varnothing,(x,b)) \in R\}$
$R_F := \bigcup_{0 \le i \le \{|F|} R^i{}_F \quad \{(\varnothing,x) \mid \exists b \, (\varnothing,(x,b)) \in R\}$
$Z(a) := \{ (a_1, ..., a_r ,i) \mid ((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \}$

3) (wird für die Berechenbarkeit der Abbildung N - siehe unten - gebraucht)
Es ist sinnlso einer Funktion wie
h({ 3, 5, 8}) = { 3+1, 5+1, 8+1}
die Eigenschaft berechenbar bzw. nicht berechenbar zuzuordnen.
Dazu müßte h von der folgenden Form sein (wobei U und V endliche Alphabete sind):
$h : (U^*)^n$ --> V*
Deshalb muß man h einer assoziierte Funktion h zuordnen, die dann auf Wörtern operiert, wie z.B:
$h' : (U^*)^n$ --> V*
h("{3, 5, 8}") = "{4, 6, 9}" und
U = V = { '0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '}', '{', ',' }
Hier wird darauf verzichtet, diese assoziierte Funktion anzugeben.

a)
a1) $f_i \subset P(A^*xA)$ ist entscheidbar für alle $f_i \in F$

a2) $\forall i \le |G|$ ist $g_i[] : P_{fin}(B^*) \dashrightarrow P(B)$ berechenbar mit $|g_i[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ für $\forall b_i \in B$
wobei mit $P_{fin}(B^*)$ die endlichen Teilmengen von B* bezeichnet werden

a3) $S[] : P_{fin1}(A^*) \dashrightarrow P(B)$ ist berechenbar mit $| S[\{a\}] | < 00$ für $\forall a \in A$
wobei $P_{fin1}(A^*)$ die Menge der einelementigen Teilmengen von A* bedeutet.

b)
A ist eine effektiv geordnete Menge (d.h. es gibt einen Algorithmus mit dem man M ordnen kann), also :
$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ mit $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$ und alle a_i sind paarweise verschieden.
und alle $f_i \in F$ sind "kontrahierend", was per Definition bedeuten soll:
$((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \quad ==> \quad a_1 < a \wedge \ldots \wedge a_r < a$

Abkürzungen:
$R := \overline{\overline{R}}(F, G, S)$
$N := I(\overline{\overline{R}}(F, G, S))$

Behauptung:
Wenn $a \in A$, dann gilt:
$$N[\{a\}] = \bigcup_{(x0,...,xr,i) \in Z(a)} g_i[N[\{x_0\}]x...xN[\{x_r\}]] \cup S[\{a\}]$$
und N ist berechenbar

Bemerkung:
1) statt $((x_0, ..., x_r),i) \in Z(a)$ unter dem Vereinigungssymbol $\cup$ schreibt man kürzer:
$((x_0, ..., x_r),a) \in f_i$
also:
$$N[\{a\}] = \bigcup_{(x_0,...,x_r,a) \in f_i} g_i[N[\{x_0\}]x...xN[\{x_r\}]] \cup S[\{a\}]$$
2) $S[\{a\}] = D_1[\{a\}] = \{ b \in B \mid (a,b)) \in D_1 \}$

3) Die Gleichung $N[\{a\}] = \bigcup_{(x0,...,xr_r,i) \in Z(a)} g_i[N[\{x_0\}]x...xN[\{x_r\}]] \cup S[\{a\}]$
gilt auch, wenn die Voraussetzungen, die zur Berechenbarkeit von N nötig sind, nicht gelten. Allerdings ist dann auch N nicht mehr berechenbar.

Beweis:
Teil0)
1) Da A aufzählbar ist, existiert ein Verfahren (Algorithmus) mit dem man die Liste
$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots$ erzeugen kann.
Beweis wird über vollständige Induktion gemacht:
B(n) :<==> N(a_n) berechenbar

2) Unterbehauptung 1:
$Z(a) : = \{ (x_0, \ldots, x_r, i) \mid ((x_0, \ldots, x_r), a) \in f_i \in F \}$
ist berechenbar und $| Z(a) | < 00$

Unterbeweis1:
Da A aufzählbar ist, existiert ein Verfahren mit dem man die Liste
$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots$ erzeugen kann.
Da $a \in A$, gibt es ein n mit $a = a_n$
a) $Z(a) \subset \{(a_1, \ldots, a_r, i) \mid a_1 < a \wedge \ldots \wedge a_r < a \wedge r < n \wedge i \leq |F| \} \subset$
$\{(T,1) \mid T \subset \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}\} \cup \ldots \cup \{(T, |F|) \mid T \subset \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}\}$

b) Wegen a) kann man folgendes Verfahren verwenden, um Z(a) zu bestimmen:
Lege sämtliche Teilmengen Y von $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ in einer Liste ab. Dies ist möglich, da es nur endlich viele Teilmengen von $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ gibt.
Gehe die Liste durch und bestimme für jedes Element der Liste, ob es ein i gibt mit
$(Y,a) \in f_i$. Dies kann man machen, da f_i nach Voraussetzung entscheidbar ist.
Ist dies der Fall wird das Element (Y,i) gebildet und eine neue Liste L geschrieben, sonst nicht. Die Elemente dieser Liste bildet die Menge Z(a).

3) Unterbehauptung 2:
$N[\{a\}]$ endliche Menge (kurz: $| N[\{a_n\}] | < 00$)
Definiere: $| N[\{a_n\}] | < 00 \quad : \Longleftrightarrow B(n)$

3.1) Induktionsanfang: n = 0
$$N[\{a_0\}] = \bigcup_{(x0,\ldots,xr_r,i) \in Z(a0)} g_i[N[\{x_0\}] x \ldots x N[\{x_r\}]] \ \cup \ S[\{a_0\}] \ = S[\{a_0\}] \ < 00$$
3.2) Induktionsvoraussetzung: Es gelte B(0) und .... B(n-1). Zeige B(n)
Es gelte: $| N[\{a_0\}] | < 00 \wedge \ldots \wedge | N[\{a_{n-1}\}] | < 00$, also
$| N[\{a_0\}] \ x \ldots \ x \ N[\{a_{n-1}\}] | < 00$
Da $\forall (b_1, \ldots, b_r) \in B^* \ |g_i[\{(b_1, \ldots, b_r)\}] | < 00$ und $| Z(a) | < 00$ und $| S[\{a\}] | < 00$
folgt die Behauptung

4) Zeige: N ist berechenbar
Definiere: $B(n) : \Longleftrightarrow N[\{a_n\}]$ ist "berechenbar"
4.1) Induktionsanfang: n = 0
$N[\{a_0\}] = S[\{a_0\}]$ ist berechenbar, da $\forall a \in A \ S[\{a\}]$ berechenbar.
4.2) Induktionsvoraussetzung: Es gelte B(0) und .... B(n-1). Zeige B(n), also: N(a_n) berechenbar.
Es gelte: $N[\{a_0\}]$ berechenbar $\wedge \ldots \wedge$ $N[\{a_{n-1}\}]$ berechenbar.
Da Z(a) berechenbar und endlich, kann man alle Elemente von Z(a) in eine Liste schreiben.
Es sei $(x_0, \ldots, x_r, i) \in Z(a)$
Da nach Induktionsvoraussetzung $N[\{x_0\}], \ldots, N[\{x_r\}]$ endliche, berechenbare Mengen sind, kann man das kartesische Produkt $N[\{x_0\}] \ x \ldots \ x \ N[\{x_r\}]$ in eine Liste schreiben

Da g_j berechenbar und endlich ist, kann man $g_i[N[\{x_0\}]\ \text{x} \ldots \text{x}\ N[\{x_r\}]]$ in eine Liste schreiben.
Die Vereinigung $\bigcup\limits_{(x0,\ldots,xr_r,i)\in Z(a0)} g_i[N[\{x_0\}]x\ldots xN[\{x_r\}]]$ kann man erzeugen, indem man die Elemente dieser endlich vielen Listen erst hintereinander schreibt und dann doppelte Einträge löscht.
Die Vereinigung $\bigcup\limits_{(x0,\ldots,xr_r,i)\in Z(a0)} g_i[N[\{x_0\}]x\ldots xN[\{x_r\}]] \cup S[\{a\}]$
kann man erzeugen, indem man die Elemente beider Listen erst hintereinander schreibt und dann doppelte Einträge löscht.

Teil1) "==>"
Es sei $y \in N[\{a\}]$, also:
$(a,y) \in I(R)$ ==> Korollar K4 (Induktionspfad):
$\exists\ T \subset I(R) \wedge (T,(a,y)) \in R$ ==>

Fall1: $T = \emptyset$
$(\emptyset,(a,y)) \in R$ ==> $y\in D_1[\{a\}]$

Fall2: $T \neq \emptyset$
$\exists a_1\exists y_1, \ldots, \exists a_r\exists y_r\ \exists i\ \exists r\ \ T = \{(a_1,y_1), \ldots, (a_r, y_r)\} \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$((y_1, \ldots, y_r),y)\in g_i \wedge r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists a_1\exists y_1, \ldots, \exists a_r\exists y_r\ \exists i\ \exists r\ \ \{(a_1,y_1), \ldots, (a_r, y_r)\} \subset I(R) \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$y\in g_i[\{(y_1, \ldots, y_r)\}] \wedge r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists a_1\exists y_1, \ldots, \exists a_r\exists y_r\ \exists i\ \exists r\ \ (a_1,y_1)\in I(R) \wedge \ldots \wedge (a_r, y_r)\in I(R) \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$y\in g_i[\{(y_1, \ldots, y_r)\}] \wedge r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists a_1\exists y_1, \ldots, \exists a_r\exists y_r\ \exists i\ \exists r\ \ y_1\in N[\{a_1\}] \wedge \ldots \wedge y_r\in N[\{a_r\}] \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$y\in g_i[\{(y_1, \ldots, y_r)\}] \wedge r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists a_1\exists y_1, \ldots, \exists a_r\exists y_r\ \exists i\ \exists r\ \ (y_1, \ldots, y_r)\in N[\{a_1\}]\ \text{x} \ldots \text{x}\ N[\{a_r\}] \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$y\in g_i[\{(y_1, \ldots, y_r)\}] \wedge r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists a_1\exists y_1, \ldots, \exists a_r\exists y_r\ \exists i\ \exists r\ \ \{(y_1, \ldots, y_r)\}\subset N[\{a_1\}]\ \text{x} \ldots \text{x}\ N[\{a_r\}] \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$y\in g_i[\{(y_1, \ldots, y_r)\}] \wedge r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==> (Lemma L1)
$\exists a_1\exists y_1, \ldots, \exists a_r\exists y_r\ \exists i\ \exists r\ g_i[\{(y_1, \ldots, y_r)\}] \subset g_i[N[\{a_1\}]\ \text{x} \ldots \text{x}\ N[\{a_r\}]] \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$y\in g_i[\{(y_1, \ldots, y_r)\}] \wedge r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists a_1\exists y_1, \ldots, \exists a_r\exists y_r\ \exists i\ \exists r\ y\in g_i[N[\{a_1\}]\ \text{x} \ldots \text{x}\ N[\{a_r\}]] \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists a_1, \ldots, \exists a_r\ \exists i\ \exists r\ y\in g_i[N[\{a_1\}]\ \text{x} \ldots \text{x}\ N[\{a_r\}]] \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists(a_1, \ldots, a_r ,i)\ y\in g_i[N[\{a_1\}]\ \text{x} \ldots \text{x}\ N[\{a_r\}]] \wedge ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge$
$r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists(a_1, \ldots, a_r ,i)\ ((a_1, \ldots, a_r),a)\in f_i \wedge y\in g_i[N[\{a_1\}]\ \text{x} \ldots \text{x}\ N[\{a_r\}]] \wedge$
$r\in N\backslash\{0\} \wedge i \leq |G|$ ==>
$\exists(a_1, \ldots, a_r ,i)\ (a_1, \ldots, a_r ,i)\in Z(a) \wedge y\in g_i[N[\{a_1\}]\ \text{x} \ldots \text{x}\ N[\{a_r\}]]$
==> $y \in$ Rechte Seite

Teil2: "<=="

$y \in \bigcup_{(a_1,\ldots,a_r,i)\in Z(a)} g_i[N[\{a_1\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] \cup D_1[\{a\}]$

I)

Fall1: $y \in D_1[\{a\}]$

$\Longrightarrow (a,y) \in D_1 \subset I(R) \Longrightarrow (a,y) \in I(R) \Longrightarrow y \in N[\{a\}]$

II) Fall2: $y \in \bigcup_{(a_1,\ldots,a_r,i)\in Z(a)} g_i[N[\{a_1\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] \Longrightarrow$

$\exists(a_1, \ldots, a_r, i)\ (a_1, \ldots, a_r, i) \in Z(a) \ \wedge\ y \in g_i[N[\{a_1\}] \text{ x } \ldots \text{ x } N[\{a_r\}]] \Longrightarrow$

$\exists i \leq |G|\ \exists r \in |N \backslash \{0\}\ \exists(a_1, \ldots, a_r, i)\ ((a_1, \ldots, a_r),a) \in f_i \ \wedge\ y \in g_i[N[\{a_1\}] \text{ x } \ldots \text{ x } N[\{a_r\}]] \Longrightarrow$

$\exists i \leq |G|\ \exists r \in |N \backslash \{0\}\ \exists(a_1, \ldots, a_r)\ ((a_1, \ldots, a_r),a) \in f_i \ \wedge \exists\ (y_1, \ldots, y_r)$
$(y_1, \ldots, y_r) \in N[\{a_1\}] \text{ x } \ldots \text{ x } N[\{a_r\}] \wedge ((y_1, \ldots, y_r),y) \in g_i \Longrightarrow$

$\exists i \leq |G|\ \exists r \in |N \backslash \{0\}\ \exists(a_1, \ldots, a_r)\ ((a_1, \ldots, a_r),a) \in f_i \ \wedge \exists\ (y_1, \ldots, y_r)$
$y_1 \in N[\{a_1\}) \wedge \ldots \wedge y_r \in N[\{a_r\}] \ \wedge ((y_1, \ldots, y_r),y) \in g_i \Longrightarrow$

$\exists i \leq |G|\ \exists r \in |N\ \exists(a_1, \ldots, a_r)\ ((a_1, \ldots, a_r),a) \in f_i \wedge \exists(y_1, \ldots, y_r)$
$(a_1,y_1) \in I(R) \wedge \ldots \wedge (a_r,y_r) \in I(R) \wedge ((y_1, \ldots, y_r),y) \in g_i \Longrightarrow$

$\exists i \leq |G|\ \exists r \in |N\ \exists(a_1, \ldots, a_r)\ ((a_1, \ldots, a_r),a) \in f_i \wedge \exists(y_1, \ldots, y_r)\ \exists k$
$(a_1,y_1) \in D_k \wedge \ldots \wedge (a_1,y_1) \in D_k \wedge ((y_1, \ldots, y_r),y) \in g_i \Longrightarrow$

$\exists i \leq |G|\ \exists r \in |N\ \exists(a_1, \ldots, a_r)\ ((a_1, \ldots, a_r),a) \in f_i \wedge \exists(y_1, \ldots, y_r)\ \exists k$
$\{(a_1,y_1), \ldots, (a_r,y_r)\} \subset D_k \ \wedge ((y_1, \ldots, y_r),y) \in g_i \Longrightarrow$

$\exists i \leq |G|\ \exists r \in |N\ \exists(a_1, \ldots, a_r)\ ((a_1, \ldots, a_r),a) \in f_i \wedge \exists(y_1, \ldots, y_r)\ \exists k$
$\{(a_1,y_1), \ldots, (a_r,y_r)\} \subset D_k \ \wedge (\{(a_1,y_1), \ldots, (a_r,y_r)\},(a,y)) \in R \wedge\ ((y_1, \ldots, y_r),y) \in g_i \Longrightarrow$

$\exists i \leq |G|\ \exists r \in |N\ \exists(a_1, \ldots, a_r)\ ((a_1, \ldots, a_r),a) \in f_i \wedge \exists(y_1, \ldots, y_r)\ \exists k$
$(a,y) \in D_{k+1} \ \wedge\ ((y_1, \ldots, y_r),y) \in g_i \Longrightarrow$

$\exists i \leq |G|\ \exists r \in |N\ \exists(a_1, \ldots, a_r)\ ((a_1, \ldots, a_r),a) \in f_i \wedge \exists(y_1, \ldots, y_r)\ \exists k$
$(a,y) \in I(R) \ \wedge\ ((y_1, \ldots, y_r),y) \in g_i \Longrightarrow$

$(a,y) \in I(R) \Longrightarrow y \in N[\{a\}]$

3.1.4.1 Beispiel

A = Menge der ganzen Zahlen
B = Menge der ganzen Zahlen

$f_1 = \{ (a, a+2) \mid a \in A \}$
$g_1 = \{ (b, b+2) \mid b \in B \}$

Regelnkurznotation: ($a \in A$, $b \in B$)
$\varnothing$

(2 , 2)

{(a, b) }

(a+2 , b+2)

I(R) = {(2,2), (4,4), (6,6), (8,8), ...}

N[{2}] = {2}
N[{4}] = g(N[{2}]) = {4}
N[{6}] = g(N[{4}]) = {6}

Man sieht sofort:
wenn z ungerade, dann N(z) = $\varnothing$
Bei der Berechnung kommt man aber in eine unendliche Rekursion:
N[{3}] = g(N[{1}]) = g(N[{-1}]) = g(N[{-3}]) = g(N[{-5}]) = ...

3.1.4.2 Definition

$F = \{ f_1 , ..., f_k \}$ F heißt disjunkt zerlegbar : $\Longleftrightarrow$
F ist eine parweises disjunktes Mengensystem d.h.
alle f_i sind paarweise disjunkt d.h: $i \neq j \Longrightarrow f_i \cap f_j = \emptyset$

anschaulich: alle f_i haben keinen gemeinsamen "Schnittpunkt"

3.1.4.3 Lemma L3

$(a,b) \in I(R) \Longrightarrow a \in I(R_F)$

Beweis: Induktion über I(R)
Definiere:
$B(a,b) :\Longleftrightarrow (a,b) \in I(R) \Longrightarrow a \in I(R_F)$

1) $(a,b) \in I(R) \wedge (\emptyset,(a,b)) \in R$
also: $a \in R_F$

2) sonst: (Induktionsvoraussetzung)
Es sei $(a_1,b_1) \in I(R) \wedge ... \wedge (a_r,b_r) \in I(R)$ und
$B(a_1,b_1) \wedge ... \wedge B(a_r, b_r)$ und
$(\{(a_1,b_1), ..., (a_r, b_r)\},(a,b)) \in R$
also:
$(a_1,b_1) \in I(R)$ und ... und $(a_r,b_r) \in I(R)$ und
$(a_1,b_1) \in I(R) \Longrightarrow a_1 \in I(R_F)$ und ... und $(a_r,b_r) \in I(R) \Longrightarrow a_r \in I(R_F)$ und
$\exists i \, ((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \quad \wedge \quad ((b_1, ..., b_r),b) \in g_i$
also:
$a_1 \in I(R_F)$ und ... und $a_r \in I(R_F)$
also:
$(\{a_1, ..., a_r\},a)) \in f_i$ und $a_1 \in I(R_F)$ und ... und $a_r \in I(R_F)$
also
$(\{a_1, ..., a_r\},a)) \in R_F$ und $a_1 \in I(R_F)$ und ... und $a_r \in I(R_F)$
also:
$a \in I(R_F)$

3.1.4.4 Lemma L4

Voraussetzungen:
R_F ist die durch R (und F) induzierte Regelmenge und
F ist disjunkt zerlegbar und
$I(R_F)$ ist monotektonisch

Behauptung:
$a \in I(R_F) \wedge (\emptyset,a) \notin R_F$ ==> $| Z(a) | = 1$

Beweis:
Es sei: $a \in I(R_F)$ und $(\emptyset,a) \notin R_F$
Da $I(R_F)$ monotektonisch, gilt:
$\exists$ genau ein $r \in N \setminus \{0\}$ $\exists$ genau ein $M=\{a_1, ..., a_r\} \subset I(R)$ $(\{a_1, ..., a_r\},a) \in R_F$ also
$\exists$ genau ein $r \in N \setminus \{0\}$ $\exists$ genau ein $M=\{a_1, ..., a_r\} \subset I(R)$ $\exists$ ein i $((a_1, ..., a_r),a) \in f_i$
Da alle f_i paarweise disjunkt sind, folgt:
$\exists$ genau ein $r \in N \setminus \{0\}$ $\exists$ genau ein $M=\{a_1, ..., a_r\} \subset I(R)$ $\exists$ genau ein i $((a_1, ..., a_r),a) \in f_i$
also:
$| Z(a) | = 1$

3.1.4.5 Lemma L5

1) $a \notin I(R_F)$ ==> $N[\{a\}] = \emptyset$
2) $(\emptyset,a) \notin R_F$ ==> $S[\{a\}] = \emptyset$
3) $a \in I(R_F)$ ==> $S[\{a\}] \neq \emptyset$

Beweis:
1) $N[\{a\}] \neq \emptyset$ ==> $\exists b (a,b) \in I(R)$ ==> Lemma3 ==> $a \in I(R_F)$
2) $D_1[\{a\}] \neq \emptyset$ ==> $\exists b\ (a,b) \in D_1$ ==> $(\emptyset,(a,b)) \in R$ ==> $(\emptyset,a) \in R_F$
3) zeige: $a \in I(R_F)$ ==> $N[\{a\}] \neq \emptyset$
es sei a) Fall1: $(\emptyset,a) \in R_F$
also existiert ein b mit $(\emptyset,(a,b)) \in R$ also $(a,b) \in I(R)$, also $N[\{a\}] \neq \emptyset$

3.1.5 Lemma L6

R ist eine Regelmenge über X und X = I(R). Dann gilt:
R ist linkseindeutig und rechtstotal bzgl. I(R) ==> I(R) ist monotektonisch

besser formuliert:
Die Relation (P(X), R, I(R)) ist linkseindeutig und rechtstotal ==> I(R) ist monotektonisch

Beweis:
R ist linkseindeutig und rechtstotal bzgl. X ==>
$\forall x \in X$ $\exists$ genau ein $M \subset X$ $(M,x) \in R$ ==>
$\forall x \in I(R)$ $\exists$ genau ein $M \subset I(R)$ $(M,x) \in R$ ==>
I(R) ist monotektonisch

3.1.5.1 Lemma L8

Voraussetzungen:
R ist eine Regelmenge über X.
Die zweistellige Relation (P(A), R , A) ist linkseindeutig

Behauptung:
I(R) ist monotektonisch

Beweis:
zeige: $\forall x \in I(R)$ $\exists$ genau ein $M \subset I(R)$ $(M,x) \in R$

Es sei $a \in I(R)$
nach Korrolar4 gilt: $\exists$ $T \subset I(R)$ mit $(T,x) \in R$
Da R linkseindeutig ist, gibt es genau ein T mit $(T,x) \in R$

3.1.6 Vorbereitungen zum RekIndsatz 3 Version 1

Voraussetzungen: wie beim 2. RekIndsatz
Zusätzlich gelten noch folgende Voraussetzungen:
$| N[\{a\}] | <= 1$
$B' := B \cup \{\#\}$, wobei $\# \notin B$

$g'_i(b_1, ..., b_r) := b$, falls $g_i[\{b_1\} x ..., x \{b_r\}] = \{b\}$ und alle $b_i \neq \#$
$g'_i(b_1, ..., b_r) := \#$, falls $g_i[\{b_1\} x ..., x \{b_r\}] = \emptyset$ und alle $b_i \neq \#$
$g'_i(b_1, ..., b_r) := \#$, falls mindestens ein $b_i = \#$

$$\sum_{(a_1,...,a_r) \in R^i_F(a)} g'_i\,(n(a_1),..., n(a_r)) = \#, \text{ falls } R^i_F(a) = \emptyset$$

$b_1 + ... + b_r$: = erste b_k mit $b_k \neq \#$ falls mindestens ein $b_i \neq \#$
$b_1 + ... + b_r$: = # falls alle $b_i = \#$

$S'(a) := b$, falls $S[\{a\}] = \{b\}$
$S'(a) := \#$, falls $S[\{a\}] = \emptyset$

$n(a) := \#$, falls $N[\{a\}] = \emptyset$
$n(a) := b$. falls $N[\{a\}] = \{b\}$

Wenn man die auf D('g_i) eingeschränkte Relation g_i hier - etwas ungenau und genaugenommen falsch - auch mit g_i bezeichnet, dann kann man schreiben:

$g'_i(b_1, ..., b_r) := g_i((b_1, ..., , b_r))$ falls $(b_1, ..., , b_r) \in D(g_i)$ und alle $b_i \neq \#$
$g'_i(b_1, ..., b_r) := \#$ falls $(b_1, ..., , b_r) \notin D(g_i)$ und alle $b_i \neq \#$
$g'_i(b_1, ..., b_r) := \#$ falls mindestens ein $b_i = \#$

3.1.6.1 Hilflemma 1

1)
$g_i(N[\{a_1\}] \text{ x ...x } N[\{a_r\}] = \emptyset$ ==> $g'_i(n(a_1), ...n(a_r)) = \#$

2)
$I(R_F)$ ist monotektonisch und F ist disjunkt zerlegbar ==>
$N[\{a\}] \neq \emptyset$ ==>
Fall1: $S[\{a\}] = \emptyset$
Es existiert genau ein (i, $\{a_1, ... ,a_r\}$) mit $\{a_1, ... ,a_r\} \in R^i_F$ und $g_i(N[\{a_1\}] \text{ x ...x } N[\{a_r\}] \neq \emptyset$
und für alle (j, $\{x_1, ... ,x_r\}$) $\neq$ (i, $\{a_1, ... ,a_r\}$) gilt $g_j(N[\{x_1\}] \text{ x ...x } N[\{x_r\}] = \emptyset$
oder
Fall2: $S[\{a\}] \neq \emptyset$
Für alle (i, $\{a_1, ... ,a_r\}$) mit $\{a_1, ... ,a_r\} \in R^i_F$ gilt $g_j(N[\{x_1\}] \text{ x ...x } N[\{x_r\}] = \emptyset$

Beweis:
1)
Fall1: mindestens ein $N[\{a_j\}] = \varnothing$
also $n(a_j) = \#$, also $g'_i(n(a_1), \dots ,n(a_r)) = \#$
Fall2: alle $N[\{a_j\}] \neq \varnothing$
$g_i(N[\{a_1\}] \text{ x } \dots \text{x } N[\{a_r\}] = g_i(\{n(a_1)\} \text{x } \dots \text{x} \{n(a_r)\}) = \varnothing$ also
$g'_i(n(a_1), \dots .n(a_r)) = \#$
2)
2.1) Unterbehauptung1:
$R_F := \bigcup_{0 \leq i \leq \{|F|} R^i{}_F$ ist eine disjunkte Vereinigung
Unterbeweis1:
Zeige: $i \neq j \implies R^i{}_F \cap R^j{}_F = \varnothing$
Es sei $(\{a_1, \dots, a_r\},a) \in R^i{}_F$
also existiert ein i mit $((a_1, \dots, a_r\},a) \in f_i$
Da F disjunkt zerlegbar gilt $((a_1, \dots, a_r\},a) \notin f_j$ also $(\{a_1, \dots, a_r\},a) \notin R^j{}_F$
also $R^i{}_F \cap R^j{}_F = \varnothing$

2.2)
Da $N[\{a\}] \neq \varnothing$ folgt $a \in I(R_F)$
Da $I(R_F)$ monotektonisch, gibt es genau ein $(M,a) \in R_F$ mit $M \subset I(R_F)$
Da $R_F := \bigcup_{0 \leq i \leq \{|F|} R^i{}_F$ eine disjunkte Vereinigung ist, gibt es genau ein i mit $M \in R^i{}_F$
Also gibt es genau ein (i, M) mit $M \in R^i{}_F$ und $M \subset I(R_F)$
Für alle anderen $(j, R) \neq (i, M)$ mit $M \in R^j{}_F$ gilt: nicht $M \subset I(R_F)$

Fall1: $(\varnothing,a) \notin R^0{}_F$
Also gibt es genau ein $(i, \{a_1, \dots ,a_r\})$ mit
$\{a_1, \dots ,a_r\} \in R^i{}_F$ und $a_1 \in I(R_F)$ und ... und $a_r \in I(R_F)$.
Für alle anderen $(j, \{x_1, \dots ,x_r\}) \neq (i, \{a_1, \dots ,a_r\})$ mit $\{x_1, \dots ,x_r\} \in R^j{}_F$ gilt:
es gibt ein x_k mit $x_k \notin I(R_F)$ also $g_j(N[\{x_1\}] \text{ x } \dots \text{x } N[\{x_r\}] = \varnothing$
und $S[\{a\}] = \varnothing$
also $g_i(N[\{a_1\}] \text{ x } \dots \text{x } N[\{a_r\}] \neq \varnothing$

Fall2: $(\varnothing,a) \in R^0{}_F$
Für alle $(i, \{a_1, \dots ,a_r\})$ mit $\{a_1, \dots ,a_r\} \in R^i{}_F$ gilt $g_i(N[\{a_1\}] \text{ x } \dots \text{x } N[\{a_r\}] = \varnothing$
und $S[\{a\}] \neq \varnothing$

3.1.7 RekIndsatz 3 Version 1

Voraussetzungen: wie beim 2. RekIndsatz
Zusätzlich gelten noch folgende Voraussetzungen:
1) R_F ist die durch R (und F) induzierte Regelmenge
2) $I(R_F)$ ist monotektonisch oder
die zweistellige Relation (P(A), R_F , A) ist linkseindeutig
3) F ist disjunkt zerlegbar.
4) $\forall i \le |G| \quad | g_i([\{(b_1, ..., b_r)\}]) | \le 1$ für alle $b_i \in B$
5) $| S([\{a\}]) | \le 1$ für alle $a \in A$

Behauptung:
Wenn $a \in A$, dann gilt:

$$n(a) = \sum_{(a_1,...,a_r,a)\in f_i} g'_i\,(n(a_1),..., n(a_r)) + S'(a)$$

wobei per Definition gilt:

$$\sum_{(a_1,...,a_r,a)\in f_i} g'_i\,(n(a_1),..., n(a_r)) = \# \quad \text{falls es kein } (a_1, ... ,a_r),i \text{ gibt mit } ((a_1, ... ,a_r),a)\in f_i$$

und
$S'(a) := b$, falls $S[\{a\}] = \{b\}$
$S'(a) := \#$, falls $S[\{a\}] = \emptyset$
$g'_i(b_1, ...,b_r) := g_i((b_1,..., , b_r))$ falls $(b_1,..., , b_r)\in D(g_i)$ und alle $b_i \ne \#$
$g'_i(b_1, ...,b_r) := \#$ falls $(b_1,..., , b_r) \notin D(g_i)$ und alle $b_i \ne \#$
$g'_i(b_1, ...,b_r) := \#$ falls mindestens ein $b_i = \#$

Bemerkung:
Nach Lemma 8 folgt aus der Voraussetzung "die zweistellige Relation (P(A), R_F , A) ist linkseindeutig" sofort " $I(R_F)$ ist monotektonisch".

Beweis: (Regelinduktion)
I) Zeige: $| N[\{a\}] | <= 1$
Fall1: $a \in I(R_F)$
Da $I(R_F)$ monotektonisch und F disjunkt zerlegbar, existiert genau ein M und genau ein i mit $(M,a)\in R^i_F$ und $M \subset I(R_F)$

Unterfall1: i = 0
also $(M,a) \in R^0_F$ also $M = \emptyset$ und $S[\{a\}] \ne \emptyset$ mit $| S([\{a\}]) | \le 1$
Für alle anderen $(\{a_1, ..., a_r\},a) \in R^k_F$ mit $k \ne i$ gilt :
für mindestens ein a_j gilt $a_j \notin I(R_F)$ also $N(a_j) = \emptyset$ also
$g_i(N[\{a_1\}] \times ... \times N[\{a_r\}] = \emptyset$
Also:
$N[\{a\}] = S[\{a\}]$
also: $| N[\{a\}] | = | S[\{a\}] | \le 1$

Unterfall2: $i > 0$
also $(\{a_1, ..., a_r\},a) \in R^i_F$
mit $a_1 \in I(R_F)$ und ... und $a_r \in I(R_F)$
Wegen der Induktionsvoraussetzungen gilt noch:

$| N[\{a_1\}] | <= 1$ und ... und $| N[\{a_r\}] | <= 1$
Wenn mindestens ein $| N[\{a_j\}] | = 0$ dann gilt:
$g_i[N[\{a_1\}]$ x ...x $N[\{a_r\}] = \varnothing$
Wenn alle $| N[\{a_j\}] | = 0$ dann gilt:
$\{b_1\} := | N[\{a_1\}] |$ und ... und $\{b_r\} := N[\{a_r\}]$
also
$g_i(N[\{a_1\}]$ x ...x $N[\{a_r\}] = g_i(\{b_1\}$ x ...x $\{b_r\}) = g_i(\{(b_1, ... ,b_r\})$
also nach Voraussetzung: $| g_i(\{(b_1, ... ,b_r\}) | <= 1$
- Für alle anderen $(\{a_1, ..., a_r\},a) \in R^k_F$ mit $k \neq i$ und $k \neq 1$ gilt :
für mindestens ein a_j gilt $a_j \notin I(R_F)$ also $N(a_j) = \varnothing$ also
$g_i(N[\{a_1\}]$ x ...x $N[\{a_r\}] = \varnothing$
- für $(\varnothing,a) \notin R^0_F$ gilt $S[\{a\}] = \varnothing$
Fall2: $a \notin I(R_F)$
mit Lemma 5 folgt $N[\{a\}] = \varnothing$
also $| N[\{a\}] | <= 1$

II)
1) Unterbehauptung1:
$g_i[N[\{a_1\}]$ x ...x $N[\{a_r\}] = \{b\}$ ==> $g'_i(n(a_1), ...n(a_r)) = b$ und
$g_i[N[\{a_1\}]$ x ...x $N[\{a_r\}] = \varnothing$ ==> $g'_i(n(a_1), ...n(a_r)) = \#$

Unterbeweis1:
a)
$g_i[N[\{a_1\}]$ x ...x $N[\{a_r\}]] = \{b\}$ also alle $N[\{a_j\}] \neq \varnothing$ also $N[\{a_j\}] = \{n(a_j)\}$ also
$g_i[N[\{a_1\}]$ x ...x $N[\{a_r\}]] = g_i[\{n(a_1)\}$ x ...x $\{n(a_1)\}] = \{b\}$ also
$g'_i(n(a_1), ...n(a_r)) = b$
b)
folgt nach Hilfslemma1

2) Unterbehauptung2:
$$\bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] \cup S[\{a\}] = \{b\} \Longrightarrow$$
$$\sum_{(a_1,\ldots,a_r)\in R^i_F(a)} g'_i(n(a_1),\ldots,n(a_r)) + S'(a) = b \text{ und}$$
$$\bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] \cup S[\{a\}] = \varnothing \Longrightarrow$$
$$\sum_{(a_1,\ldots,a_r)\in R^i_F(a)} g'_i(n(a_1),\ldots,n(a_r)) + S'(a) = \#$$

Unterbeweis2:
a)
$$\bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] \cup S[\{a\}] = \{b\}$$

Fall1: $R^i_F = \varnothing$
also $\bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] = \varnothing$ also $S[\{a\}] = \{b\}$ also
$$\sum_{(a_1,\ldots,a_r)\in R^i_F(a)} g'_i(n(a_1),\ldots,n(a_r)) + S'(a) = \# + b = b$$

Fall2: $R^i_F \neq \emptyset$

Da $N[\{a\}] = \bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] \;\cup\; S[\{a\}] = \{b\}$ folgt

$N[\{a\}] \neq \emptyset$

Nach Hilfslemma1_2 gilt:

Unterfall1: $S[\{a\}] \neq \emptyset$

also

$$\bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] = \emptyset \text{ und } S[\{a\}] = \{b\}$$

Mit Hilfslemma1_1 gilt:

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_r)\in R^i_F(a)} g'_i\,(n(a_1),\ldots, n(a_r)) + S'(a) = \# + b = b$$

Unterfall2: $S[\{a\}] = \emptyset$

$$\bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] = \{b\} \text{ und } S[\{a\}] = \{b\}$$

also existiert genau ein (i, $\{a_1, \ldots ,a_r\}$) mit $\{a_1, \ldots ,a_r\} \in R^i_F$ und $g_i(N[\{a_1\}]$ x ...x $N[\{a_r\}] = \{b\}$ und für alle (j, $\{x_1, \ldots ,x_r\}$) $\neq$ (i, $\{a_1, \ldots ,a_r\}$) gilt $g_j(N[\{x_1\}]$ x ...x $N[\{x_r\}] = \emptyset$, also $g'_j(n(a_0), \ldots n(a_r)) = \#$ und $g'_i(n(a_1), \ldots n(a_r)) = b$ also

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_r)\in R^i_F(a)} g'_i\,(n(a_1),\ldots, n(a_r)) + S'(a) = b + \# = b$$

b)

Fall1: $R^i_F = \emptyset$

also $\bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] = \emptyset$ also $S[\{a\}] = \emptyset$ also

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_r)\in R^i_F(a)} g'_i\,(n(a_1),\ldots, n(a_r)) + S'(a) = \# + \# = \#$$

Fall2: $R^i_F \neq \emptyset$

Da $N[\{a\}] = \bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] \;\cup\; S[\{a\}] = \emptyset$ folgt

$$\bigcup_{\{a_0,\ldots,a_r\}\in R^i_F(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\ldots xN[\{a_r\}]] = \emptyset \text{ und } S[\{a\}] = \emptyset \text{ also}$$

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_r)\in R^i_F(a)} g'_i\,(n(a_1),\ldots, n(a_r)) + S'(a) = \# + \# = \#$$

3) Unterbehauptung3:

$$n(a) = \sum_{(a_1,\dots,a_r)\in R_F^i(a)} g'_i\,(n(a_1),\dots,n(a_r)) + S'(a)$$

Unterbeweis5:

a)

$$N[\{a\}] == \{b\} \ \text{ impl } \bigcup_{\{a_0,\dots,a_r\}\in R_F^i(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\dots xN[\{a_r\}]] \cup S[\{a\}] = \{b\} \ \text{ impl}$$

$$\sum_{(a_1,\dots,a_r)\in R_F^i(a)} g'_i\,(n(a_1),\dots,n(a_r)) + S'(a) = b \ \text{ und } b = n(a) \ \text{ impl}$$

$$n(a) = \sum_{(a_1,\dots,a_r)\in R_F^i(a)} g'_i\,(n(a_1),\dots,n(a_r)) + S'(a)$$

b)

$$N[\{a\}] == \varnothing \ \text{ impl } \bigcup_{\{a_0,\dots,a_r\}\in R_F^i(a)} g_i[N[\{a_0\}]x\dots xN[\{a_r\}]] \cup S[\{a\}] = \varnothing \ \text{ impl}$$

$$\sum_{(a_1,\dots,a_r)\in R_F^i(a)} g'_i\,(n(a_1),\dots,n(a_r)) + S'(a) = \# \ \text{ und } n(a) = \# \ \text{ impl}$$

$$n(a) = \sum_{(a_1,\dots,a_r)\in R_F^i(a)} g'_i\,(n(a_1),\dots,n(a_r)) + S'(a)$$

3.1.7.1 Erweiterung der Definitionsbereiche

Motivation
In der Mathematik gibt es Funktionen, die nicht überall definiert sind und einen eingeschränkten Definitionsbereich haben, wie z.B. die Divisions - und die Wurzelfunktion.
Die Idee ist, diesen Definitionsbereich maximal zu erweitern:

$d'(x,y) := d(x,y)$	falls $(x,y) \in D(d)$
$d'(x,y) := ?$	falls $(x,y) \notin D(d)$

Zusätzlich wird noch die Menge der reellen Zahlen $|R$ zu $|R' := R \cup \{?\}$ erweitert mit:

$d'(x,y) := ?$	falls $x=?$ oder $y=?$

Ziel:
Mit der Funktion N kann durch eine mit f_i 's und g_i 's aufgebaute Regelmenge R festellen, ob
- zu einem a kein b gehört mit $(a,b) \in R$
- zu einem a ein b gehört mit $(a,b) \in R$

Ziel ist es, zusätzlich noch festzustellen, ob ein a mathematisch sinnlos ist. d.h:
Eine Funktion zu finden mit:

$n'(a) = \#$	falls a fehlgeformt (kein Term)
$n'(a) = ?$	falls a mathematisch sinnlos
$n'(a) = \text{Wert}$	falls a mathematisch sinnvoll.

Vorbereitung:
gegeben:
'R sei die durch 'F, 'G und 'S induzierte Regelmenge über 'A x 'B
mit: (D bedeutet Definitionsbereich einer Abbildung)
$D('f_i) : = \{(a_1, ..., a_r) \mid$ es existiert ein a mit $((a_1, ..., a_r),a) \in 'f_i \} = pr_1['f_i]$
$D('g_i) : = \{(b_1, ..., b_r) \mid$ es existiert ein b mit $((b_1, ..., b_r),b) \in 'g_i \} = pr_1['g_i]$

Daraus wird wie folgt die durch F, G und S induzierte Regelmenge über A x B konstruiert mit folgenden Eigenschaften:
$A : = 'A$
$B := 'B \cup \{?\}$
$S := 'S$

Für jedes $(x_1, ..., x_r) \in D('f_i)$ wird definiert $((x_1, ..., x_r),x) \in f_i \; :\Longleftrightarrow \; ((x_1, ..., x_r),x) \in 'f_i$
Für jedes $(x_1, ..., x_r) \notin D('f_i)$ gibt es genau ein x mit $((x_1, ..., x_r), x) \in f_i$

Wenn man die auf $D('g_i)$ eingschränkte Relation $'g_i$ hier - etwas ungenau und genaugenommen falsch - auch mit $'g_i$ bezeichnet, dann kann man schreiben:

$g_i((y_1, ..., y_r)) := \; 'g_i((y_1, ..., y_r))$	falls alle $y_i \neq ?$ und $(y_1, ..., y_r) \in D('g_i)$
$g_i((y_1, ..., y_r)) := \; ?$	falls alle $y_i \neq ?$ und $(y_1, ..., y_r) \notin D('g_i)$
$g_i((y_1, ...,y_r)) = ?$	falls mindestens ein $y_i = ?$

3.1.7.1.1 Beispiel ohne Erweiterung

A = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; (;) ; + ; - ; * ; / ; ÷ ; / ; .}*
|Q = Menge der rationalen Zahlen $\subset$ B
Eine rationale Zahl wird durch (evtl. durch ein negatives Vorzeichen) und in der Kommaschreibweise dargestellt, wie z.B: 3.1415
B = |Q

$f_1 = \{ ((a_1,a_2),(a_1+a_2)) \mid a_1 \in A$ und $a_2 \in A \}$
$f_2 = \{ ((a_1,a_2),(a_1 - a_2)) \mid a_1 \in A$ und $a_2 \in A \}$
$f_3 = \{ ((a_1,a_2),(a_1 * a_2)) \mid a_1 \in A$ und $a_2 \in A \}$
$f_4 = \{ ((a_1,a_2),(a_1 / a_2)) \mid a_1 \in A$ und $a_2 \in A \}$
$f_5 = \{ (a,(w(a)) \mid a \in A \}$

$g_1 = \{ ((b_1, b_2), \text{add}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \}$
$g_2 = \{ ((b_1, b_2), \text{sub}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \}$
$g_3 = \{ ((b_1, b_2), \text{mul}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \}$
$g_4 = \{ ((b_1, b_2), \text{div}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q$ und $b_2 \neq 0 \}$
$g_5 = \{ (b,(\text{wurzel}(b)) \mid b \in B$ und $b_2 >= 0\}$

$S := \{(a,a) \mid a \in Q \}$

Beispiel:
(3,3) (0,0)
------------- $\notin$ R für alle b
(3/0), b

$\overline{R}$ (F, G, S) :=
$(M,(a,b)) \mid \exists a_1 \exists b_1, ..., \exists a_r \exists b_r \; \exists i \; \exists r \; M = \{(a_1,b_1), ..., (a_r, b_r)\} \wedge ((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \wedge$
$((b_1, ..., b_r),b) \in g_i \wedge f_i \in F \wedge g_i \in G\} \cup \{ (\emptyset,(a,b)) \mid (a,b) \in S \}$

heißt die durch F, G und S induzierte Regelmenge über A x B

3.1.7.1.2 Beispiel mit Erweiterung

A = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; (;) ; + ; - ; * ; / ; ÷ ; /; . }*
|Q = Menge der rationalen Zahlen $\subset$ B
Eine rationale Zahl wird durch (evtl. durch ein negatives Vorzeichen) und in der Kommaschreibweise dargestellt, wie z.B: 3.1415
B = $|Q \cup \{?\}$

$'f_1 = \{ ((a_1,a_2),(a_1+a_2)) \mid a_1 \in A \text{ und } a_2 \in A \}$
$'f_2 = \{ ((a_1,a_2),(a_1 - a_2)) \mid a_1 \in A \text{ und } a_2 \in A \}$
$'f_3 = \{ ((a_1,a_2),(a_1 * a_2)) \mid a_1 \in A \text{ und } a_2 \in A \}$
$'f_4 = \{ ((a_1,a_2),(a_1/a_2)) \mid a_1 \in A \text{ und } a_2 \in A \}$
$'f_5 = \{ (a,(w(a)) \mid a \in A \}$

$'g_1 = \{ ((b_1, b_2), \text{ add}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \}$
$'g_2 = \{ ((b_1, b_2), \text{ sub}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \}$
$'g_3 = \{ ((b_1, b_2), \text{ mul}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \}$
$'g_4 = \{ ((b_1, b_2), \text{ div}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \text{ und } b_2 \neq 0 \}$
$'g_5 = \{ (b,(\text{wurzel}(b)) \mid b \in B \text{ und } b_2 >= 0\}$

Erweiterung der Definitiosnbereiche von g'_i zu g_i :

$g_1 = \{ ((b_1, b_2), \text{ add}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \}$
$g_2 = \{ ((b_1, b_2), \text{ sub}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \}$
$g_3 = \{ ((b_1, b_2), \text{ mul}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \}$
$g_4 = \{ ((b_1, b_2), \text{ div}(b_1, b_2)) \mid b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q \} \cup \{ ((b, 0), ?) \mid b \in Q \}$
$\cup \{ ((?, ?), ?) \} \cup \{ ((b, ?), ?) \mid b \in Q \} \cup \{ ((?, b), ?) \mid b \in Q \}$

S := $\{(a,a) \mid a \in Q \}$

Beispiel:
(3,3) (0,0)
------------- $\in$ R
(3/0), ?

3.1.8 RekIndsatz 3 Version 2

Voraussetzungen: wie beim 2. RekIndsatz
Zusätzlich gelten noch folgende Voraussetzungen:
1) R_F ist die durch R (und F) induzierte Regelmenge
2) F ist disjunkt zerlegbar.
3) $I(R_F)$ ist monotektonisch

Behauptung:
Wenn $a \in A$, dann gilt:

$N[\{a\}] = S[\{a\}]$	falls $(\varnothing,a) \in R_F$
$N[\{a\}] = \varnothing$	falls $a \notin I(R_F)$
$N[\{a\}] = g_i[N[\{a_1\}] \times ... \times N[\{a_r\}]]$	falls $Z(a) = \{(a_1, ..., a_r, i)\}$

Beweis:
1) Es sei $(\varnothing,a) \in R_F$
Nach Voraussetzung gilt $I(R) \neq \varnothing$, also: $I(R_F) \neq \varnothing$
Da $I(R_F)$ monotektonisch und $I(R_F) \neq \varnothing$, folgt
$Z(a) := \{ (a_1, ..., a_r, i) \mid \exists\, i\ ((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \} = \varnothing$

$$\Longrightarrow \bigcup_{(a_1,...,a_r,i) \in Z(a)} g_i[N[\{a_1\}] x ... x N[\{a_r\}]] = \varnothing \Longrightarrow$$

$$N[\{a\}] = \bigcup_{(a_1,...,a_r,i) \in Z(a)} g_i[N[\{a_1\}] x ... x N[\{a_r\}]] \cup D_1[\{a\}] = D_1[\{a\}]$$

2) Es sei $a \notin I(R_F)$
Dann gilt nach Lemma L5
$N[\{a\}] = \varnothing$

3) sonst d.h. falls $a \in I(R_F)$ und $(\varnothing,a) \notin R_F$
a) aus $(\varnothing,a) \notin R_F$ und dem Lemma L5
folgt damit: $D_1[\{a\}] = \varnothing$

b) Nach dem Lemma L4 gilt:
$a \in I(R_F)$ $(\varnothing,a) \notin R_F \Longrightarrow |Z(a)| = 1$
Mit $Z(a) = \{(a_1, ..., a_r, i)\}$ folgt:
$N[\{a\}] = g_i[N[\{a_1\}] \times ... \times N[\{a_r\}]]$

3.1.9 RekIndsatz 3 Version 3

Voraussetzungen:
wie beim 2. RekIndsatz
Zusätzlich gelten noch folgende Voraussetzungen:
1) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
2) F ist disjunkt zerlegbar.
3) $I(R_F)$ ist monotektonisch
4) $\forall i \leq |G|$ g_i ist rechtseindeutig
5) S ist rechtseindeutig

Behauptung:
Wenn $a \in I(R_F)$, dann gilt:
$N(a) = S(a)$ falls $(\emptyset,a) \in R_F$
$N(a) = g_i((N(a_1), ..., N(a_r)))$ sonst, wobei $Z(a) = \{(a_1, ..., a_r, i)\}$

Beweis:
I) Nach dem vorigen Satz folgt:
$N[\{a\}] = D_1[\{a\}]$ falls $(\emptyset,a) \in R_F$
$N[\{a\}] = \emptyset$ falls $a \notin I(R_F)$
$N[\{a\}] = g_i[N[\{a_1\}] \times ... \times N[\{a_r\}]]$ falls $Z(a) = \{(a_1, ..., a_r, i)\}$

II) Induktion über die Regelmenge $I(R_F)$
1) Es sei $(\emptyset,a) \in R_F$
$N[\{a\}] = D_1[\{a\}] = \{ D_1(a) \}$ da D_1 rechtseindeutig, also
$\{N(a)\} = \{ D_1(a) \}$, also
$N(a) = D_1(a)$

2) sonst, d.h: $(\emptyset,a) \notin R_F$ und Behauptung gelte für $a_1 \in I(R_F) \wedge ... \wedge a_r \in I(R_F)$ und
$(\{a_1, ..., a_r\},a) \in R_F$ dh: $\exists$ ein i $((a_1, ..., a_r),a) \in f_i$
also: falls $Z(a) = \{(a_1, ..., a_r, i)\}$
also: $N[\{a\}] = g_i[N[\{a_1\}] \times ... \times N[\{a_r\}]]$ = nach Induktionsvoraussetzung =
$g_i[\{N(a_1)\} \times ... \times \{N(a_r)\}] = g_i[(N(a_1), ..., N(a_r))] =$
$\{g_i ((N(a_1), ..., N(a_r))) \}$ ==>
$N(a) = g_i ((N(a_1), ..., N(a_r)))$

3.1.10 RekIndsatz 4 Version 1

Voraussetzungen: wie beim 2. RekIndsatz
Zusätzlich gelten noch folgende Voraussetzungen:
1) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
2) (P(A), R_F, A) ist linkseindeutig und rechtstotal
3) F ist disjunkt zerlegbar.

Behauptung:
1) $I(R_F) = A$

2) Wenn $a \in A$, dann gilt:

$N[\{a\}] = S(a)$	falls $(\emptyset,a) \in R_F$
$N[\{a\}] = g_i[N[\{a_1\}] \times ... \times N[\{a_r\}]]$	sonst, d.h: $(\emptyset,a) \notin R_F$ wobei $Z(a) := \{ (a_1, ..., a_r ,i)\}$

Beweis:
I)
Nach Voraussetzung des Rekindsatz 2 gilt:
A ist eine effektiv geordnete Menge mit:
$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ mit $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$ und alle a_i sind paarweise verschieden.
und alle $f_i \in F$ sind kontrahierend, das bedeutet per Definition:
$((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \implies a_1 < a \wedge ... \wedge a_r < a$
Zeige:
R_F ist eine kontrahierende Regelmenge über der effektiv geordneten Menge $A = \{a_0, a_1, ...\}$
zeige dazu:
$(M,a) \in R_F \implies \forall x_i \in M \; x_i < a$
Es sei $(M,a) \in R_F$, also $\exists ((x_1, ..., x_r),a) \in f_i \in F$ mit $M = \{x_1, ..., x_r\}$
Da f_i kontrahierend, gilt $\forall x_i \in M \; x_i < a$,
also ist R_F eine kontrahierende Regelmenge
Da R_F kontrahierend und (nach Voraussetzung) rechtstotal ist, folgt nach dem Kontraktionskorollar K5:
$I(R_F) = A$

II)
Nach Voraussetzung gilt: R_F ist linkseindeutig und rechtstotal. Außerdem gilt: $I(R_F) = A$
also gilt nach Lemma L6:
$I(R_F)$ ist monotektonisch

III) Dann gilt nach RekIndsatz 3 Version 1:
Wenn $a \in A$, dann gilt:

$N[\{a\}] = D_1[\{a\}]$	falls $(\emptyset,a) \in R_F$
$N[\{a\}] = \emptyset$	falls $a \notin I(R_F)$
$N[\{a\}] = g_i[N[\{a_1\}] \times ... \times N[\{a_r\}]]$	falls $Z(a) = \{(a_1, ..., a_r ,i)\}$

Da $I(R_F) = A$, folgt:

Wenn $a \in A$, dann gilt:

$N[\{a\}] = D_1[\{a\}]$	falls $(\emptyset,a) \in R_F$
$N[\{a\}] = g_i[N[\{a_1\}] \times ... \times N[\{a_r\}]]$	falls $Z(a) = \{(a_1, ..., a_r ,i)\}$

3.1.10.1 Lemma L7

Voraussetzung:
wie beim Rekindsatz 4 Version 1 und $\forall U\ [(\emptyset,U)\in R_F \implies N[\{U\}] \neq \emptyset]$

Behauptung:
$\forall V\ N(V) \neq\emptyset$

Beweis: (Induktion über $I(R_F)$
Definiere: B(U) : <==> Voraussetzung_V (siehe oben) ==> $N[\{V\}] \neq \emptyset]]$
1) $V\in I(R_F) \wedge (\emptyset,V)\in R_F$
klar

2) Zeige: $V_1\in I(R_F) \wedge\ldots\wedge V_r\in I(R_F)$ und $B(V_1) \wedge\ldots\wedge B(V_r)$ und $(\{V_1, \ldots, V_r\},V)\in R_F$ ==> Voraussetzung_V ==> $N[\{V\}] \neq \emptyset]]$
Dazu genügt zu zeigen:
$V_1\in I(R_F) \wedge\ldots\wedge V_r\in I(R_F)$ und $B(V_1) \wedge\ldots\wedge B(V_r)$ und $(\{V_1, \ldots, V_r\},V)\in R_F$ und Voraussetzung_V ==> $N[\{V\}] \neq \emptyset]]$
Es sei:
$V_1\in I(R_F) \wedge\ldots\wedge V_r\in I(R_F)$ und $B(V_1) \wedge\ldots\wedge B(V_r)$ und $(\{V_1, \ldots, V_r\},V)\in R_F$ und Voraussetzung_V
Da $V_1\in I(R_F) \wedge\ldots\wedge V_r\in I(R_F)$ und
Voraussetzung_V ==> $N(V_1) \neq\emptyset$ und ... und Voraussetzung_V ==> $N(V_r) \neq\emptyset$ und
$(\{V_1, \ldots, V_r\},V)\in R_F$ folgt: $N(V_1) \neq\emptyset$ und ... und $N(V_r) \neq\emptyset$
Da $(\{V_1, \ldots, V_r\},V)\in R_F$ und R_F linkseindeutig, folgt: $Z(V) = \{(V_1, \ldots, V_r,)\}$
Da $N(V_1) \neq\emptyset$ und ... und $N(V_r) \neq\emptyset$, folgt: $N[\{V_1\}]$ x ... x $N[\{V_r\}] \neq\emptyset$
Da g rechtsttotal, folgt: $g[N[\{V_1\}]$ x ... x $N[\{V_r\}]] \neq \emptyset$, also $N[\{V\}] \neq\emptyset$

3.1.10.2 Lemma L8

Lemma:
$T_1 \neq \emptyset$ und ... und $T_r \neq \emptyset$ ==>

$$\bigcup_{(t_1,\ldots,t_r)\in T_1 x \ldots x T_r} \{ t_1, \ldots, t_r\} = T_1 \cup \ldots \cup T_r$$

Beweis:
1) $x\in RS$
OBdA sei $x := x_1\in T_1$
Da $T_2 \neq \emptyset$ und ... und $T_r \neq \emptyset$ existieren $x_2\in T_2 \wedge \ldots \wedge x_r\in T_r$
also $(x_1, \ldots, x_r)\in T_1$ x ... x T_r und $\{x_1, \ldots, x_r\}\in T_1 \cup \ldots \cup T_r$
also $\{x_1, \ldots, x_r\}\subset LS \implies x_1\in LS$

2) $x\in LS$
also $\{t_1, \ldots, t_r\}$ und $(t_1, \ldots, t_r)\in T_1$ x ... x T_r mit $x\in\{t_1, \ldots, t_r\}\subset T_1 \cup \ldots \cup T_r$

3.1.11 RekIndsatz 4 Version 2

Voraussetzungen: wie beim RekIndsatz 2
Zusätzlich gelten noch folgende Voraussetzungen:
1) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
2) Die zweistellige Relation (P(A), R_F , A) ist linkseindeutig und rechtstotal
3) F ist disjunkt zerlegbar.
4) $\forall i \leq |G|$ g_i ist rechtseindeutig
5) S ist rechtseindeutig

Behauptung:
Wenn $a \in A$, dann gilt:

$N(a) = S(a)$	falls $(\emptyset,a) \in R_F$
$N(a) = g_i((N(a_1), ..., N(a_r)))$	sonst, d.h: $(\emptyset,a) \notin R_F$
	wobei $Z(a) := \{ (a_1, ..., a_r, i) \}$

Bemerkung:
Die Behauptung des Satzes gilt auch noch, wenn die Voraussetzungen, die zur Berechenbarkeit von N nötig sind, nicht gelten. Allerdings ist dann auch N nicht mehr berechenbar.

Beweis:
I)
Nach Voraussetzung des Rekindsatz 2 gilt:
$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ mit $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$ und
$((a_1, ..., a_r),a) \in f_i \quad ==> \quad a_1 < a \wedge \ldots \wedge a_r < a$
also:
$(\{a_1, ..., a_r\},a) \in R_F \quad ==> \quad a_1 < a \wedge \ldots \wedge a_r < a$
Da R_F rechtstotal $\exists M\ (M,a_0) \in R_F$
also $M = \emptyset$, also $(\emptyset,a_0) \in R_F$
also ist R_F kontrahierend
Da R_F kontrahierend und (nach Voraussetzung) rechtstotal ist, folgt nach dem Kontraktionskorrollar K5:
$I(R_F) = A$

II)
Nach Voraussetzung gilt: R_F ist linkseindeutig und rechtstotal, also:
R_F ist linkseindeutig und rechtstotal bzgl. A . Da $I(R_F) = A$, folgt:
R_F ist linkseindeutig und rechtstotal bzgl. $I(R_F)$, also
$I(R_F)$ ist monotektonisch

III) Dann gilt nach RekIndsatz 3 Version 2:
Wenn $a \in I(R_F)$, dann gilt:

$N(a) = D_1(a)$	falls $(\emptyset,a) \in R_F$
$N(a) = g_i((N(a_1), ..., N(a_r)))$	sonst, wobei $Z(a) = \{(a_1, ..., a_r, i)\}$

Da $I(R_F) = A$, folgt:
Wenn $a \in A$, dann gilt:

$N(a) = D_1(a)$	falls $(\emptyset,a) \in R_F$
$N(a) = g_i((N(a_1), ..., N(a_r)))$	sonst, wobei $Z(a) = \{(a_1, ..., a_r, i)\}$

4 Anwendungen

4.1 Beispiele zum RekIndsatz 1

4.1.1 "wundersame" Vermehrung

4.1.1.1 Motivation

Die neue Zahlenmenge erhält man aus der alten Zahlenmenge, indem man jeweils 2 **verschiedene** Zahlen addiert und diese der alten Zahlenmenge hinzufügt.
Die ersten zwei Zahlen sind 3 und 5

4.1.1.2 Definition

$X = \{1 ; 2 ; 3 ; 4; \ 5 \dots \}$ mit der bekannten Relation <
$R = \{(B,x) \in M(X) x\ X \mid \exists r,s \in X\ B=\{r;s\} \wedge x = r + s \wedge r \neq s\} \cup \{(\emptyset , 3) ; (\emptyset ; 5)\}$

Regelnkurznotation: ($r \in X$, $s \in X$)

$\dfrac{\emptyset}{3} \qquad \dfrac{\emptyset}{5} \qquad \dfrac{\{r ; s\}}{r + s}$ mit $r \neq s$

4.1.1.3 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 1

1) Regelmenge R ist entscheidbar (trivial)
2) $X = \{1 ; 2 ; 3 ; 4; \ 5 \dots \}$ mit $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$ ist aufzählbar
mit folgender Eigenschaft:
$(\{x_1, \dots, x_r\},x) \in R \implies x_1 < x \wedge \dots \wedge x_r < x$
a) $(\{x_1,x_2\},x) \in R \implies (\{x_1,x_2\}, x_1+ x_2) \in R \implies$
$x_1 < x_1+ x_2 \wedge x_2 < x_1+ x_2$

4.1.1.4 Konkrete Beispiele (Anwendung des Satzes)

1) e(1)
$R^{-1}[\{1\}] = \emptyset \implies e(1) = 0$

2) e(2)
$R^{-1}[\{1\}] = \emptyset \implies e(1) = 0$

3) e(3)
$R^{-1}[\{3\}] = \{\emptyset\} \implies e(3) = 1$

4) e(4)
$R^{-1}[\{4\}] = \{\{1,3\}\} \implies$
$e(4) = e(1) \cdot e(3) = 0 \cdot 1 = 0$

5) e(5)
$(\emptyset, x) \in R \implies e(5) = 1$

6) e(6)
$R^{-1}[\{6\}] = \{\{1,5\}, \{2,4\}\} \implies$
$e(6) = e(1) \cdot e(5) + e(2) \cdot e(4) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$

7) e(7)
$R^{-1}[\{7\}] = \{\{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}\}$ ==>
$e(7) = e(1) \cdot e(6) + e(2) \cdot e(5) + e(3) \cdot e(4) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$

4.2 Kein Beispiel zum RekIndsatz 1

4.2.1 Vermehrungen

4.2.1.1 Motivation

Die neue Zahlenmenge erhält man aus der alten Zahlenmenge, indem man jeweils 2 **verschiedene** Zahlen subtrahiert und diese der alten Zahlenmenge hinzufügt.
Die ersten zwei Zahlen sind 3 und 5

4.2.1.2 Definition

X = Z = Menge aller ganzen Zahlen
$R = \{(B,x) \in M(X) x\, X \mid \exists r,s \in X\ B=\{r;s\} \wedge r \neq s\ \wedge x = r - s\ \}$
$\cup\ \{(\emptyset\ , 3)\ ; (\emptyset\ ; 5)\}$

Regelnkurznotation: ($r \in X$, $s \in X$)

$$\frac{\emptyset}{3} \qquad \frac{\emptyset}{5} \qquad \frac{\{r\ ;\ s\}}{r - s} \quad \text{mit } r \neq s$$

Um den Satz verwenden zu können, muß X = Z = Menge aller ganzen Zahlen aufzählbar sein und das Kriterium $(\{x_1, ..., x_r\},x) \in R \Longrightarrow x_1 < x\ \wedge \dots \wedge\ x_r < x$ erfüllt sein.
Leider scheitert z.B. folgender Versuch:
$Z = \{z_1, z_2, z_3, ...\} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$ mit $0 < -1 < 1 < -2 < 2 < -3 < 3 < \ ...$
Leider gilt dann nicht mehr das Kriterium:
$(\{x_1, ..., x_r\},x) \in R \quad \Longrightarrow \quad x_1 < x\ \wedge \dots \wedge\ x_r < x$
Denn das Folgende gilt nicht mehr:
$(\{3, 5\}, -2) \in R \quad \Longrightarrow \quad 3 < -2\ \wedge \dots \wedge\ 5 < -2$
Wenn man zeigen könnte, dass jeder Versuch scheitert, könnte man den Satz nicht verwenden.

4.2.2 Zahlenscanner

4.2.2.1 Motivation

Es wird beabsichtigt, Bezeichner für Zahlen der folgenden einfachen Form zu definieren:
123
9.98
-3.14

Bem:
$Z := \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 \}$

4.2.2.2 Definition Bezeichner vorzeichenlose Fließkommazahlen

$X1 = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9; . \}^*$
$R1 := \{ (\{z;s\}, zs) \mid s \in X1 \wedge z \in Z \} \cup \{ (\{z;s\}, sz) \mid s \in X1 \wedge z \in Z \} \cup R1_A$
wobei
$R1_A := \{ (\emptyset, a) \mid a \in Z \} \cup \{ (\emptyset, r.s) \mid r \in Z \wedge s \in Z\}$

Regelnkurznotation: $(a, r, s \in X0)$

$$\frac{\emptyset}{z}\ z \in Z \qquad \frac{\emptyset}{r.s}\ r \in Z ; s \in Z$$

$$\frac{\{s ; z\}}{sz}\ s \in X1 ; z \in Z$$

$$\frac{\{s ; z\}}{zs}\ s \in X1 ; z \in Z$$

Die induktive definierte Menge I(R1) ist die Menge aller vorzeichenlosen Fließkommazahlen.

4.2.2.3 Definition Bezeichner vorzeichenbehaftete Fließkommazahlen

$X2 = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9; . ; + ; - \}^*$
$R2 := \{ (\emptyset, a) \mid a \in I(R1) \} \cup \{ (\{a\}, +a) \mid a \in I(R1) \} \cup \{ (\{a\}, -a) \mid a \in I(R1) \}$
wobei
$R2_A := \{ (\emptyset, a) \mid a \in I(R1) \}$

Regelnkurznotation: $(a \in I(R1) \subset X2)$

$$\frac{\emptyset}{a} \qquad \frac{\{a\}}{+a} \qquad \frac{\{a \}}{-a}$$

Die induktive definierte Menge I(R2) ist die Menge aller vorzeichenbehafteten Fließkommazahlen.

4.2.2.4 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 1

1) $R \subset P(X) \times X$ ist eine entscheidbare Regelmenge über X (trivial)

2) Die Relation < ist eine längen-lexikographische Ordnung auf $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$ mit $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < ...$ und X ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$(\{x_1, x_2\}, x) \in R \implies x_1 < x \wedge x_2 < x$

4.2.2.5 Konkrete Beispiele (Anwendung des Satzes)

$(\varnothing, x) \in R1$ ==> $e1(x) = 1$
$R1^{-1}[\{x\}] = \varnothing$ ==> $e1(x) = 0$
sonst ==> $e1(x) = \sum_{\{x_1 ... x_m\} \in R1^{-1}[\{x\}]} e1(x_1) \cdot ... \cdot e1(x_m)$

$(\varnothing, x) \in R2$ ==> $e2(x) = 1$
$R2^{-1}[\{x\}] = \varnothing$ ==> $e2(x) = 0$
sonst ==> $e2(x) = \sum_{\{x_1 ... x_m\} \in R2^{-1}[\{x\}]} e2(x_1) \cdot ... \cdot e2(x_m)$

Es gilt:
$e1(x) = 1$ <==> $x \in I(R1)$ <==> $(\varnothing, x) \in R2$ ==> $x \in I(R2)$ <==> $e2(x) = 1$
$x \in Z \vee x = r.s$ mit $r \in Z \wedge s \in Z$ <==> $(\varnothing, x) \in R1$

Also:
$x \in Z \vee x = r.s$ mit $r \in Z \wedge s \in Z$ ==> $e1(x) = 1$
$R1^{-1}[\{x\}] = \varnothing$ ==> $e1(x) = 0$
sonst ==> $e1(x) = \sum_{\{x_1 ... x_m\} \in R1^{-1}[\{x\}]} e1(x_1) \cdot ... \cdot e1(x_m)$
$e1(x) = 1$ ==> $e2(x) = 1$
$R2^{-1}[\{x\}] = \varnothing$ ==> $e2(x) = 0$
sonst ==> $e2(x) = \sum_{\{x_1 ... x_m\} \in R2^{-1}[\{x\}]} e2(x_1) \cdot ... \cdot e2(x_m)$

Beispiele:
1) e2(123)
$(\varnothing, 123) \in R2$ ==> e2(123) = 1

2) e2(1e23)
$R^{-1}[\{1e23\}] = \varnothing$ ==> e2(1e23) = 0

3) e2(3.14)
$(\varnothing, 3.14) \in R2$ ==> e(3.14) = 1

4) e2(-2.718)
$R^{-1}[\{-2.718\}] = \{2.718\}$ ==> e2(-2.718) = e2(2.718)

4.2.3 Zahlenterme

4.2.3.1 Motivation

Es wird beabsichtigt, Terme der folgenden einfachen Form zu definieren:
(a, b, c sind rationale Zahlen)
(a+b)
(((a+b)+(b+a))+a)

4.2.3.2 Definition

X = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; (;) ; + ; - ; * ; / ; : }*

|Q = Menge der rationalen Zahlen $\subset$ X
Eine rationale Zahl wird durch (evtl. durch ein negatives Vorzeichen) und ein Paar von natürlichen Zahlen angegeben, das durch einen Doppelpunkt getrennt ist.
3:5 bedeutet somit 0,6

R =
$\{(\{x_1, x_2\}, (x_1 + x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \cup$
$\{ (\{x_1, x_2\}, (x_1 - x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \cup$
$\{ (\{x_1, x_2\}, (x_1 * x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \cup$
$\{ (\{x_1, x_2\}, (x_1 / x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\}\} \cup R_A$
wobei
$R_A := \{ (\emptyset, a) \mid a \in |Q \}$

Regelnkurznotation: ($r \in X$, $s \in X$)

$\emptyset$	{r ; s}	{r ; s}	{r ; s}	{r ; s}
--- wobei a∈|Q	-------	--------	----------	----------
a	(r + s)	(r - s)	(r * s)	(r / s)

Die induktive definierte Menge I(R) ist die Menge aller Zahlenterme.

4.2.3.2.1 Bemerkung

Man kann auch noch "Vorzeichen" zulassen. Als Regeln bedeutet das:

{t}	{t}
----	------
(+t)	(-t)

4.2.3.3 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 1

1) $R \subset P(X) \times X$ ist eine entscheidbare Regelmenge über X (trivial)

2) Die Relation < ist eine längen-lexikographische Ordnung auf $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$ mit $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < ...$ und X ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$(\{x_1, x_2\},x) \in R \quad ==> \quad x_1 < x \ \wedge \ x_2 < x$

4.2.3.4 Konkrete Beispiele (Anwendung des Satzes)

$(\emptyset, x) \in R$ ==> $e(x) = 1$
$R^{-1}[\{x\}] = \emptyset$ ==> $e(x) = 0$
sonst ==> $e(x) = \sum_{\{x_1 \ldots x_m\} \in R^{-1}[\{x\}]} e(x_1) \cdot \ldots \cdot e(x_m)$

Es sei a, b, c, d∈|Q

1) $e(\ \mathbf{a}\ )$
$(\emptyset, a) \in R$ ==> $e(a) = 1$

2) $e(\ \mathbf{(a}\ )$
$R^{-1}[\{\ \mathbf{(a}\ \}] = \emptyset$ ==> $e(\ \mathbf{(a}\ ) = 0$

3) $e(\ \mathbf{a)}\ )$
$R^{-1}[\{\ \mathbf{a)}\ \}] = \emptyset$ ==> $e(\ \mathbf{a)}\ ) = 0$

4) $e(\ \mathbf{*a}\ )$
$R^{-1}[\{\ \mathbf{*a}\ \}] = \emptyset$ ==> $e(\ \mathbf{*a}\ )= 0$

5) $e(\ \mathbf{(a**b)}\ )$
$R^{-1}[\{\ \mathbf{(a**b)}\ \}] = \{\{a\ ;\ *b\};\{a*\ ;\ b\}\}$ ==>
$e(\ \mathbf{(a**b)}\ ) = e(\mathbf{a}) \cdot e(\mathbf{*b}) + e(\mathbf{a*}) \cdot e(\mathbf{b}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

6) $e(\ \mathbf{(a*b)}\ )$
$R^{-1}[\{\ \mathbf{(a*b)}\ \}] = \{\{a\ ;\ b\}\}$ ==>
$e(\ \mathbf{(a*b)}\ ) = e(\mathbf{a}) \cdot e(\mathbf{b}) = 1 \cdot 1 = 1$

7) $e(\ \mathbf{((a*b)+(c*d))}\ )$
$R^{-1}[\{\ \mathbf{((a*b)+(c*d))}\ \}] = \{\ \{\mathbf{(a}\ ,\ \mathbf{b)+(c*d)}\};\ \{\mathbf{(a*b)},\ \mathbf{(c*d)}\}\ ;\ \ \{\mathbf{(a*b)+(c},\ \ \mathbf{d)}\}\ \}$ ==>
$e(\mathbf{((a*b)+(c*d))}\ ) =$
$e(\ \mathbf{(a}\ )\cdot e(\ \mathbf{b)+(c*d)}\ ) + e(\ \mathbf{(a*b)}\ )\cdot e(\ \mathbf{(c*d)}) + e(\ \mathbf{(a*b)+(c}\ )\cdot e(\ \mathbf{d)}\ ) =$
$0 \cdot e(\ \mathbf{b)+(c*d)}\ ) + e(\ \mathbf{(a*b)}\ ) \cdot \mathbf{e(}\ \mathbf{(c*d)}\ ) + e(\ \mathbf{(a*b)+(c}\ ) \cdot 0 =$
$e(\ \mathbf{(a*b)}\ ) \cdot \mathbf{e(}\ \mathbf{(c*d)}\ ) = 1 \cdot 1 = 1$

4.2.4 Syntaxchecker (Scanner und Parser)

Ein Scanner (lexikalischer Scanner, Tokenizer, Lexer) zerlegt eine Zeichenkette in zusammengehörigen Einheiten (Wörter, Atome, Token).
Ein Parser überprüft die Grammatik (und macht die Syntaxanalyse) einer Zeichenkette und bereitet diese für die Weiterverarbeitung entsprechend auf.
Zu Übungszewcken könnte man für eine abgespeckte Programmiersprache C (ein Mini-C, in dem höchstens Verzweigungen und die while-Schleife vorkommt) einen Syntaxchecker programmieren, der ein Mini-C-Programm auf syntaktische Korrektheit prüft.
Dazu müsste man folgende Mengen induktiv definieren:

- Menge aller korrekten Variablen-Bezeichner
- Menge aller korrekten Zahlen-Bezeichner
- Menge aller Terme
- Menge aller Formeln
- Menge aller Zuweisungsausdrücke
- Menge aller Anweisungen

Man beachte, daß diese Mengen "verschachtelt" sein können:
Ein Atom einer Anweisung besteht aus einem Zuweisungsausdruck
Ein Atom einer Formel besteht aus einem Term
Ein Atom eines Terms besteht aus einer Zahl oder einer Variablen.
usw.

4.2.5 Semantik einer Programmiersprache

Was "macht" ein Programm mit dem Arbeitsspeicher?
Ein Programm "bearbeitet" den Arbeitspeicher, indem es die Inhalte mancher Speicherstellen ändert.
Ein Programm entspricht also einer Abbildung, die die Werte bestimmter Speicherstellen ändert.
Die formale Semantik einer Programmiersprache beschreibt mathematisch die exakte Bedeutung eines Programms.
Speziell könnte man z.B. in der operationalen Semantik die Semantik eines boolschen Ausdrucks, eines arithmetischen Ausdrucks und einer Anweisung nur durch "induktiv definierte Mengen" beschreiben.

4.2.6 regulärer Ausdruck

4.2.6.1 Motivation

Es wird beabsichtigt, einen regulären Ausdruck der folgenden einfachen Form zu definieren:
(alle Kleinbuchstaben a bis z sind reguläre Ausdrücke)
(a | b) nennt man Alternative
(a + b) nennt man Verkettung (Konkatenation)
(a*) nennt man Kleensche Hülle

4.2.6.2 Definition

X = {'a' ; ... ; 'z' ; (;) ; | ; '+' ; '*' }*

R =
$\{(\{x_1, x_2\}, (x_1 + x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \cup$
$\{ (\{x_1, x_2\}, (x_1 \mid x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \cup$
$\{ (\{x\}, (x^*)) \mid x \in X \} \cup R_A$
wobei
$R_A := \{ (\emptyset,) \mid x \in X \}$

Regelnkurznotation: ($r \in X$, $s \in X$)

$\emptyset$
---- wobei a ein Kleinbuchstabe bedeutet
a

$$\frac{\{r ; s\}}{(r + s)} \qquad \frac{\{r ; s\}}{(r \mid s)} \qquad \frac{\{r\}}{(r^*)}$$

Die induktive definierte Menge I(R) ist die Menge aller regulären Ausdrücke.

4.2.6.3 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 1

1) $R \subset P(X) \times X$ ist eine entscheidbare Regelmenge über X (trivial)

2) Die Relation < ist eine längen-lexikographische Ordnung auf $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$ mit $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < ...$ und X ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$(\{x_1, x_2\},x) \in R \quad ==> \quad x_1 < x \wedge x_2 < x$

4.2.6.4 Konkrete Beispiele (Anwendung des Satzes)

$(\emptyset, x) \in R$ ==> $e(x) = 1$
$R^{-1}[\{x\}] = \emptyset$ ==> $e(x) = 0$
sonst ==> $e(x) = \sum_{\{x_1 \ldots x_m\} \in R^{-1}[\{x\}]} e(x_1) \cdot \ldots \cdot e(x_m)$

Es seien a, b, c, d Kleinbuchstaben

1) e(**a**)
$(\emptyset, a) \in R$ ==> e(a) = 1

2) e(**(a**)
R^{-1}[{ **(a** }] = ∅ ==> e(**(a**) = 0

3) e(**a)**)
R^{-1}[{ **a)** }] = ∅ ==> e(**a)**) = 0

4) e(***a**)
R^{-1}[{ ***a** }] = ∅ ==> e(***a**)= 0

5) e(**(a******b)**)
R^{-1}[{ **(a******b)** }] = {{a ; *b};{a* ; b}} ==>
e(**(a******b)**) = e(**a**) · e(***b**) + e(**a***) · e(**b**) = 1 · 0 + 0 · 1 = 0

6) e(**(a+b)**)
R^{-1}[{ **(a+b)** }] = {{a ; b}} ==>
e(**(a+b)**) = e(**a**) · e(**b**) = 1 · 1 = 1

7) e(**((a+b)+(c|d))**)
R^{-1}[{ **((a+b)+(c|d))** }] = { {**(a , b)+(c|d)**}; {**(a+b)**, **(c|*d)**} ; {**(a+b)+(c, d)**} } ==>
e(**((a+b)+(c|d))**) =
e(**(a**)·e(**b)+(c|d)**) + e(**(a+b)**)·e(**(c|d)**) + e(**(a+b)+(c**)·e(**d)**) =
0· e(**b)+(c|d)**) + e(**(a+b)**) · **e**(**(c|d)**) + e(**(a+b)+(c**)· 0 =
e(**(a+b)**) · **e**(**(c|d)**) = 1·1 = 1

4.3 Beispiele zum RekIndsatz 2

4.3.1 "Fibonacci-Mengen"

4.3.1.1 Motivation

Die Fibonacci-Zahlen bekommt man dadurch, dass man aus den letzten 2 Folgengliedern einer Zahlenfolge die Summe bildet. Die ersten zwei Zahlen sind gegeben, wie z.B. 10 und 20
Also:
10, 20, 30, 50, 80, 130, ...

Bei einer "Fibonacci-Menge" (der Begriff stammt von mir, deshalb die "Anführungszeichen") sind die zwei ersten Mengen M0 und M1 gegeben. Die nächste Menge bekommt man, indem man jedes Element der letzten mit einem Element der vorletzten Menge kombiniert (addiert).
Beispiel:
M0 = { (0,4), (0,7) }
M1 = { (1,8), (1,9), (1,5) }
M2 = { (2,12) ; (2,15) ; (2,13) ; (2,16) ; (2,9) }
...

Bemerkung:
Die Tupel mit 1. Komponente = 0 charakterisieren die Menge M0.
Die Tupel mit 2. Komponente = 0 charakterisieren die Menge M2, usw.

4.3.1.2 Definition

A = Menge der natürlichen Zahlen = {0; 1 ; 2 ; 3 ; 4; 5 ... } mit der bekannten Relation <
B = Menge der natürlichen Zahlen = {0; 1 ; 2 ; 3 ; 4; 5 ... }

$f_1 := \{ ((a, a+1), a+2) \mid a_1 \in A \wedge a_2 \in A \}$
$g_1 := \{ ((b_1, b_2), b_1 + b_2) \mid b_1 \in B \wedge b_2 \in B \}$

$f_1((a_1, a_2)) = a_2 + 1$
$g_1((b_1, b_2)) = b_1 + b_2$

$R_A := \{ (\emptyset, (0,1)) ; (\emptyset, (0,2)) ; (\emptyset, (1,1)) ; (\emptyset, (1,2)) \}$

Regelnkurznotation:

$$\frac{\emptyset}{(0,1)} \qquad \frac{\emptyset}{(0,2)} \qquad \frac{\emptyset}{(1,1)} \qquad \frac{\emptyset}{(1,2)} \qquad \frac{\{ (n,y_1), (n+1,y_2) \}}{\{(n+2, y_1+y_2)\}}$$

Also sind folgende Elemente aus I(R):
(0,1) ; (0,2) ; (1,1) ; (1,2) ; (2,2) ; (2,3), (2,4) ; (3,3), (3,4) ; (3,5), (3,6)

4.3.1.3 Konkrete Beispiele (Anwendung des Satzes)

1) N[{**0**}]
D_1[{**0**}] = {**1**, **2**} , Z(**0**) : = ∅ ==>
N[{**0**}] = {**1**, **2**}

2) N[{**1**}]
D_1[{**1**}] = {**1**, **2**} , Z(**0**) : = ∅ ==>
N[{**1**}] = {**1**, **2**}

3) N[{**2**}]
D_1[{**2**}] = ∅ , Z(**2**) = { (**0**,**1**,1)) } ==>
N[{**2**}] = $\bigcup\limits_{(a_1,\ldots,a_r,i)\in Z(2)} g_i[N[\{a_1\}]x\ldots xN[\{a_r\}]]$ ∪ D_1[{**2**}] =
g_1[N[{**0**}] x N[{**1**}]] = g_1[{**1**,**2**} x {**1**,**2**}] = g_1[{(**1**,**1**), (**1**,**2**), (**2**,**1**), (**2**,**2**) }] = { **2**, **3**, **4** }

3) N[{**3**}]
D_1[{**3**}] = ∅ , Z(**3**) = { (**1**,**2**,1)) } ==>
N[{**3**}] = $\bigcup\limits_{(a_1,\ldots,a_r,i)\in Z(3)} g_i[N[\{a_1\}]x\ldots xN[\{a_r\}]]$ ∪ D_1[{**3**}] =
g_1[N[{**1**}] x N[{**2**}]] = g_1[{**1**, **2**} x { **2**, **3**, **4** }] =
g_1[{(**1**,**2**), (**1**,**3**), (**1**,**4**), (**2**,**2**), (**2**,**3**), (**2**,**4**) }] = { **3**, **4**, **5**, **6** }

4.3.2 Terme mit Werten

4.3.2.1 Motivation

Es wird beabsichtigt, Terme der folgenden einfachen Form zu definieren und die Werte davon zu berechnen:

(3+5) ---> Wert = 8

(((3+5)*(3-2))+2) ---> Wert = 10

4.3.2.2 Definition

A = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; (;) ; + ; - ; * ; / ; ÷ ; : }*

B = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; - ; , }*

|Q = Menge der rationalen Zahlen $\subset$ B

Eine rationale Zahl wird durch (evtl. durch ein negatives Vorzeichen) und ein Paar von natürlichen Zahlen angegeben, das durch einen Doppelpunkt getrennt ist.

3:5 bedeutet steht somit für 3/5 = 0,6

$|G| = 4$

$f_1((a_1, a_2)) = (a_1 + a_2)$
$f_2((a_1, a_2)) = (a_1 - a_2)$
$f_3((a_1, a_2)) = (a_1 * a_2)$
$f_4((a_1, a_2)) = (a_1 / a_2)$

$g_1((b_1, b_2)) = add(b_1, b_2)$
$g_2((b_1, b_2)) = sub(b_1, b_2)$
$g_3((b_1, b_2)) = mul(b_1, b_2)$

$g_4((b_1, b_2)) = div(b_1, b_2)$

$R_A := \{ (\emptyset, (a, a)) \mid a \in |Q \}$
also: $D_1 = \{ (a,a) \mid a \in |Q \}$ und $D_1[\{z\}] = \{z\}$

4.3.2.3 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 2

1) $\forall i \leq |G|$ f_i entscheidbar und $g_i[]$ ist berechenbar und $\forall (b_1, ..., b_r) \in B^*$ $|g_i[\{(b_1, ..., b_r)\}]| <$ 00 und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a \in A$ $D_1[\{a\}] <$ 00

2) Die Relation < ist eine längen-lexikographische Ordnung auf A = $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ mit $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$ und A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:

$((a_1, a_2),a) \in f_i$ ==> $a_1 < a \wedge a_2 < a$

4.3.2.4 Konkrete Beispiele (Anwendung des Satzes)

1) N(z), wobei z eine rationale Zahl ist.
$Z(\mathbf{z}) = \emptyset$
$D_1[\{\mathbf{z}\}] = \{\mathbf{z}\}$
also:
$N[\{\ \mathbf{z}\ \}] = D_1[\{\mathbf{z}\}] = \{\mathbf{z}\}$

2) $N[\{\ \mathbf{(z}\ \}]$, wobei z eine rationale Zahl ist.
$Z(\mathbf{(z}) = \emptyset$
$D_1[\{\mathbf{(z}\}] = \emptyset$
also:
$N[\{\mathbf{(z}\}] = \emptyset$

3) $N[\{\ \mathbf{(z*}\ \}]$, wobei z eine rationale Zahl ist.
$Z(\mathbf{(z*}) = \emptyset$
$D_1[\{\ \mathbf{(z*}\}] = \emptyset$
also:
$N[\{\ \mathbf{(z*}\}] = \emptyset$

4) $N[\{\ \mathbf{z)}\ \}]$, wobei z eine rationale Zahl ist.
$Z(\mathbf{z)}) = \emptyset$
$D_1[\{\mathbf{z)}\}] = \emptyset$
also:
$N[\{\mathbf{z)}\}] = \emptyset$

5) $N[\{\ \mathbf{*z)}\}]$, wobei z eine rationale Zahl ist.
$Z(\mathbf{*z)}) = \emptyset$
$D_1[\{\mathbf{*z)}\ \}] = \emptyset$
also:
$N[\{\mathbf{*z)}\ \}] = \emptyset$

6) $N[\{\ \mathbf{(2{*}{*}3)}\ \}]$
$D_1[\{\ \mathbf{(2{*}{*}3)}) = \emptyset$
$Z(\mathbf{(2{*}{*}3)}) = \{\ (\ \mathbf{2*}, \mathbf{3}\ , 3)\ ;\ (\ \mathbf{2}\ , \mathbf{*3)}\ , 3)\ \}$

$$N[\{\mathbf{(2{*}{*}3)}\}] = \bigcup_{(a_1,a_2,i)\in Z((2{*}{*}3))} g_i[N[\{a_1\}]\,x\,N[\{a_2\}]] \ \cup\ D_1[\{\mathbf{(2{*}{*}3)}\}] =$$

$g_3[\ N[\{\mathbf{2*}\}]\ x\ N[\{\mathbf{3}\}]\ ] \cup g_3[\ N[\{\mathbf{2}\}]\ x\ N[\{\mathbf{*3}\}]\ ] =$
$g_3[\emptyset\ x\ \{\mathbf{3}\}\ \ ] \cup g_3[\{\mathbf{2}\}\ x\ \emptyset\ ] = g_3[\emptyset\ ] \cup g_3[\ \emptyset\ ] = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
also:
$N[\{\ \mathbf{(2{*}{*}3)}\ ) = \emptyset$

7) N[{ **(a*b)** }] , wobei a und b rationale Zahlen sind.
D_1[{ **(a*b)** }] = ∅
Z(**(a*b)**) = { (**a**, **b** , 3) }

$$N[\{\mathbf{(a*b)}\}] = \bigcup_{(a_1,a_2,i)\in Z((\mathrm{a*b}))} g_i[N[\{a_1\}]\,x\,N[\{a_2\}]] \;\cup\; D_1[\{\mathbf{(a*b)}\}] =$$

g_3[N[{**a**}] x N[{**b**}]] = g_3[{**a**} x {**b**}] = g_3[{(**a**,**b**)}] = { mul(**a**,**b**) }
also:
N[{ **(a*b)** }] = {mul(**a**,**b**)}

8) N[{ **((2*3)+(4*5))** }]
D_1[{ **((2*3)+(4*5))** }] = ∅
Z(**((2*3)+(4*5))**) = { (**(2*3)** , **(4*5)** , 1) ; (**(2 , 3)+(4*5)** , 3) ; (**(2 , 3)+(4*5)** , 3) }

$$N[\{\mathbf{((2*3)+(4*5))}\}] = \bigcup_{(a_1,a_2,i)\in Z(((2*3)+(4*5)))} g_i[N[\{a_1\}]\,x\,N[\{a_2\}]] \;\cup\; D_1[\{\mathbf{((2*3)+(4*5))}\}] =$$

g_1[N[{**(2*3)**}] x N[{**(4*5)**}]] ∪ g_3[N[{**(2**}] x N[{**3)+(4*5)**}]] ∪
g_3[N[{**(2*3)+(4**}] x N[{**5)**}]] =
g_1[{**6**} x {**20**}] ∪ g_3[∅ x N[{**3)+(4*5)**}]] ∪ g_3[N[{**(2*3)+(4**}] x ∅] =
g_1[{(**6**,**20**)}] ∪ g_3[∅] ∪ g_3[∅] = g_3[{(**6**,**20**)}] = {**26**}
N[{ **((2*3)+(4*5))** }] = {**26**} ∪ ∅ ∪ ∅ = {**26**}

4.3.3 Mehrdeutige Terme (mit verschiedenen Werten)

4.3.3.1 Motivation

Es wird beabsichtigt, Terme der folgenden einfachen Form zu definieren und die Werte davon zu berechnen:
3 + 5 + 7 ---> Wert = 15
10 - 5 - 1 ---> Wert = 4 = (10-5)-1 oder Wert = 6 = 10-(5-1)
100 / 10 / 2 ---> Wert = 5 = (100/10)/2 oder Wert 5 = 100/(10/2) = 20
10 ÷ 2 ---> Wert = 10/2 = 5 oder Wert = 10-2 = 8
3:5 + 8:5 ---> Wert = 11:5

4.3.3.2 Definition

A = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; + ; - ; * ; / ; ÷ ; : }*

B = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; - ; : }*
|Q = Menge der rationalen Zahlen $\subset$ B
Eine rationale Zahl wird durch (evtl. durch ein negatives Vorzeichen) und ein Paar von natürlichen Zahlen angegeben, das durch einen Doppelpunkt getrennt ist.
3:5 steht somit für 3/5 = 0,6

|G| = 4
R_A : = { (∅, (q,q)) | q ∈|Q }
also: D_1 = { (q,q)) | q ∈ Q } und D_1[{z}] = {z}
Für alle a_1∈A a_2 ∈A gilt per Definition:
$f_1((a_1, a_2)) = a_1 + a_2$
$f_2((a_1, a_2)) = a_1 - a_2$
$f_3((a_1, a_2)) = a_1 * a_2$
$f_4((a_1, a_2)) = a_1 / a_2$
$f_5((a_1, a_2)) = a_1 \div a_2$

Für alle b_1∈|Q b_2 ∈|Q gilt per Definition:
$g_1((b_1, b_2))$ = add(b_1, b_2)
$g_2((b_1, b_2))$ = sub(b_1, b_2)
$g_3((b_1, b_2))$ = mul(b_1, b_2)
$g_4((b_1, b_2))$ = div(b_1, b_2)
g_5 = { ((b_1, b_2) , sub(b_1, b_2)) | b_1∈|Q ∧ b_2∈|Q }∪ { ((b_1, b_2) , div(b_1, b_2)) | b_1∈|Q ∧ b_2∈|Q }

Bemerkung:
Das Zeichen ÷ ist ähnlich dem aus der Mitternachtsformel bekanntem Zeichen ± zu interpretieren.

4.3.3.3 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 2

1) $\forall i \leq |G|$ f_i entscheidbar und $g_i[]$ ist berechenbar und $\forall (b_1, ..., b_r) \in B^*$ $|g_i[\{(b_1, ..., b_r)\}]| <$ 00 und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a \in A$ $D_1[\{a\}] <$ 00

2) Die Relation < ist eine längen-lexikographische Ordnung auf $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ mit $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$ und A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((a_1, a_2), a) \in f_i \implies a_1 < a \wedge a_2 < a$

4.3.3.4 Konkrete Beispiele (Anwendung des Satzes)

1) $N[\{z\}]$, wobei z eine rationale Zahl ist.
$N[\{\mathbf{z}\}] = D_1[\{\mathbf{z}\}] = \{\mathbf{z}\}$

2) $N[\{\mathbf{*3}\}]$
$D_1[\{ \mathbf{*3} \}] = \varnothing$
$Z(\mathbf{*3}) = \varnothing$
$N[\{\mathbf{*3}\}] = D_1[\{\mathbf{*3}\}] = \varnothing \implies$
$N[\{\mathbf{*3}\}] = \varnothing$

3) $N[\{r - s\}]$, wobei r und s rationale Zahlen sind
$D_1[\{\mathbf{r\text{-}s}\}] = \varnothing$
$Z(\mathbf{r\text{-}s}) = \{ (\mathbf{r}, \mathbf{s} , 2) \}$
$N[\{\mathbf{r\text{-}s}\}] = g_2[N[\{\mathbf{r}\}] \text{ x } N[\{\mathbf{s}\}]] \cup D_1[\{\mathbf{r\text{-}s}\}] = g_2[\{\mathbf{r}\} \text{ x } \{\mathbf{s}\}] \cup D_1[\{\mathbf{r\text{-}s}\}] =$
$g_2[\{(\mathbf{r},\mathbf{s}) \}] = \{ sub(\mathbf{r},\mathbf{s}) \} \implies$
$N[\{\mathbf{r\text{-}s}\}] = \{ sub(\mathbf{r},\mathbf{s}) \}$

4) $N[\{ \mathbf{10 - 7 - 1}\}]$)
$D_1[\{\mathbf{10 - 7 - 1}\}] = \varnothing$
$Z(\mathbf{10 - 7 - 1}) = \{ (\mathbf{10}, \mathbf{7\text{-}1} , 2) , (\mathbf{10\text{-}7}, \mathbf{1} , 2) \}$
$$N[\{\mathbf{10 - 7 - 1}\}] = \bigcup_{(a_1,...,a_r,i) \in Z(a)} g_i[N[\{a_1\}] x ... x N[\{a_r\}]] \cup D_1[\{\mathbf{10 - 7 - 1}\}] =$$
$g_2[N[\{\mathbf{10}\}] \text{ x } N[\{\mathbf{7\text{-}1}\}]] \cup g_2[N[\{\mathbf{10\text{-}7}\}] \text{ x } N[\{\mathbf{1}\}]] \cup D_1[\{\mathbf{10\text{-}7\text{-}1}\}] =$
$g_2[\{\mathbf{10}\} \text{ x } \{sub(\mathbf{7,1})\}] \cup g_2[\{sub(\mathbf{10,7})\} \text{ x } \{\mathbf{1}\}] =$
$g_2[\{\mathbf{10}\} \text{ x } \{\mathbf{6}\}] \cup g_2[\{\mathbf{3}\} \text{ x } \{\mathbf{1}\}] = g_2[\{(\mathbf{10,6})\}] \cup g_2[\{(\mathbf{3,1})\}] = \{\mathbf{4}\} \cup \{\mathbf{2}\} = \{\mathbf{4} ; \mathbf{2}\} \implies$
$N[\{\mathbf{10 - 7 - 1}\}] = \{\mathbf{4} ; \mathbf{2}\}$

5) $N(\mathbf{r} \div \mathbf{s})$, wobei r und s rationale Zahlen sind und $r \neq s$.
$D_1[\{\mathbf{r \div s}\}] = \varnothing$
$Z(\mathbf{r \div s}) = \{ (\mathbf{r}, \mathbf{s} , 5) \}$
$$N[\{\mathbf{r \div s}\}] = \bigcup_{(a_1,...,a_r,i) \in Z(\mathrm{r}\div)} g_i[N[\{a_1\}] x ... x N[\{a_r\}]] \cup D_1[\{\mathbf{r \div s}\}] =$$
$g_5[N[\{\mathbf{r}\}] \text{ x } N[\{\mathbf{s}\}]] = g_5[\{\mathbf{r}\} \text{ x } \{\mathbf{s}\}] = g_5[\{(\mathbf{r},\mathbf{s}) \}] = \{ sub(\mathbf{r},\mathbf{s}), div(\mathbf{r},\mathbf{s}) \}$
$N[\{\mathbf{r\text{-}s}\}] = \{sub(\mathbf{r},\mathbf{s}), div(\mathbf{r},\mathbf{s}) \}$

6) N[{**30 ÷ 6 ÷ 4**}]

D_1[{**30 ÷ 6 ÷ 4**}] = ∅

Z(**30 ÷ 6 ÷ 4**) = { (**30÷6**, **4** , 5) , (**30**, **6÷4** , 5) }

N[{**30 ÷ 6 ÷ 4**}] = $\bigcup_{(a_1,\ldots,a_r,i)\in Z(30\square\ )} g_i[N[\{a_1\}]x\ldots xN[\{a_r\}]]$ ∪ D_1[{**30 ÷ 6 ÷ 4**}] =

g_5[N(**30 ÷ 6**) x N(**4**)] ∪ g_5[N(**30**) x N(**6÷4**)] =

g_5[{**24**;**5**} x {**4**}] ∪ g_5[{**30**} x {**2**; **1**,**5**}] =

g_5[{(**24**;**4**) ; (**5**;**4**)}] ∪ g_5[{(**30**;**2**) ; (**30**;**1**,**5**)}] = (Lemma L2)

g_5[{(**24**;**4**)}] ∪ g_5[{(**5**;**4**)}] ∪ g_5[{(**30**;**2**)}] ∪ g_5[{(**30**;**1**,**5**)}] =

{sub(**24**;**4**), div(**24**;**4**)} ∪ {sub(**5**;**4**), div(**5**;**4**)} ∪ {sub(**30**;**2**), div(**30**;**2**)} ∪

sub(**30**;**1**,**5**), div(**30**;**1**,**5**)} =

{**20** ; **6**} ∪ {**1** ; **1**,**25**} ∪ {**28** ; **15**} ∪ {**28**,**5** ; **20**} =

{ **1** ; **1**,**25** ; **6** ; **15** ; **18**; **28** ; **28**,**5** }

4.3.4 Ein "Spiel"

Gegeben sind nummerierte Kugeln, die als Inhalt verschiedene Zahlenwerte haben.
Diese kann man durch verschiedene Zahlentupel darstellen, die alle den gleichen ersten Wert haben, wie z.B: (3, 5) (3,9) (3, 4)
Jeweils zwei Kugeln werden kombiniert und erzeugen eine dritte Kugel.
Ein Spieler muss raten, ob die Summe aller Zahlen in einer bestimmten Kugel einen bestimmten Wert hat (bzw. über oder unterschreitet).

Die Regeln:
$A = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
$f_1((a_1, a_2)) = 2a_1 + a_2$
$g_1 = \{ ((b_1, b_2) , b_1+2b_2) \mid b_1 \in B \wedge b_2 \in B\} \cup \{ ((b_1, b_2) , b_1+b_2) \mid b_1 \in B \wedge b_2 \in B\}$
$R_A = \{ (\varnothing,(1,3)), (\varnothing,(2,1)) \}$
$|G| = 1$

Regelnkurznotation: $(a_1 \in A , a_2 \in A, b_1 \in B , b_2 \in B)$

$$\frac{\varnothing}{(1,3)} \qquad \frac{\varnothing}{(2,1)} \qquad \frac{\{(a_1,b_1), (a_2,b_2)\}}{(2a_1+a_2,b_1+2b_2)} \qquad \frac{\{(a_1,b_1), (a_2,b_2)\}}{(2a_1+a_2,b_1+b_2)}$$

4.3.4.1 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 2

1) $\forall i \leq |G|=1$ f_i entscheidbar und $g_i[]$ ist berechenbar und
$\forall (b_1, ..., b_r) \in B^*$ $|g_i[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a \in A$ $D_1[\{a\}] < 00$

2) Die Relation < ist die bekannte Relation auf A = |N mit folgender Eigenschaft:
$((a_1, a_2),a) \in f_i \quad ==> \quad a_1 < a \wedge a_2 < a$

4.3.4.2 "iterative" Berechnungen

D0:
∅

D1:
(1, 3) ; (2, 1)

D2:
(1, 3) ; (2, 1) ==> (4,5) ; (4,4)
(2, 1) ; (1, 3) ==> (5,7) ; (5,4)
(1, 3) ; (1, 3) ==> (3,9) ; (3,6)
(2, 1) ; (2, 1) ==> (6,3) ; (6,2)
also:
(1, 3) ; (2, 1)
(3,9) ; (3,6)
(4,5) ; (4,4)
(5,7) ; (5,4)
(6,3) ; (6,2)

D3:
(1, 3) ; (3,9) ==> (5,21) ; (5,12)
(3,9) ; (1, 3) ==>(7,15) ; (7,12)
(3,9) ; (3,9) ==> (9,27) ; (9,18)
(1, 3) ; (3,6) ==> (5,15) ; (5,9)
(3,6) ; (1, 3) ==> (7,12) ; (7,9)
(3,6) ; (3,6) ==> (9,18) ; (9,12)
(1, 3) ; (4,5) ==> (6,13) ; (6,8)
(4,5) ; (1, 3) ==> (9,11) ; (9,8)
(4,5) ; (4,5) ==> (12,15) ; (12,10)
....

4.3.4.3 "rekursive" Berechnungen

1)
$D_1[\{1\}] = \{3\}$
$Z(\mathbf{1}) = \emptyset$, also
$N[\{\mathbf{1}\}] = \{\mathbf{3}\}$

2)
$D_1[\{\mathbf{2}\}] = \{\mathbf{1}\}$
$Z(\mathbf{2}) = \emptyset$, also
$N[\{\mathbf{2}\}] = \{\mathbf{1}\}$

3)
$D_1[\{\mathbf{3}\}] = \emptyset$
$Z(\mathbf{3}) = \{ (\mathbf{1}, \mathbf{1} , 1) \}$, also
$N[\{\mathbf{3}\}] = \bigcup\limits_{(a_1,...,a_r,i)\in Z(3)} g_i[N[\{a_1\}]x...xN[\{a_r\}]] \cup D_1[\{\mathbf{3}\}] =$
$g_1[N[\{\mathbf{1}\}] \text{ x } N[\{\mathbf{1}\}]] \cup D_1[\{\mathbf{3}\}] = g_1[\{\mathbf{3}\} \text{ x } \{\mathbf{3}\}] = g_1[\{(\mathbf{3},\mathbf{3})\}] = \{\mathbf{6},\mathbf{9}\}$, also:
$N[\{\mathbf{3}\}] = \{\mathbf{6},\mathbf{9}\}$

4)
$D_1[\{\mathbf{4}\}] = \emptyset$
$Z(\mathbf{4}) = \{ (\mathbf{1}, \mathbf{2} , 1) \}$, also
$N[\{\mathbf{4}\}] = \bigcup\limits_{(a_1,...,a_r,i)\in Z(4)} g_i[N[\{a_1\}]x...xN[\{a_r\}]] \cup D_1[\{\mathbf{4}\}] =$
$g_1[N[\{\mathbf{1}\}] \text{ x } N[\{\mathbf{2}\}]] \cup D_1[\{\mathbf{3}\}] = g_1[\{\mathbf{3}\} \text{ x } \{\mathbf{1}\}] = g_1[\{(\mathbf{3},\mathbf{1})\}] = \{\mathbf{4},\mathbf{5}\}$
also:
$N[\{\mathbf{4}\}] = \{\mathbf{4},\mathbf{5}\}$

5)
$D_1[\{\mathbf{5}\}] = \emptyset$
$Z(\mathbf{5}) = \{ (\mathbf{1}, \mathbf{3} , 1) , (\mathbf{2}, \mathbf{1} , 1) \}$, also
$N[\{\mathbf{5}\}] = \bigcup\limits_{(a_1,...,a_r,i)\in Z(5)} g_i[N[\{a_1\}]x...xN[\{a_r\}]] \cup D_1[\{\mathbf{5}\}] =$
$g_1[N[\{\mathbf{1}\}] \text{ x } N[\{\mathbf{3}\}]] \cup g_1[N[\{\mathbf{2}\}] \text{ x } N[\{\mathbf{1}\}]] \cup D_1[\{\mathbf{3}\}] =$
$g_1[\{\mathbf{3}\} \text{ x } \{\mathbf{6},\mathbf{9}\}] \cup g_1[\{\mathbf{1}\} \text{ x } \{\mathbf{3}\}] =$
$g_1[\{(\mathbf{3},\mathbf{6}), (\mathbf{3},\mathbf{9})\}] \cup g_1[\{(\mathbf{1},\mathbf{3})\}] = \{\mathbf{9}, \mathbf{15}, \mathbf{12}, \mathbf{21}, \mathbf{4}, \mathbf{7} \}$
also:
$N[\{\mathbf{5}\}] = \{\mathbf{4}, \mathbf{7} , \mathbf{9} , \mathbf{12} , \mathbf{15} , \mathbf{21}\}$

Grenzen des RekIndsatz 2

4.3.5 Beispiel

Die Regeln der Bruchrechnung in der Mathematik

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 y_2} \qquad \text{(R1)}$$

$$\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1 y_2} \qquad \text{(R2)}$$

$$\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \qquad \text{(R3)}$$

$$\frac{x_1}{y_1} : \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 y_2}{y_1 x_2} \qquad \text{(R4)}$$

motivieren die Regeln:

$R = \{ (\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}, (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1, y_1 \cdot y_2) ,$
$(\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}, (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 , y_1 \cdot y_2) ,$
$(\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}, (x_1 \cdot x_2 , y_1 \cdot y_2)) ,$
$(\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}, (x_1 \cdot x_2 , y_1 \cdot y_2)) \} \cup$
$\{ (\varnothing, (2,3)) , (\varnothing, (4,5)) \}$

Leider kann man dann den RekIndsatz 2 nicht mehr anwenden, da die Voraussetzung nicht mehr gilt:
z..B. hängt der Zähler $x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$ bei (R1) nicht mehr nur von x_1 und x_2 ab !

4.4 Beispiele zum RekIndsatz 4 Version 2

4.4.1.1 Definition allgemeiner Terme

GZ sei eine endliche Menge
$X = (GZ \cup \{ (;) ; f_{21}; ...; f_{2n} ; f_{11}; ...; f_{1m} ; g_{11}; ...; g_{1r} \})$ *
wobei GZ irgendwelche Grundzeichen sind wie a, ..., z
$f_{21}; ...; f_{2n}$ sind 2-stellige Operatoren wie z.B. die Addition
$f_{11}; ...; f_{1m}$ sind einstellige Präfixoperatoren wie z.B. das Vorzeichen -
$g_{11}; ...; g_{1r}$ sind Postfixoperatoren wie z.B. * bei regulären Ausdrücken.

$R_T =$
$\{(\{x_1, x_2\}, (x_1\ f_{21}\ x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \quad \cup$
...
$\{ (\{x_1, x_2\}, (x_1\ f_{2n}\ x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \quad \cup$
$\{ (\{x\}, (f_{11}x)) \mid x \in X \quad \cup$
...
$\{ (\{x\}, (f_{1m}x)) \mid x \in X \quad \cup$
$\{ (\{x\}, (x\ g_{11})) \mid x \in X \} \cup$
...
$\{ (\{x\}, (x\ g_{1r})) \mid x \in X \} \cup$
$\cup\ R_{TA}$
wobei
$R_{TA} := \{ (\varnothing, a) \mid a \in GZ \}$

Regelnkurznotation: ($r \in X$, $s \in X$)

$\varnothing$	$\{r ; s\}$	$\{r \}$	$\{r\}$
--- $a \in GZ$	-------	-------	-------
a	$(r\ f_{2i}\ s)$	$(f_{1i}\ r)$	$(r\ g_{1i})$

Die induktive definierte Menge $I(R_T)$ ist die Menge aller allgemeinen Terme

4.4.1.1.1 Hilfslemma HL1

Ein allgemeiner Term beginnt entweder mit der öffnenden Klammer (und endet mit der schliessenden Klammer) oder der Term besteht nur aus einem Grundzeichen aus GZ.

Beweis: (Induktion über Termaufbau)
B(T) :<==> T beginnt entweder mit der öffnenden Klammer (und endet mit der schliessenden Klammer) oder T besteht nur aus einem Grundzeichen aus GZ.
1) $T=a \in GZ$
trivial

2) Induktionsvoraussetzung $B(T1) \in I(R_T)$ und $B(T2) \in I(R_T)$
also folgt sofort $B((T1\ f_{2i}\ T2))$ und $B((T1\ g_{1i}))$ und $B((g_{1i}\ T1))$

4.4.1.1.2 Hilfslemma HL2

In einem allgemeinen Term ist die Anzahl schliessender Klammern gleich der Anzahl öffnender Klammern.

Beweis: (Induktion über Termaufbau)
B(T) :<==> Anzahl öffnender Klammern in T = Anzahl schliessender Klammern in T
1) T=a$\in$GZ
Da ein Grundzeichen keine Klammern enthält, gilt die Aussage trivialerweise.

2) Induktionsvoraussetzung B(T1)$\in$ I(R_T) und B(T2) $\in$ I(R_T)
also folgt sofort B((T1 f_{2i} T2)) und B((T1 g_{1i})) und B((g_{1i} T1))

4.4.1.1.3 Hilfslemma HL3

Die Zeichenkette s ist echtes Anfangsstück eines allgemeinen Terms T,
kurz s < T ==>
Die Anzahl der öffnenden Klammern in s ist größer als die Anzahl der schliessenden Klammern in s.

Beweis: (Induktion über Termaufbau)
B(T) :<==> obige Aussage
1) a$\in$GZ
trivial

2) Es gelte Behauptung für einen Allgemeinen Term T_1 und
für einen Allgemeinen Term T_2.
Zeige Behauptung für (T1 f_{2i} T2)

Betrachte:

(	T1	f_{2i}	T2	)

s beginnt bei "(" und geht maximal bis ein Zeichen vor ")"

Fall1: s = (
trivial

Fall2: Das Ende von s reicht in T1 rein
Da nach Voraussetzung die Anzahl der öffnenden Klammern größer der Anzahl der schliessenden Klammern ist, folgt die Behauptung.

Fall3: Das Ende von s ist " f_{2i}"
trivial

Fall4: Das Ende von s reicht in T2 rein
Da nach Voraussetzung die Anzahl der öffnenden Klammern größer der Anzahl der schliessenden Klammern ist, folgt die Behauptung.

3) Es gelte Behauptung für einen Allgemeinen Term T
Zeige Behauptung für (T g_{1i})

Betrachte:

$$\underbrace{\boxed{(}\boxed{\quad T \quad}\boxed{g_{1i}}}\boxed{)}$$

s beginnt bei "(" und geht maximal bis ein Zeichen vor ")"

Fall1: s = (
trivial

Fall2: Das Ende von s reicht in T rein
Da nach Voraussetzung die Anzahl der öffnenden Klammern größer der Anzahl der schliessenden Klammern ist, folgt die Behauptung.

Fall3: Das Ende von s ist "g_{1i}"
trivial

4) Es gelte Behauptung für einen allgemeinen Term T
Zeige Behauptung für (f_{1i} T)

Betrachte:

$$\underbrace{\boxed{(}\boxed{f_{1i}}\boxed{\quad T2 \quad}}\boxed{)}$$

s beginnt bei "(" und geht maximal bis ein Zeichen vor ")"

Fall1: s = (
trivial

Fall2: Das Ende von s reicht in T rein
Da nach Voraussetzung die Anzahl der öffnenden Klammern größer der Anzahl der schliessenden Klammern ist, folgt die Behauptung.

Fall3: Das Ende von s ist "f_{1i}"
trivial

4.4.1.1.4 Hilfslemma HL4

Ein allgemeiner Term kann nicht echtes Anfangsstück eines anderen allgemeinen Terms sein.

Beweis:
Wäre T1 echtes Anfangsstück von T, dann wäre nach vorigem Lemma:
Die Anzahl der öffnenden Klammern in T1 ist größer als die Anzahl der schliessenden Klammern in T1. Dann wäre nach einem obigen Lemma T1 kein allgemeiner Term.

$$\overbrace{\boxed{\qquad T1 \qquad}\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}^{T}$$

4.4.1.1.5 Satz über Monotektonie von allgemeinen Termen

Jeder allgemeiner Term ist monotektonisch aufgebaut, d.h:
R ist eine Regelmenge über X.
I(R) ist monotektonisch : <==>
$\forall x \in I(R)\ \exists$ genau ein $M \subset I(R)\ (M,x) \in R$

d.h:
$\forall T \in I(R_T)\ \exists$ genau ein $T1 \in I(R)\ \exists$ genau ein $T2 \in I(R)$ $(\{T1,T2\},(T1\ f_{2i}\ T2)) \in R_T$ oder $(\{T\},(\ (f_{1i}\ T)\ ) \in R_T$ oder $(\{T\},(\ (T\ g_{1i})\ ) \in R_T$ oder $(\emptyset,T) \in R_T$

Beweis:
Eindeutigkeit:
1)
Annahme: $T = (T1\ f_{2i}\ T2) = (T'1\ f_{2j}\ T'2)$ wobei $T1 \neq T'1$ und $T2 \neq T'2$ und $T1,T'1,T2,T'2$ allgemeine Terme sind.

(	T1	f_{2i}	T2	)

Wäre T nicht eindeutig, könnte T wie folgt aussehen.

(	T'1	f_{2j}	T'2	)

Damit wäre T'1 echtes Anfangsstück von T1. Widerspruch.

2)
Annahme: $T = (f_{1i}\ T1) = (T2\ g_{1j})$ wobei $T1,T2,T$ allgemeine Terme sind.

(	f_{1i}	T1	)

Wäre T nicht eindeutig, könnte T wie folgt aussehen.

(	T2	g_{1j}	)

Damit würde T2 mit f_{1i} beginnen. Widerspruch

3)
Annahme: $T = (f_{1i}\ T') = (T1\ f_{2j}\ T2)$ wobei $T1,T2,T'$ allgemeine Terme sind.

(	f_{1i}	T'	)

Wäre T nicht eindeutig, könnte T wie folgt aussehen.

(	T1	f_{2i}	T2	)

Damit würde T1 mit f_{1i} beginnen. Widerspruch

4)
Annahme: $T = (T' \; g_{1i}) = (T1 \; f_{2j} \; T2)$ wobei T1,T2,T' allgemeine Terme sind.

(	T'2	g_{1j}	)

Wäre T nicht eindeutig, könnte T wie folgt aussehen.

(	T1	f_{2i}	T2	)

Damit würde T2 mit g_{1i} enden. Widerspruch

4.4.2 Zahlenterme mit Werten

4.4.2.1 Motivation

Es wird beabsichtigt, Zahlenterme der folgenden einfachen Form zu definieren und die Werte davon zu berechnen:
(3+5)   ---> Wert = 8
(((3+5)*(4+1))+2)   ---> Wert = 42

4.4.2.2 Zahlenterme

Eine rationale Zahl wird durch (evtl. durch ein Vorzeichen) und ein Paar von natürlichen Zahlen angegeben, das durch einen Doppelpunkt getrennt ist.
3:5 steht somit für 3/5 = 0.6
|Q = Menge der rationalen Zahlen.

X = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; (;) ; + ; - ; * ; / ; ÷ ; : }*

R_{Terme} =
$\{(\{x_1, x_2\}, (x_1 + x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \cup$
$\{ (\{x_1, x_2\}, (x_1 - x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \cup$
$\{ (\{x_1, x_2\}, (x_1 * x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\} \cup$
$\{ (\{x_1, x_2\}, (x_1 / x_2)) \mid x_1 \in X \wedge x_2 \in X\}\} \cup$
$\{ (\emptyset, a) \mid a \in Q \}$

Regelnkurznotation: (r∈X , s∈X)

∅	{r ; s}	{r ; s}	{r ; s}	{r ; s}
--- wobei a∈Q	-------	--------	----------	----------
a	(r + s)	(r - s)	(r * s)	(r / s)

Die induktive definierte Menge I(R_{Terme}) ist die Menge aller arithmetischen Zahlenterme.

4.4.2.3 Regeln für Zahlenterme mit Werten

A = I(R_{Terme})
B = |Q $\cup$ {? }

f_1 = { ((T_1,T_2),(T_1+T_2)) | T_1 und T_2 sind arithmetische Zahlenterme }
f_2 = { ((T_1,T_2),(T_1-T_2)) | T_1 und T_2 sind arithmetische Zahlenterme }
f_3 = { ((T_1,T_2),(T_1*T_2)) | T_1 und T_2 sind arithmetische Zahlenterme }
f_4 = { ((T_1,T_2),(T_1/T_2)) | T_1 und T_2 sind arithmetische Zahlenterme }
g_1 = { ((b_1, b_2), add(b_1, b_2)) | $b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q$ }
g_2 = { ((b_1, b_2), sub(b_1, b_2)) | $b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q$ }
g_3 = { ((b_1, b_2), mul(b_1, b_2)) | $b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q$ }
g_4 = { ((b_1, b_2), div(b_1, b_2)) | $b_1 \in Q \wedge b_2 \in Q$ } $\cup$ { ((b, 0), ?) | b$\in$Q }
$\cup$ { ((? , ?), ?) } $\cup$ { ((b , ?), ?) | b$\in$Q } $\cup$ { ((? , b), ?) | b$\in$Q }
F = { f_1 , f_2 , f_3 , f_4 }
S = {(a, a) | a $\in$Q }
also Axiome = { ($\emptyset$, (a, a)) | a $\in$Q }

4.4.2.4 Regelnkurznotation

$\emptyset$
-------- r $\in$Q
(r ; r)

(T_1 , w_1) , (T_2 , w_2)
-------------------------- falls T_1 und T2 ein arithmetische Zahlenterm ist
((T_1+T_2), add(w_1,w_2))

(T_1 , w_1) , (T_2 , w_2)
-------------------------- falls T_1 und T2 ein arithmetische Zahlenterm ist
((T_1-T_2), sub(w_1,w_2))

(T_1 , w_1) , (T_2 , w_2)
-------------------------- falls T_1 und T2 ein arithmetische Zahlenterm ist
((T_1*T_2), mul(w_1,w_2))

(T_1 , w_1) , (T_2 , w_2)
-------------------------- falls T_1 und T2 ein arithmetische Zahlenterm ist
((T_1/T_2), g_4(w_1,w_2))

4.4.2.5 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) $\forall f_i \in F$ f_i entscheidbar und $g_i[]$ ist berechenbar und $\forall (b_1, ..., b_r) \in B^*$ $|g_i[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a \in A$ $D_1[\{a\}] < 00$

2)
$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ wird längen-lexikographisch geordnet mit: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((a_1, a_2),a) \in f_i \implies a_1 < a \wedge a_2 < a$

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.

$R_F = R_{Terme} = \{ (\{T_1, T_2\}, T) \mid ((T_1, T_2),T) \in F\} \cup \{(\emptyset,a) \mid a \in Q \}$

4) $(P(A), R_F , A)$ ist linkseindeutig und rechtstotal
Da R_{Terme} ($=R_F$) monotektonisch ist, folgt Behauptung sofort.

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar

6) $\forall f_i \in F$ g_i ist rechtseindeutig
klar, da g_i jeweils eine Abbildung ist.

7) S ist rechtseindeutig
$S = \{ (a, a)) \mid a \in Q \}$

4.4.2.6 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $a \in A$=Menge aller arithmetische Zahlenterm , dann gilt:
$N(a) = S(a)$ falls $(\emptyset, a) \in R_F$
$N(a) = g_i((N(a_1), N(a_2)))$ sonst, wobei $Z(a) := \{ (a_1, a_2, i) \}$

also:

Wenn $a \in A$=Menge aller arithmetische Zahlenterme , dann gilt:
$N(a) = a$ falls $a \in Q$
$N((a_1+a_2)) = add((N(a_1), N(a_2)))$
$N((a_1-a_2)) = sub((N(a_1), N(a_2)))$
$N((a_1*a_2)) = mul((N(a_1), N(a_2)))$
$N((a_1/a_2)) = g_4((N(a_1), N(a_2)))$

4.4.2.7 Beispiel

1) N((3/0))
$N((3/0)) = g_4((N(3) , N(0))) = g_4((3,0)) = ?$

2) N((7-7))
$N((7-7)) = sub((N(7),N(7))) = sub((7,7)) = 0$

3) N(((3/0)/(7-7)))
$N(((3/0)/(7-7))) = g_4((N((3/0)) , N((7-7))) =$
$g_4((? , 0)) = ?$

4.4.3 Semantik regulärer Ausdrücke

4.4.3.1 regulärer Ausdruck

Ein regulärer Ausdruck wurde oben definiert.
Er ist monotektonisch aufgebaut.
Zu einem regulären Ausdruck gehört eine Sprache, wie z.B. x* (wobei x ein Zeichen ist) die Menge aller Wörter x, xx, xxx, usw. gehört (einschließlich des leeren Worte).
Das Ziel ist hier zu testen, ob eine Zeichenkette zu einer Sprache eines regulären Ausdrucks gehört.

4.4.3.2 Regeln für reguläre Ausdrücke und deren Sprache

A = Menge aller regulären Ausdrücke.
V : = {a ; ... ; z }   V für Vocabulary
V* := Menge aller Wörter über V
B = P(V*) = Menge aller Teilmengen von V*

E sei $L \subset V^*$, also $L \in P(V^*)$ und $T \subset V^*$, also $T \in P(V^*)$; d.h. L und R sind Sprachen.
Dann wird definiert:
leeres Wort : = ""
$\bigcup_{i \in N} L^i$:= "" $\cup$ L $\cup$ L o L $\cup$ L o L o L $\cup$ ...
L o T : = {lr | $l \in L$ und $r \in R$ } wobei lr die Konkatenation von l und r ist.

f_1 = { $((r_1, r_2), (r_1 + r_2))$ | r_1 und r_2 sind reguläre Ausdrücke }
f_2 = { $((r_1, r_2), (r_1 \mid r_2))$ | r_1 und r_2 sind reguläre Ausdrücke }
f_3 = { $(r, (r^*))$ | r ist ein regulärer Ausdruck }
$g_1 = \{ ((L_1, L_2),\ L_1 \text{ o } L_2) \mid L_1 \in B \wedge L_2 \in B \}$
$g_2 = \{ ((L_1, L_2),\ L_1 \cup L_2) \mid L_1 \in B \wedge L_2 \in B \}$
$g_3 = \{ (L,\ \bigcup_{i \in N} L^i) \mid L \in B \}$
$F = \{ f_1 , f_2 , f_3 \}$
S : = {(a, a) | a ist Kleinbuchstabe }
also Axiome = { ($\emptyset$, (a, a)) | a ist Kleinbuchstabe }

4.4.3.3 Regelnkurznotation

$\varnothing$
--------- r ist Kleinbuchstabe
(r ; {r})

$(r_1 , L_1) , (r_2 , L_2)$
-------------------------- falls r_1 und r_2 ein regulärer Ausdruck ist
$((L_1+L_2), L_1 \text{ o } L_2)$

$(r_1 , L_1) , (r_2 , L_2)$
-------------------------- falls r_1 und r_2 ein regulärer Ausdruck ist
$((r_1 \mid r_2), L_1 \cup L_2)$

(r , L)
-------------------------- falls r ein regulärer Ausdruck ist
$((r^*), \bigcup_{i \in N} L^i)$

4.4.3.4 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

Zur Berechenbarkeit:
Betrachte das Kriterium von RekIndsatz 2
$\forall(b_1, ..., b_r)\in B^*$ $|g_i[\{(b_1, ..., b_r)\}] | < 00$
konkret:
$g_3 = \{ (L, \bigcup_{i \in N} L^i) \mid L\in B \}$, also $|g_3[\{(L)\}] | = 00$
Damit ist dieses Kriterium nicht mehr erfüllt.
Es kann also nicht mehr die Berechenbarkeit von N gefolgert werden.

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$R_F = R_R := \{ (\{t_1, t_2\}, t) \mid ((t_1, t_2),t)\in F\} \cup \{(\varnothing,a) \mid a\in Q \}$ = Menge aller regulärer Ausdrücke.

4) $(P(A), R_F , A)$ ist linkseindeutig und rechtstotal
Da R_R ($=R_F$) monotektonisch ist, folgt Behauptung sofort.

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar

6) $\forall f_i\in F$ g_i ist rechtseindeutig
klar, da g_i jeweils eine Abbildung ist.

7) S ist rechtseindeutig
S = { (a, a)) | a ist Kleinbuchstabe }

4.4.3.5 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $a \in A$=Menge aller regulären Ausdrücke, dann gilt:

$N(a) = D_1(a)$	falls $(\emptyset,a) \in R_F$
$N(a) = g_i(\ (N(a_1), N(a_2)) \ )$	falls $(\emptyset,a) \notin R_F$
	sonst, wobei $Z(a) := \{ (a_1, a_2, i) \}$

also:

k ist ein Kleinbuchstabe, a, a_1 und a_2 sind reguläre Ausdrücke. Dann gilt:

$N(a) = \{a\}$	falls a ein Kleinbuchstabe
$N((a_1+a_2)) = N(a_1) \circ N(a_2)$	falls (a_1+a_2) regulärer Ausdruck
$N((a_1 \mid a_2)) = N(a_1) \cup N(a_2)$	falls $(a_1 \mid a_2)$ regulärer Ausdruck
$N((a^*)) = \bigcup_{i \in N} N(a)^i$	falls (a^*) regulärer Ausdruck

Wobei die Berechenbarkeit von N nicht mehr gefolgert werden kann !!!

Das macht aber nichts aus, da nur getestet werden soll, ob eine Zeichenkette z zu einer Sprache N(r) eines regulären Ausdrucks r gehört.
Dies wird im Folgenden behandelt.

4.4.4 Semantik regulärer Ausdrücke (praktische Anwendung)

Um programmtechnisch nachzuweisen, ob eine gegebene Zeichenfolge (der Länge n) zur Sprache eines regulären Ausdrucks gehört, kann man obigen Ansatz nicht verwenden, da $\bigcup_{i \in N} N(r)^i$ nicht mehr berechnet werden kann (unendlich viel Zeit benötigt).
Aber man kann ausnützen, daß die gegebene Zeichenfolge eine bestimmte Länge n hat.

4.4.4.1 Lemma

Es sei $|z| = n$ und $L \neq \emptyset$ und $L \neq \{""\}$, dann gilt:

$$\bigcup_{i \in N} L^i \; = \; "" \cup L \; \cup \; L \circ L \cup \ldots \cup L^n$$

Beweis:
zu zeigen:
$z \in "" \cup L \; \cup \; L \circ L \cup \ldots \cup L^n \cup L^{n+1} \cup \ldots \; \Longleftrightarrow \; z \in "" \cup L \; \cup \; L \circ L \cup \ldots \cup L^n$
1) <==
trivial

2) ==>
$z \in "" \cup L \; \cup \; L \circ L \cup \ldots \cup L^n \cup L^{n+1} \cup \ldots$
Also eistiert ein i mit $z \in L^i$
Fall 1: $i <= n$
also $z \in "" \cup L \; \cup \; L \circ L \cup \ldots \cup L^n$
Fall 2: $i > n$
also existieren l1, l2, ...,li mit
$l1 \in L$ und ... und $li \in L$ und $z = l1+\ldots+li$ (wobei + Konkatenation ist), also
$|z| > i > n$, also $n = |z| > n$, also $n \neq n$ (Widerspruch)

Das Ziel ist zu testen, ob eine Zeichenkette z zu einer Sprache eines regulären Ausdrucks r gehört. Dazu macht man folgende Definition:

4.4.4.2 Definition der Abbildung el

z ist eine Zeichenkette und r ist ein regulärer Ausdruck
Definiere die Abbildung el (intendiert Element von):
el(z , r) : = 1 , falls $z \in N(r)$
el(z , r) : = 0, falls $z \notin N(r)$

4.4.4.3 Satz

k ist ein Kleinbuchstabe, a, a_1 und a_2 sind reguläre Ausdrücke. Dann gilt:

$N(k) = \{k\}$
$N((a_1+a_2)) = N(a_1) \circ N(a_2)$
$N((a_1 \mid a_2)) = N(a_1) \cup N(a_2)$
$N((a^*)) = \bigcup_{i \in N} N(a)^i$

4.4.4.3.1 Satz

k ist ein Kleinbuchstabe, a, a_1 und a_2 sind reguläre Ausdrücke, z sei eine Zeichenkette. Dann gilt:

el(k, k) = 1

el(z, (a_1+a_2)) = $\sum\limits_{z=z1+z2} el(z_1,a_1)\cdot el(z_2,a_2)$

el(z, (a_1 | a_2)) = el(z, a_1) + el(z, a_2)

el(z, (a*)) = $\sum\limits_{z=z1+...+zj} el(z_1,a)\cdot ...\cdot el(z_2,a)$

und el ist berechenbar.

Bemerkungen:
Das Zeichen · ist das logische UND, + (bei der Summe) ist das logische ODER

Beweis:
1) regulärer Ausdruck k ist ein Kleinbuchstabe
el(k ,k) = 1 <==> k∈N(k) <==> k∈{k}
also
el(k , k) = 1

2) regulärer Ausdruck ist von der Form (a_1+a_2)
el(z , (a_1+a_2)) = 1 <==> z ∈ N((a_1+a_2)) <==> z ∈ N(a_1) o N(a_2) <==>
existiert eine Zerlegung z = z_1 + z_2 mit z_1 ∈ N(a_1) und z_2 ∈ N(a_2) <==>
existiert eine Zerlegung z = z_1 + z_2 mit el(z_1, a_1) = 1 und el(z_2, a_2) = 1 <==>
existiert eine Zerlegung z = z_1 + z_2 mit el(z_1, a_1) · el(z_2, a_2) = 1 <==>
$\sum\limits_{z=z1+z2} el(z_1,a_1)\cdot el(z_2,a_2)$ = 1, also: el(z , (a_1+a_2)) = $\sum\limits_{z=z1+z2} el(z_1,a_1)\cdot el(z_2,a_2)$

3) regulärer Ausdruck ist von der Form (a_1| a_2)
el(z , (a_1 | a_2)) = 1 <==> z ∈ N((a_1 | a_2)) <==> z ∈ N(a_1) ∪ N(a_2) <==>
z∈N(a_1) oder z ∈N(a_2) <==> el(z, a_1) = 1 oder el(z, a_2) = 1 <==>
el(z, a_1) + el(z, a_2) = 1, wobei + die mathematische Addition bedeutet, also:
el(z , (a_1 | a_2)) = el(z, a_1) + el(z, a_2)

4) regulärer Ausdruck ist von der Form (a*)
el(z , (a*)) = 1 <==> z∈N((a*)) <==> z∈N($\bigcup\limits_{i\in N} N(a)^i$) <==> z∈N($\sum\limits_{i=0}^{n} N(a)^i$) <==>
existiert eine Zerlegung z = z_1 + ... + z_j und j <= n mit z_1∈N(a) und ... z_j ∈ N(a) <==>
existiert eine Zerlegung z = z_1 + ... + z_j und j <= n mit el(z_1,a)=1 und ... el(z_j,a)=1 <==>
existiert eine Zerlegung z = z_1 + ... + z_j und j <= n mit el(z_1, a_1) = 1 · el(z_2, a_2) = 1 <==>
$\sum\limits_{z=z1+...+zj} el(z_1,a)\cdot ...\cdot el(z_2,a)$ = 1, also: el(z , (a*)) = $\sum\limits_{z=z1+...+zj} el(z_1,a)\cdot ...\cdot el(z_2,a)$

Bemerkung: Beweis für Berechenbarkeit fehlt noch !

4.4.5 Spiel: Nimm-Spiel

4.4.5.1 Beschreibung des Spiels

Auf dem Tisch liegt ein Haufen von z.B. anzahl = 5 Streichhölzern. Jeder Spieler muss eine Anzahl zwischen 1 und 3 Streichhölzern vom Tisch nehmen. Wer nicht mehr ziehen kann (weil kein Streichholz mehr da ist) hat verloren.
Man kann das Spiel auch verallgemeinern:
Statt maximal 3 Streichhölzer kann man maximal k Streichhölzer nehmen.

Möglicher Spielverlauf:
(2 , 3) Spieler1 zieht 2 Streichhölzer, also aktuelle Anzahl 5-2 = 3
(1 , 2) Spieler2 zieht 1 Streichholz, also aktuelle Anzahl 3-1 = 2
(2 , 0) Spieler1 zieht 2 Streichhölzer, also aktuelle Anzahl 2-2 = 0
Spieler 2 ist am Zug und hat verloren, weil der Haufen leer ist.

4.4.5.2 Regeln

A : = |N = Menge der natürlichen Zahlen, einschließlich 0 mit der bekannten Relation <
B = {-1 ; 1 }

$f = \{ \ ((n-3;\ n-2;\ n-1),n) \ | \ n \in A \wedge n \geq 3 \ \} \ \cup \ \{ ((0,1),2) \ ; ((0),1) \}$
F = { f }
g : B* --> B ist eine Abbildung mit
$g(\ (e_1, ..., e_r)\ ) = -\min(e_1, ..., e_r)$ mit $1 \leq r \leq 3$
Axiome von R = { (∅ ,(0,-1)) }

4.4.5.3 Ordnungsrelation < auf A

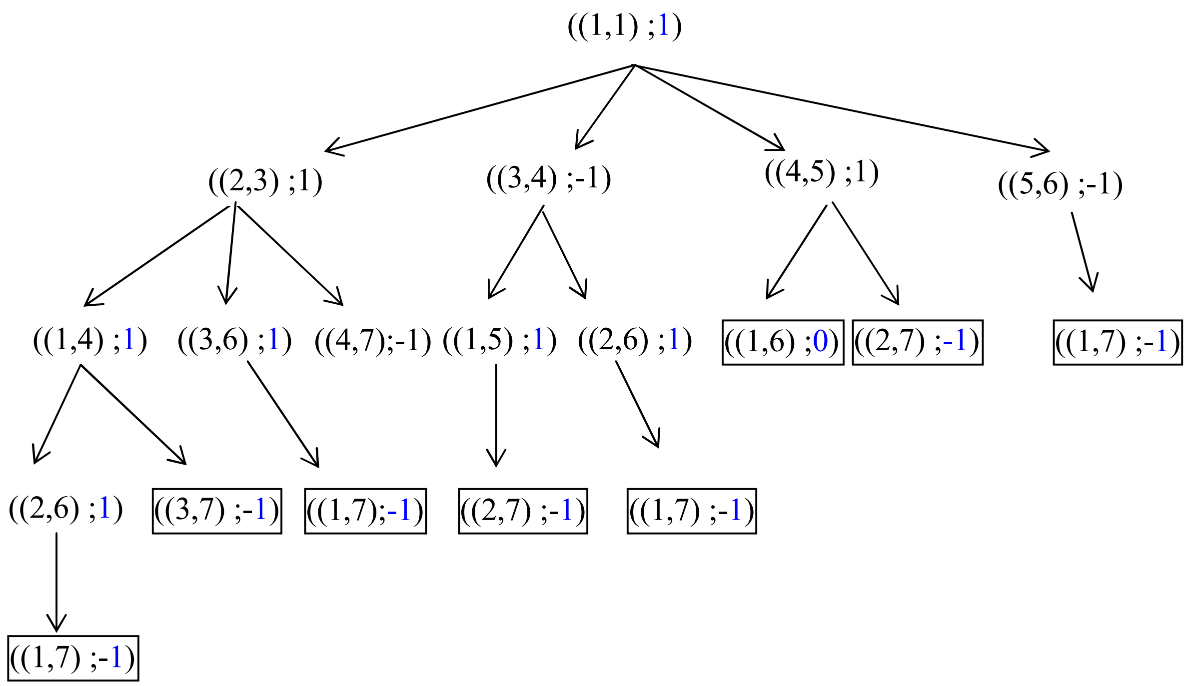
In A = |N wird die bekannte Relation < verwendet.

4.4.5.4 Regelnkurznotation

$$\frac{\emptyset}{(0\ ;\ -1)}$$

$$\frac{(z_1\ ,\ e_1),\ ...,\ (z_n\ ,\ e_n)}{(z, g((e_1,...,e_n))\ )}$$ falls $z_1, ..., z_n$ Nachfolger von z und mit $1 \leq n \leq 3$

4.4.5.5 Beispiel-Baum



Dies ist der Baum zum Spiel mit Sollsumme = 7 und erster Augenzahl oben = 1
Der Baum wird von den Blättern (hier als umrandete Kästchen gezeichnet) ausgehend zur Wurzel konstruiert.

4.4.5.6 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r)\in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a\in A$ $D_1[\{a\}] < 00$

2)
A = |N wird mit der bekannte Relation < geordent.
Dann gilt für
$f = \{ ((n-3; n-2; n-1),n) \mid n\in A \wedge n \geq 3 \} \cup \{ ((0,1),2) ; ((0),1) \}$
die Eigenschaft:
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((a_1, ..., a_r),a)\in f \quad ==> \quad a_1 < a \wedge ... \wedge a_r < a$

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$R_F = \{ (\{n-3; n-2; n-1\},n) \mid n\in A \wedge n \geq 3 \} \cup \{ (\{0,1\},2) ; (\{0\},1) \} \cup \{ (\varnothing ,0) \}$

4) (P(A), R_F , A) ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da | F | = 1

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7)
S = { (0,-1) }ist rechtseindeutig
klar

4.4.5.7 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $a \in A$, dann gilt:

$N(a) = -1$	falls $a = 0$
$N(a) = g((N(a_1), ..., N(a_r)))$	falls $a>0$
	wobei $Z(a) := \{ (a_1, ..., a_r, 1)\}$

4.4.6 Spiel: Tic Tac Toe

4.4.6.1 Beschreibung des Spiels

Ein 3x3-Feld (kurz: Feld, das aus 9 Zellen besteht) wird abwechselnd mit 1 und 2 belegt.
Wer zuerst 3 Einsen bzw. Zweien in einer Reihe hat, hat gewonnen.
Eine noch unbelegte Zelle wird durch den Wert 0 charakterisiert.
Derjenige fängt an, der eine Eins setzt.

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

------>

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9

4.4.6.2 Definitionen

1)
Ein Feld V ist korrekt : <==>
Anzahl der Zellen mit Wert 1 - Anzahl der Zellen mit Wert 0 ist 1 oder 0
und genau einer der Fälle gilt:
a) V besitzt genau eine 1-Reihe und V besitzt keine 2-Reihe oder
b) V besitzt genau eine 2-Reihe und V besitzt eine 1-Reihe oder
c) V besitzt keine 1-Reihe und V besitzt keine 2-Reihe oder
d) V besitzt genau eine 1-Reihe und Anzahl 1-er größer Anzahl 2-er.
e) V besitzt genau eine 2-Reihe und Anzahl 1-er größer Anzahl 2-er.

2)
Ein korrektes Feld V heißt ein Endfeld (Blatt) <==>
V besitzt genau eine 1-Reihe und V besitzt keine 2-Reihe oder
V besitzt genau eine 2-Reihe und V besitzt eine 1-Reihe oder
V besitzt keine 1-Reihe und V besitzt keine 2-Reihe und das Feld ist voll belegt.

3)
Ein korrekt belegtes Feld V' ist ein direkter Nachfolger eines korrekt belegten Nicht-Endfeldes : <==>
V' belegt an einer Stelle, die in V unbelegt ist, diese Stelle.
Ein Endfeld hat keinen Nachfolger.

4)
Ein Feld heißt n-belegt, wenn genau n Zellen mit 1 oder 2 belegt sind (bzw. wenn 9-n Zellen unbelegt sind).

4.4.6.3 Bemerkung

Anschaulich gesehen, bilden die korrekten Felder (mit ihren Nachfolgern) einen "Wald", der aus Bäumen besteht. Jeder Baum ist ein Element einer induktiv definierten Menge, die von den Blättern her von unten aufgebaut wird.

4.4.6.4 Regeln

A : = Menge aller korrekten Felder
$B = \{-1 ; 0 ; 1 \}$
$f = \{ ((V_1; \ldots , V_r),V) \mid V \in A \wedge V_1 \in A \wedge \ldots \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, \ldots V_r$ Nachfolger von $V \}$
$g((e_1, \ldots, e_r)) = -\min(e_1, \ldots, e_r)$
S := {(V,1) | V besitzt genau eine 1-Reihe und keine 2-Reihe }$\cup$
{ (V,-1) | V besitzt genau eine 2-Reihe und keine 1-Reihe }$\cup$
{ (V,0) | V ist voll belegt und besitzt keine 1-Reihe und keine 2-Reihe }

4.4.6.5 Regelnkurznotation

$$\frac{\emptyset}{(V\ ,\ e)} \quad \text{falls } (\emptyset,(V\ ,\ e)) \in Ax(R)$$

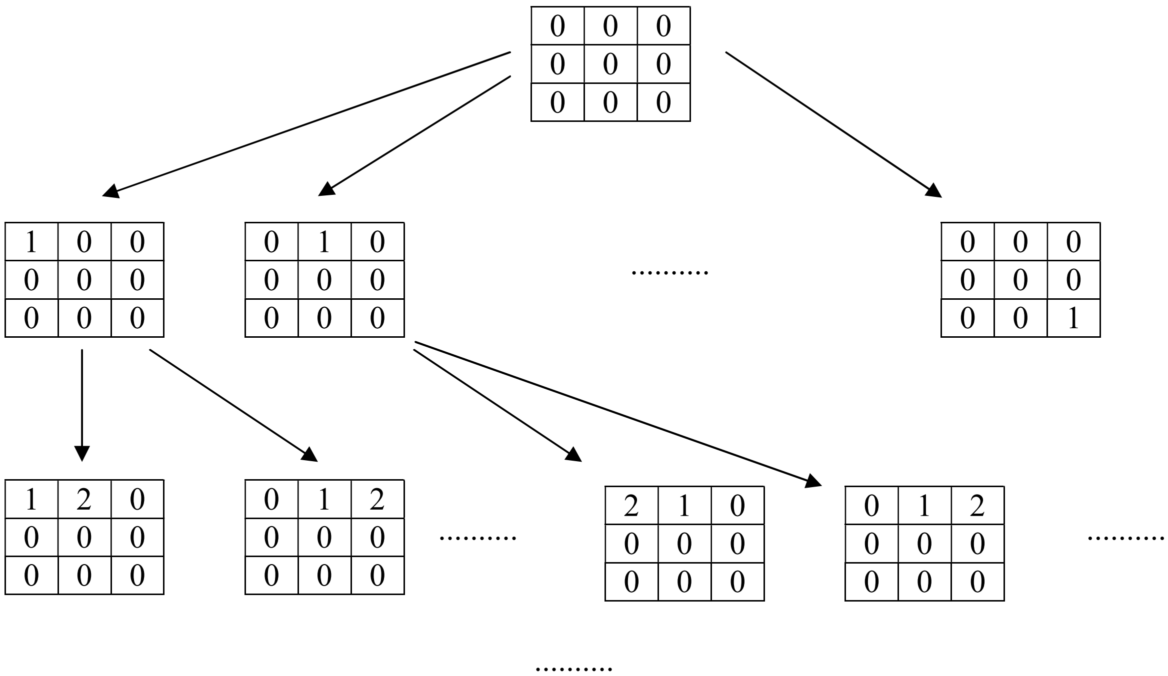
$$\frac{\{ (V_1\ ,\ e_1), \ldots, (V_n\ ,\ e_n) \}}{(V,g(\ (e_1,\ldots,e_n))\ )} \quad \text{falls } V_1, \ldots, V_n \text{ Nachfolger von } V$$

4.4.6.6 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der korrekten Felder:
Man sortiert alle vollbelegten Felder (also 9-belegten Felder) dem Alphabet nach ($0<1<2$) und fügt sie in die Liste ein. Dann sortiert man alle 8-belegten Felder und fügt sie an die Liste an, usw.
Die Menge aller so konstruierten Felder bilden die Menge A der korrekten Felder mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.6.7 Spielbaum

Ein Spielbaum (der z.B. mit einem unbelegten Feld beginnt), sieht dann so aus:



4.4.6.8 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r)\in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a\in A$ $D_1[\{a\}]< 00$

2)
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((V_1, ..., V_r),V)\in f$ ==> $V_1 < V \wedge \ldots \wedge V_r < V$
Die Nachfolger von V haben ein unbelegtes Element weniger und sind deshalb (siehe Definition der Ordnungsrelation) kleiner als V.

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$R_F = \{ (\{V_1, ..., V_r\},V) \mid ((V_1; ... , V_r),V) \in f \} \cup$
$\{ (\varnothing,V) \mid$ V besitzt genau eine 1-Reihe und keine 2-Reihe $\}\cup$
$\{ (\varnothing,V) \mid$ V besitzt genau eine 2-Reihe und keine 1-Reihe $\}\cup$
$\{ (\varnothing,V) \mid$ V ist voll belegt und besitzt keine 1-Reihe und keine 2-Reihe $\}$

4) $(P(A), R_F , A)$ ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da $| F | = 1$

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7)
S := $\{(V,1) \mid$ V besitzt genau eine 1-Reihe und keine 2-Reihe $\}\cup$
$\{ (V,-1) \mid$ V besitzt genau eine 2-Reihe und keine 1-Reihe $\}\cup$
$\{ (V,0) \mid$ V ist voll belegt und besitzt keine 1-Reihe und keine 2-Reihe $\}$
also: S ist rechtseindeutig

4.4.6.9 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $V\in A$=Menge aller korrekten Felder, dann gilt:

$N(V) = D_1(V)$	falls V ist ein Blatt
$N(V) = g((N(V_1), ..., N(V_r)))$	falls $V_1, ..., V_r$ Nachfolger von V

4.4.7 Spiel: Würfel kippen

4.4.7.1 Beschreibung des Spiels

Beim Spielbeginn wird eine zu erreichende Summe (Sollsumme = Zielsumme) festgelegt. Diese muß größer oder gleich 6 sein.
Dann wird ein Spielwürfel geworfen und die oben liegende Zahl als aktuelle Summe (Istsumme) notiert. Die beiden Spieler kippen nun abwechselnd den Würfel um eine der 4 Grundkanten und erhöhen die aktuelle Summe um die jeweils nach oben gelangte Augenzahl. (Das heißt, daß ein Spieler die vor dem Ziehen oben liegende Zahl und die Zahl auf der Gegenseite nicht ziehen kann !)
Erreicht ein Spieler durch seinen Zug diese Sollsumme, hat er gewonnen (Auszahlung: 1) und der andere verloren (Auszahlung: -1). Ein Spieler darf durch seinen Zug auf keinen Fall die Sollsumme überschreiten. Kann er diese durch keinen Zug erreichen, ist das Spiel unentschieden (Auszahlung: 0).

Bemerkung:
Das Spiel kann dadurch noch modifiziert werden, daß die erste aktuelle Summe nicht gleich der ersten gezogenen Augenzahl ist, sondern eine beliebig vorgegebene sein kann.

Zielsumme:	z	
Istsumme:	s	
(Gewinn, Erlös, Auszahlung):	e	(1: gewonnen, 0: unentschieden, -1: verloren)
Die aktuell gewürfelte Zahl:	w	

4.4.7.1.1 Beispiel

Bemerkung:
Von einem Knoten (s,w) kann man die möglichen nachfolgenden Züge berechnen.
Diese sogenannten Nachfolger kann man in einer Menge zusammenfassen.
Beispiel:
Zielsumme = 100
Nachfolger von (70, 1) :
{ (72, 2), (73, 3), (74, 4), (75, 5) }

4.4.7.2 Definitionen

Gegeben sei die Zielsumme z.
Ein Tupel (s,w) ist korrekt: <==>
$1 \leq w \leq 6$ und $s \leq z$

4.4.7.3 Regeln

A : = Menge der korrekten Tupel
B = {-1 ; 0 ; 1 }
f = {
(((z,1)) , (z-1, 2)) ;
(((z,1)) , (z-1, 3)) ;
(((z,1)) , (z-1, 4)) ;
(((z,1)) , (z-1, 5)) ;

(((z, 2)) , (z-2,1)) ;
(((z-1,1)) , (z-2,2)) ;
(((z-1,1) , (z,2)) , (z-2,3)) ;
(((z-1,1), (z,2)) , (z-2,4)) ;
(((z-1,1)) , (z-2,5)) ;
(((z, 2)) , (z-2,6)) ;

(((z-1,2) , (z, 3)) , (z-3,1)) ;
(((z-2,1), (z,3)) , (z-3,2)) ;
(((z-2,1), (z-1,2)) , (z-3,3)) ;
(((z-2,1), (z-1,2)) , (z-3,4)) ;
(((z-2,1), (z,3)) , (z-3,5)) ;
(((z-1,2), (z,3)) , (z-3,6)) ;

(((z-2,2), (z-1,3), (z, 4)) , (z-4,1)) ;
(((z-3,1), (z-1,3), (z, 4)) , (z-4,2)) ;
(((z-3,1), (z-2,2)) , (z-4,3)) ;
(((z-3,1), (z-2,2)) , (z-4,4)) ;
(((z-3,1), (z-1,3), (z,4)) , (z-4,5)) ;
(((z-2,2), (z-1,3), (z,4)) , (z-4,6)) ;
(((z-3,2), (z-2,3), (z-1,4), (z, 5)) , (z-5,1)) ;
(((z-4,1), (z-2,3), (z-1,4)) , (z-5,2)) ;
(((z-4,1), (z-3,2), (z,5)) , (z-5,3)) ;
(((z-4,1), (z-3,2), (z,5)) , (z-5,4)) ;
(((z-4,1), (z-2,3), (z-1,4)) , (z-5,5)) ;
(((z-3,2), (z-2,3), (z-1,4), (z, 5)) , (z-5,6)) ;

Für $s<=z-6$ gelten noch die folgenden Regeln:

(((s+2,2), (s+3,3), (s+4, 4), (s+5,5)) , (s,1)) ;
(((s+1,1), (s+3,3), (s+4, 4), (s+6,6)) , (s,2)) ;
(((s+1,1), (s+2,2), (s+5, 5), (s+6,6)) , (s,3)) ;
(((s+1,1), (s+2,2), (s+5, 5), (s+6,6)) , (s,4)) ;
(((s+1,1), (s+3,3), (s+4, 4), (s+6,6)) , (s,5)) ;
(((s+2,2), (s+3,3), (s+4, 4), (s+5,5)) , (s,6)) ;
und $s \in |N \wedge w \in |N \wedge 1 \leq s \leq z \wedge 1 \leq w \leq 6$ }
}

$g((e_1, ..., e_r)) = -\min(e_1, ..., e_r)$
S : = { ((z,1), -1) ; ((z,2), -1) ; ((z,3), -1) ; ((z,4), -1) ; ((z,5), -1) ;
((z,6), -1) ; ((z-1,1), 0) ; ((z-1,6), 0) }

4.4.7.4 Regelnkurznotation

$$\frac{\emptyset}{((s,w)\ ,\ e)} \quad \text{falls } (\emptyset\ ,\ ((s,w)\ ,\ e)) \in Ax(R)$$

$$\frac{((s_1,w_1)\ ,\ e_1), \ldots, ((s_n,w_n)\ ,\ e_n)}{((s,w)\ ,\ g((e_1,\ldots,e_n))\ )} \quad \text{falls } (s_1,w_1), \ldots, (s_n,w_n) \text{ Nachfolger von } (s,w)$$

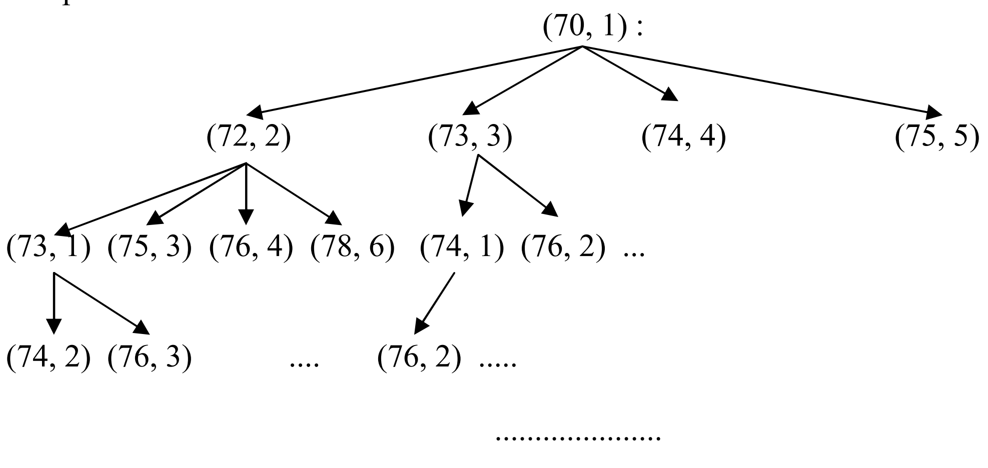
4.4.7.5 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der korrekten Tupel:
Man sortiert alle korrekten Tupel mir Summe = Zielsumme dem Wert von w (1< ...<6) nach und fügt sie in die Liste ein. Dann sortiert man alle korrekten Tupel mit Summe = Zielsumme-1 dem Wert von w nach und fügt sie an die Liste an, usw.
Die Menge aller so konstruierten Felder bilden die Menge A der korrekten Felder mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.7.6 Spielbaum

Man baut sich wie folgt einen "Spielbaum":
Man beginnt mit dem Knoten, also dem Tupel (s,w). Dann werden alle möglichen "Nachfolger" (nachfolgende Spielzüge) gemacht. Diese ergeben jeweils wieder neue Tupel. Diese werden baumartig dargestellt. Falls Nachfolgezüge gemacht werden können, werden diese durchgeführt und ebenfalls baumartig dargestellt.
Dies wird so lange gemacht, bis nicht mehr gezogen werden kann. Diesen Knoten nennt man dann Blatt.

Beispiel:



4.4.7.7 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r)\in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a\in A$ $D_1[\{a\}]< 00$

2)
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$(((s_1,w_1), ..., (s_r,w_r)),(s,w))\in f \quad ==> \quad (s_1,w_1) < (s,w) \wedge \ldots \wedge (s_r,w_r) < (s,w)$
Die Nachfolger von (s,w) haben eine größere Istsumme und sind deshalb (siehe Definition der Ordnungsrelation) kleiner als (s,w).

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$R_F = \{ (\{(s_1,w_1), ..., (s_r,w_r)\},(s,w)) \mid ((s_1,w_1), ..., (s_r,w_r)),(s,w))\in f \} \cup$
$\{ (\emptyset, (z,1)) ; (\emptyset, (z,2)) ; (\emptyset, (z,3)) ; (\emptyset, (z,4)) ; (\emptyset, (z,5)) ;$
$(\emptyset, (z,6)) ; (\emptyset, (z-1,1)) ; (\emptyset, (z-1,6)) \}$

4) (P(A), R_F , A) ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da | F | = 1

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7)
$Ax(R) := \{ (\emptyset, ((z,1), -1)) ; (\emptyset, ((z,2), -1)) ; (\emptyset, ((z,3), -1)) ; (\emptyset, ((z,4), -1)) ;$
$(\emptyset, ((z,5), -1)) ; (\emptyset, ((z,6), -1)) ; (\emptyset, ((z-1,1), 0)) ; (\emptyset, ((z-1,6), 0)) \}$
also:
S ist rechtseindeutig

4.4.7.8 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $(s,w) \in A$, dann gilt:

$N((s,w)) = D_1((s,w))$ falls $(\varnothing,(s,w)) \in R_F$

$N((s,w)) = g(\ (N((s_1,w_1)) \ , ..., N((s_r,w_r))) \ )$ sonst, d.h: $(\varnothing,(s,w)) \notin R_F$ wobei $Z((s,w)) : = \{ ((s_1,w_1), ..., (s_r,w_r) ,1)\}$

4.4.8 "Iteratives" Bestimmen von I(R)

Bestimmen von D0:
$D0 = \varnothing$

Bestimmen von D1 (= S)
S =
{ ((z,1), -1), ((z,2), -1), ((z,3), -1), ((z,4), -1), ((z,5), -1), ((z,6), -1), ((z-1,1), 0), ((z-1,6), 0) }

Bestimmen von D2:
Anwenden der folgenden Regeln auf ((z, 1), -1) ergibt:
{((z,1), g1)} ---> ((z-1,2), g)
{((z,1), g1)} ---> ((z-1,3), g)
{((z,1), g1)} ---> ((z-1,4), g)
{((z,1), g1)} ---> ((z-1,5), g)
die folgenden neuen Elemente aus I(R):
((z-1,2), 1), ((z-1,3), 1), ((z-1,4), 1), ((z-1,5), 1)

Anwenden der folgenden Regeln auf ((z,2), -1) ergibt:
{((z,2), g1)} ---> ((z-2,1), g)
die folgenden neuen Elemente aus I(R):
((z-2,1), 1)

Anwenden der folgenden Regeln auf ((z-1,1), 0) ergibt:
{((z-1,1), g1)} ---> ((z-2,2), g)
die folgenden neuen Elemente aus I(R):
((z-2,2), 0)

Anwenden der folgenden Regeln auf ((z-1,1), 0), ((z,2), -1) ergibt:
{(z-1,1), g1), ((z,2), g2)} ---> ((z-2,3), g)
die folgenden neuen Elemente aus I(R):
((z-2,3), 1)

Anwenden der folgenden Regeln auf ((z-1,1), 0), ((z,2), -1) ergibt:
{((z-1,1), g1), ((z,2), g2)} ---> ((z-2,4), g)
die folgenden neuen Elemente aus I(R):
((z-2,4), 1)

Anwenden der folgenden Regeln auf ((z-1,1), 0) ergibt:
{(z-1,1), g1) } ---> ((z-2,5), g)
die folgenden neuen Elemente aus I(R):
((z-2,5), 0)
Anwenden der folgenden Regeln auf ((z,2), -1) ergibt:
{((z,2), g1)} ---> ((z-2,6), g)

die folgenden neuen Elemente aus I(R):
((z-2,6), 1)

also:
D2 = D1 U
{((z-1,2), 1), ((z-1,3), 1), ((z-1,4), 1), ((z-1,5), 1), ((z-2,1), 1), ((z-2,2), 0), ((z-2,3), 1), ((z-2,4), 1), ((z-2,5), 0), ((z-2,6), 1) }

usw.

Bemerkung:
Wenn man dies iterativ weiter so berechnen will, wird viel Rechenzeit verwendet (vermutlich mehr als bei der Rekursion).

4.4.9 Das Acht-Damen-Problem

4.4.9.1 Beschreibung des Rätsels

Es sollen insgesamt 8 Damen auf dem Schachbrett so verteilt werden, dass sich jeweils keine zwei Damen einander nach den Schachregeln schlagen können. Die Figurenfarbe wird dabei ignoriert, und es wird angenommen, dass jede Figur jede andere angreifen könnte.
So eine Stellung wird 8-unangreifbar genannt
In der Literatur wird dies oft als klassisches Beispiel für die Technik "Backtracking" verwendet.
Dies geht auch ohne Backtracking mit Rekindsatz 4 Version 2!

Eine mögliche Lösung:

							x
			x				
x							
		x					
					x		
	x						
						x	
				x			

entspricht -->

0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0

0: unbelegtes Element des Felds 1: durch eine Dame belegtes Element des Felds

4.4.9.2 Definitionen

1)
Ein Feld V ist korrekt : <==>
Es gibt keine 2 Damen, die sich schlagen können.

2)
Ein korrektes Feld V heißt ein Endfeld (Blatt) <==>
Man kann keine weitere freie Zelle mit einer Dame so belegen, daß sich daß sich dann keine 2 Damen schlagen können.

3)
Ein korrekt belegtes Feld V' ist ein direkter Nachfolger eines korrekt belegten Nicht-Endfeldes : <==>
V' belegt an einer Stelle, die in V unbelegt ist, diese Stelle.
Ein Endfeld hat keinen Nachfolger.

4.4.9.3 Regeln

A : = Menge der korrekten Felder.
E : = (-1,-1, ... ,.-1,-1) 64 Mal
B = A $\cup$ {E}

f = { ((V_1; ... , V_r),V) | V$\in$A $\wedge$ $V_1\in$A $\wedge$ ... $\wedge$ V_r $\in$A, wobei V_1, ...V_r Nachfolger von V sind }
g((V_1, ..., V_r)) : = V_m falls m = min{ i | $V_i \neq$E} existiert
g((V_1, ..., V_r)) : = E sonst d.h: $\forall$ $1 \leq i \leq r$ V_i = E

Ax(R) : =
{($\emptyset$,(K,K)) | K ist ein Feld im Baum, das keinen Nachfolger hat und K ist mit 8 Damen belegt } $\cup$
{($\emptyset$,(K,E)) | K ist ein Feld im Baum, das keinen Nachfolger hat und K ist mit weniger als 8 Damen belegt }

4.4.9.4 Regelnkurznotation

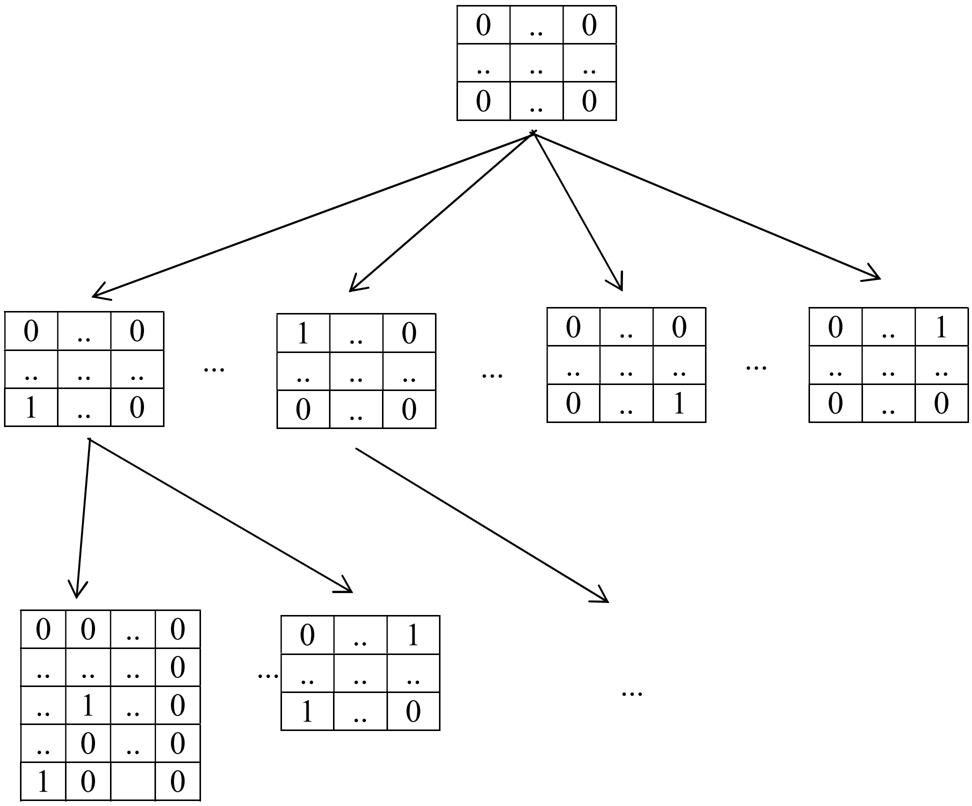
$$\frac{\emptyset}{(W\,,\,V)} \quad \text{falls } (\emptyset,(W\,,\,V)) \in Ax(R)$$

$$\frac{(W_1\,,\,V_1),\,...,\,(W_n\,,\,V_n)}{(W\,,\,g((V_1,...,V_n)\,)\,)} \quad \text{falls } W_1,\,...,\,W_n \text{ Nachfolger von } W$$

4.4.9.5 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der korrekten Felder:
Man sortiert alle korrekten Felder mit 8 belegten Zellen alphabetisch und fügt sie an die Liste an. Dann sortiert man alle korrekten Felder mit 7 belegten Zellen alphabetisch und fügt sie in die Liste ein, usw.
Die Menge aller so konstruierten Felder bilden die Menge A der korrekten Felder mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.9.6 Spielbaum



4.4.9.7 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r)\in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a\in A$ $D_1[\{a\}]< 00$

2)
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((V_1, ..., V_r), V) \in f \implies V_1 < V \wedge \ldots \wedge V_r < V$
Diese Nachfolger haben ein belegtes Element mehr und sind deshalb (siehe Definition der Ordnungsrelation) kleiner als V.

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$R_F = \{ (\{V_1; \ldots , V_r\},V) \mid V\in A \wedge V_1\in A \wedge \ldots \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, \ldots V_r$ die Nachfolger von V im Spielbaum sind $\} \cup$ Menge aller Blätter im Spielbaum.

4) $(P(A), R_F , A)$ ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da $|F| = 1$

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7) Ax(R) =
{(∅,(K,K)) | K ist ein Feld im Baum, das keinen Nachfolger hat und K ist mit 8 Damen belegt } ∪
{(∅,(K,E)) | K ist ein Feld im Baum, das keinen Nachfolger hat und K ist mit weniger als 8 Damen belegt }
also:
S ist rechtseindeutig

4.4.9.8 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $W \in A$ = Menge aller korrekten Felder, dann gilt:
$N(W) = D_1(W)$ falls $(\emptyset,W) \in R_F$
$N(W) = g((N(W_1), ..., N(W_r)))$ sonst, wobei $Z(W) := \{ (W_1, ..., W_r, i)\}$

4.4.9.9 Definition "8-unangreifbar-ergänzbar"

Ein Feld $V = (x_1, ..., x_{64}) \in A$ heißt 8-unangreifbar-ergänzbar zum Feld $M \neq E$:<==>
$(V,M) \in I(R)$: = die durch obige Regelmenge induktiv definierte Menge.

Bemerkung:
Durch die Definition von g bekommt man nicht alle 8-unangreifbaren Stellungen, sondern nur eine 8-unangreifbare Stellung. Dies wird gemacht, um Rechenzeit zu sparen.

4.4.9.10 Laufzeit verbesseren

Die folgende "intuitive" Überlegung kann ausgenutzt werden, damit man ein besseres Laufzeitverhalten von N(W) bekommt:

Die folgende "intuitive" Überlegung kann ausgenutzt werden, damit man ein besseres Laufzeitverhalten von N(W) bekommt:

W ist 8-unangreifbar-ergänzbar <==>
an der ersten freien Spalte muß es eine Zelle geben, so daß diese Zelle (mit einer Dame besetzt werden kann) unangreifbar ergänzbar ist
Es muß also nicht mehr der erste Nachfolger (unter allen möglichen Nachfolgern) gesucht werden, sondern nur der erste (unter allen möglichen Nachfolgern der ersten freien Spalte).

4.4.9.11 Satz

$(\varnothing,(s_1, \dots , s_k, 0,\dots,0)) \notin R_F$ ==>
$N((s_1, \dots , s_k, 0,\dots,0)) = g($"alle Nachfolger in der k+1- Spalte von $(s_1, \dots , s_k, 0,\dots,0)$")

Bem:
1)
$(s_1, \dots , s_k, 0,\dots,0)$ bezeichnet ein Schachfeld aus A, das aus den von links nach rechts aneinandergefügten Spalten s_1 bis s_k und den restlichen mit 0 bezeichneten Nullspalten besteht.

2)
"alle Nachfolger in der k+1- Spalte von $(s_1, \dots , s_k, 0,\dots,0)$" =
"alle Nachfolger in der ersten freien Spalte von $(s_1, \dots , s_k, 0,\dots,0)$"

g("alle Nachfolger an der ersten freien Spalte von $(s_1, \dots , s_k, 0,\dots,0)$") :=
$g((N((s_1, \dots , s_k, p_{1,} , 0, \dots, 0)), \dots, N((s_1, \dots , s_k, p_{n,} , 0, \dots, 0))))$
wobei $(s_1, \dots , s_k, p_{1,} , 0, \dots, 0) , \dots, (s_1, \dots , s_k, p_{n,} , 0, \dots, 0)$ alles Nachfolger von
$(s_1, \dots , s_k, 0, \dots, 0)$ sind, die sich in der k+1-Spalte befinden.

Das bedeutet z.B:
$N((0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)) = g((N((0, \dots, 1)), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) ,$
$N((0,1,0, \dots, 0), 0, 0, 0, 0, 0, 0,0),$
...
$N((0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (0, \dots, 1)))$

Beweis:
Fall1:
$N(s_1, \dots , s_k, 0,\dots,0) = (s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, \dots, s_8) : = (s_1, \dots , m_8) := M \neq E$
Dann gilt:
1.1) $N(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, \dots, s_7, 0) = g(\dots, N(s_1, \dots , m_8) , \dots) = g(\dots, M , \dots) := M_1 \neq E$
also $(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, \dots, s_7, 0)$ 8-ergänzbar.
1.2) $N(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, \dots, s_6, 0, 0) = g(\dots, N(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, \dots, m_7, 0) , \dots) = g(\dots, M_1, \dots)$
$: = M_2 \neq E$
also $(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, \dots, s_6, 0, 0)$ 8-ergänzbar
1.3) $N(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, \dots, s_5, 0, 0, 0) = g(\dots, N(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, \dots, s_6, 0, 0) , \dots) = g(\dots, M_2, \dots)$
$: = M_3 \neq E$
also $(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, \dots, s_5, 0, 0, 0)$ 8-ergänzbar
...
1.n) $N(s_1, \dots , s_k, 0, \dots, 0) = g(\dots, N(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, 0, \dots, 0) , \dots) = g(\dots, M_{8-k}, \dots)$
$: = M_{8-k+1} \neq E$
also $(s_1, \dots , s_k, 0, \dots, 0)$ 8-ergänzbar
2)
$N(s_1, \dots , s_k, 0, \dots, 0) = g(\dots, N(s_1, \dots , s_k, s_{k+1}, 0, \dots, 0) , \dots) =$
g("alle Nachfolger an der k+1-ten Zeile), also:
$N(s_1, \dots , s_k, 0, \dots, 0) = g($"alle Nachfolger an der k+1-ten Zeile)

Fall2:
$N(s_1, \dots, s_k, 0,\dots,0) = E$
Dann gilt:
Für alle Nachfolger W von $(s_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$ gilt:
$N(W) = E$ und speziell gilt dann auch für alle Nachfolger W an der k+1-ten Zeile $N(W) = E$ und damit:
g("alle Nachfolger an der k+1-ten Zeile") = E, also
$N(s_1, \dots, s_k, 0,\dots,0) = E$ = g("alle Nachfolger an der k+1-ten Zeile"), also
$N(s_1, \dots, s_k, 0,\dots,0)$ = g("alle Nachfolger an der k+1-ten Zeile")

4.4.9.12 Satz

Wenn $W \in A$, dann gilt:
$N(W) = W$ falls $(\emptyset,W) \in R_F$ und W vollbelegt mit 8 Damen.
$N(W) = E$ falls $(\emptyset,W) \in R_F$ und W nicht vollbelegt mit 8 Damen
$N(W)$ = g("alle Nachfolger an der k+1-ten Zeile") sonst, d.h: $(\emptyset,W) \notin R_F$

Beweis:
folgt sofort aus vorigem Satz

4.4.9.13 Vergleich Iteration - Rekursion

Die iterative Lösung geht von $D_0 = \emptyset$ aus. Weiter geht es dann zu $D_1 = \{x \in X \mid (\emptyset,x) \in R\}$ Darunter befindet sich aber schon die 8-unangreifbare Stellung. D.h. diese 8-unangreifbare Stellung muss deshalb schon bekannt sein. Deswegen ist die iterative Lösung hier sinnlos!

4.4.10 Das magische Quadrat

4.4.10.1 Beschreibung des Rätsels

Ein teilweise (oder völlig) unbelegtes 3x3-Feld (kurz Feld) soll so mit verschiedenen Ziffern von 1 bis 9 besetzt (magisch ergänzt) werden, dass es magisch wird, d.h alle Ziffern müssen verschieden und die jeweiligen Zeilensummen, Spaltensummen, Hauptdiagonalensummen müssen gleich groß sein.

Frage:
Kann man ein völlig unbelegtes 3x3-Feld magisch ergänzen ?
Antwort: Hier alle möglichen magischen Quadrate:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4.4.10.2 Beispiele

Feld korrekt

1	2	3
9	5	0
0	0	0

Feld nicht korrekt

1	2	3
9	5	4
0	0	0

Feld mit Nachfolger

9	7	0
1	3	4
0	0	0

==>

9	7	**2**
1	3	4
0	0	0

Feld ohne Nachfolger

7	8	0
1	2	3
0	0	0

4.4.10.3 Definitionen

1)
Ein Feld V ist korrekt : <==>
Jede Ziffer zwischen 1 und 9 kommt höchstens genau einmal vor und alle voll besetzten Reihen (Zeilen, Spalten, Diagonalen) haben die gleiche Reihensumme.

2)
Ein korrektes Feld V heißt ein Endfeld (Blatt) <==>
Man kann keine weitere freie Zelle so mit einer Ziffer zwischen 1 und 9 belegen, daß dann alle voll besetzten Reihen (Zeilen, Spalten, Diagonalen) die gleiche Reihensumme haben.

3)
Ein korrekt belegtes Feld V' ist ein direkter Nachfolger eines korrekt belegten Nicht-Endfeldes : <==>
V' belegt an einer Stelle, die in V unbelegt ist, diese Stelle.
Ein Endfeld hat keinen Nachfolger.

4)
Ein korrektes Feld U = (u_1, ..., u_9) heißt **Teilfeld** eines korrekten Feldes V =(v_1, ..., v_9)
(kurz U<<V) :<==> $\forall i \in \{1;...;9\}$ $u_i \neq 0$ ==> $u_i = v_i$
Ein korrektes Feld U = (u_1, ..., u_9) $\in$A heißt **magisch ergänzbar** :<==>
$\exists$ magisches Feld M mit U << M

4.4.10.4 Regeln

A : = Menge der korrekten Felder.
E : = (-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1.-1,-1)
B = A $\cup$ {E}

f = { ((V_1, ... , V_r),V) | V$\in$A $\wedge$ $V_1 \in$A $\wedge$ ... $\wedge$ V_r $\in$A, wobei V_1, ...V_r die Nachfolger von V sind }
g((V_1, ..., V_r)) : = V_m falls $m = \min\{ i \mid V_i \neq E\}$ existiert
g((V_1, ..., V_r)) : = E sonst d.h: $\forall$ $1 \leq i \leq r$ $V_i = E$

S : =
{(K,K) | K ist magisch } $\cup$ {(K,E) | K ist nicht magisch und hat keine Nachfolger}

4.4.10.5 Regelnkurznotation

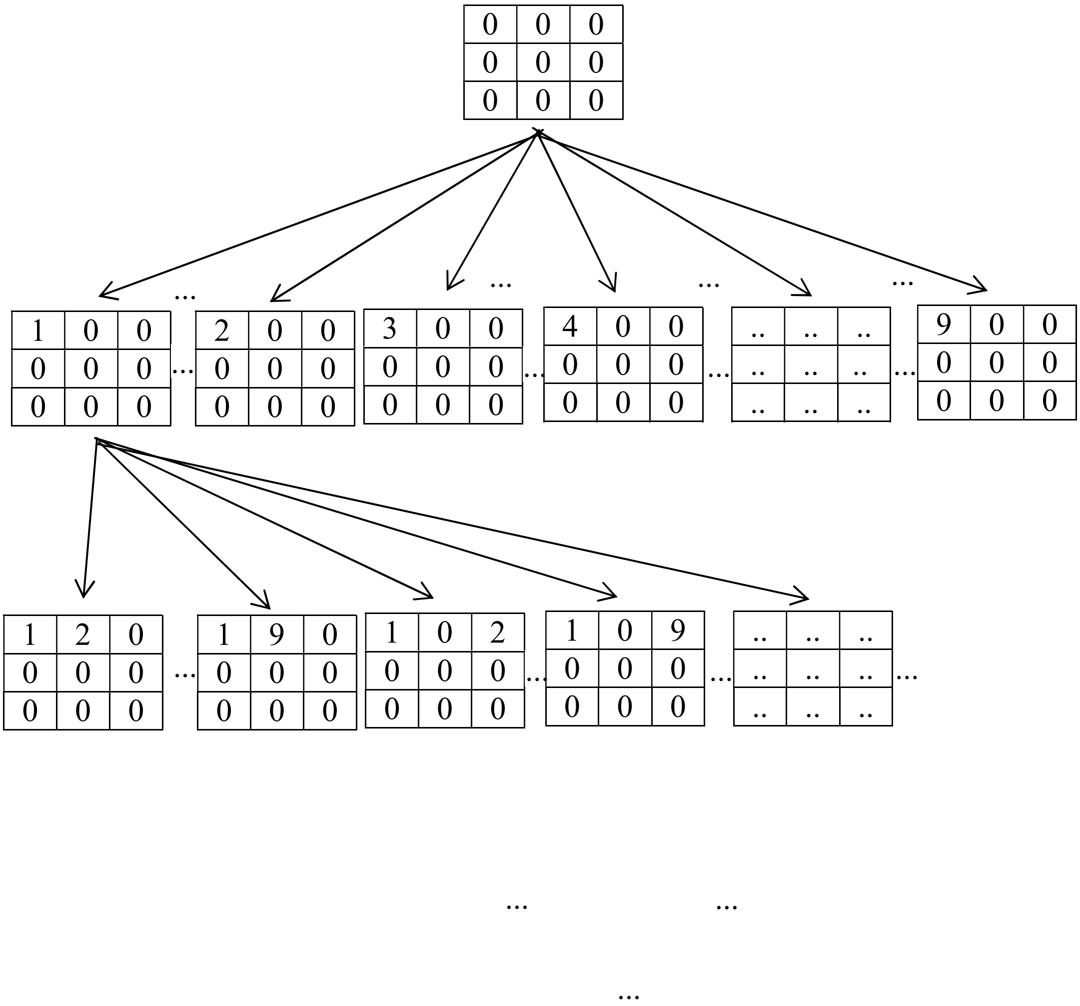
$$\frac{\emptyset}{(W , V)} \quad \text{falls } (\emptyset, (W , V)) \in Ax(R)$$

$$\frac{(W_1 , V_1), ..., (W_n , V_n)}{(W , g((V_1,...,V_n)))} \quad \text{falls } W_1, ..., W_n \text{ Nachfolger von } W$$

4.4.10.6 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der korrekten Felder:
Man sortiert alle korrekten Felder mit 9 belegten Zellen alphabetisch und fügt sie in die Liste ein. Dann sortiert man alle korrekten Felder mit 7 belegten Zellen alphabetisch und fügt sie an die Liste an, usw.
Die Menge aller so konstruierten Felder bilden die Menge A der korrekten Felder mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.10.7 Bäume



Man baut sich in Abhängigkeit von der Wurzel wie folgt einen Baum:
Man beginnt mit der Wurzel (hier z.B. ein Feld, das aus lauter Nullen besteht, es könnte aber auch eine anderes Feld, wie z.B. (930000000) sein).

4.4.10.8 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r) \in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a \in A$ $D_1[\{a\}] < 00$

2)
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((V_1, ..., V_r), V) \in f$ ==> $V_1 < V \wedge \ldots \wedge V_r < V$
Diese Nachfolger haben ein belegtes Element mehr und sind deshalb (siehe Definition der Ordnungsrelation) kleiner als V.

3)
$Ax(R_F)$ = Menge aller magischen Felder $\cup$ Menge aller nicht magischen Felder ohne Nachfolger.
R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$R_F = \{ (\{V_1, ..., V_r\}, V) \mid V \in A \wedge V_1 \in A \wedge ... \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, ... V_r$ die Nachfolger von V sind $\} \cup Ax(R_F)$

4) Die zweistellige Relation (P(A), R_F , A) ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da | F | = 1

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7)
S : =
$\{(K,K) \mid K$ ist magisch $\} \cup \{(K,E) \mid K$ ist nicht magisch und hat keine Nachfolger$\}$
also:
S ist rechtseindeutig

4.4.10.9 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $W \in A$, dann gilt:

N(W) = W	falls W magisch
N(W) = E	fallsW nicht magisch und ohne Nachfolger
$N(W) = g((N(W_1), ..., N(W_r)))$	sonst, d.h: $(\emptyset, W) \notin R_F$ $W_1, ..., W_r$ alle Nachfolger von W sind

4.4.10.10 Satz

Für ein korrektes Feld V gilt:
Entweder ist N(V) magisch oder N(V) = E

Beweis: (über induktiven Aufbau von A)
I) T ist ein Axiom
klar

II)
B(T) bezeichnet die obige Behauptung
Es gelte $B(V_1)$, ..., $B(V_n)$) für alle Nachfolger $V_1, ..., V_n$ von V
Zeige B(V)
$N(V) = g((N(V_1), ..., N(V_n)))$ für alle Nachfolger $V_1, ..., V_n$ von V
Wenn mindestens ein Nachfolger magisch ist, ist dann N(V) magisch, sonst gilt:
N(V) = E

4.4.10.11 Satz

Für ein korrektes Feld T gilt:
T ist magisch ergänzbar <==> N(T) ist magisch

Beweis: (über induktiven Aufbau von A)
I) T ist ein Atom
1) ==>
Sei T ist magisch ergänzbar. Wäre T nichtmagisch und ohne Nachfolger, dann müßte es (da T magisch ergänzbar ist), einen Nachfolger geben , also Widerspruch zur Voraussetzung.
Also ist T magisch, also N(T) = T magisch
2) <==
Sei N(T) = T magisch. Wäre T nichtmagisch und ohne Nachfolger, dann müßte N(T) = E sein, also Widerspruch zur Voraussetzung.
Also ist T magisch, also T << T magisch, also ist T magisch ergänzbar.

II)
B(T) bezeichnet die obige Behauptung
Es gelte $B(T_1)$, ..., $B(T_n)$) für alle Nachfolger $T_1, ..., T_n$ von T
Zeige B(T)
1) ==>
Sei T ist magisch ergänzbar. Dann gilt:
$N(T) = g((N(T_1), ..., N(T_n)))$ für alle Nachfolger $T_1, ..., T_n$ von T
Da T magisch ergänzbar, gibt es einen Nachfolger T_i , der auch magisch ergänzbar ist.
Da $T_i < T$, gilt nach Induktionsvoraussetzung $N(T_i)$ ist magisch, also existiert ein magisches Feld M mit $N(T_i) = M$, also:
$N(T) = g((N(T_1), ..., N(T_i) , ..., N(T_n))) = g((N(T_1), ..., M , ..., N(T_n))) \neq E$.
Nach obigem Lemma gilt dann $g((N(T_1), ..., M , ..., N(T_n)))$ magisch, also N(T) magisch.

2) <==
N(T) ist magisch, also existiert ein magisches Feld M mit N(T) = M, also:
$N(T) = g((N(T_1), ..., N(T_n)))$ für alle Nachfolger $T_1, ..., T_n$ von T , also
$g((N(T_1), ..., N(T_n))) = M$, also existiert ein i mit $N(T_i) = M$
Da $T_i < T$, gilt nach Induktionsvoraussetzung T_i ist magisch ergänzbar, also existiert ein magische Feld F mit $T_i << F$, also $T << F$, also T ist magisch ergänzbar

4.4.10.12 Vergleich Iteration - Rekursion

Die iterative Lösung geht von $D_0 = \emptyset$ aus. Weiter geht es dann zu $D_1 = \{x \in X \mid (\emptyset, x) \in R\}$ Darunter befindet sich aber schon das magische Quadrat. D.h. es muss deshalb schon bekannt sein. Deswegen ist die iterative Lösung hier sinnlos!

4.4.11 Sudoku (analog wie magisches Quadrat)

4.4.11.1 Beschreibung des Spiels

Die restlichen Zellen eines vorbelegten 9x9-Feld (kurz Feld) sollen so mit Ziffern von 1 bis 9 besetzt werden (sudokuergänzbar), dass alle 9 Quadrate, alle Zeilen und Spalten jeweils unterschiedliche Ziffern enthalten.

4.4.11.2 Spielbaum und Regeln

Man baut sich wie folgt einen "Spielbaum":
Man beginnt mit dem Knoten (Feld), das aus lauter Nullen besteht.
Dann werden alle möglichen "Nachfolger" (nachfolgende Spielzüge) gemacht. Diese ergeben jeweils wieder neue Felder. Diese werden baumartig dargestellt. Falls Nachfolgezüge gemacht werden können, werden diese durchgeführt und ebenfalls baumartig dargestellt.
Dies wird so lange gemacht, bis nicht mehr gezogen werden kann. Diesen Knoten nennt man dann Blatt.

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste:
Der Baum wird von unten nach oben und in jeder Reihe von rechts nach links durchlaufen und jedes Feld an das Ende der Liste eingefügt.
Die Menge aller so kontruierten Felder bilden die Menge A der korrekten Felder mit der entsprechenden Ordnungsrelation <, also
$A := \{ K_0 ; \; K_1 ; \; K_2 ; \; ...\}$
$E := (-1, \ldots, -1)$
$B = A \cup \{E\}$

$f = \{ ((V_1; \ldots , V_r),V) \mid V \in A \wedge V_1 \in A \wedge \ldots \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, \ldots V_r$ die Nachfolger von V im Spielbaum sind $\}$
$g((V_1, \ldots, V_r)) := V_m$ falls $m = \min\{ i \mid V_i \neq E\}$ existiert
$g((V_1, \ldots, V_r)) := E$ sonst d.h: $\forall\ 1 \leq i \leq r \;\; V_i = E$

$Ax(R) :=$
$\{(\emptyset,(K,K)) \mid K$ ist ein vollbelegtes Feld im Baum $\} \cup$
$\{(\emptyset,(K,E)) \mid K$ ist ein nicht vollbelegtes Feld im Baum, das keinen Nachfolger hat $\}$

4.4.11.3 Definition " sudokuergänzbar"

Ein Feld $V = (x_1, \ldots, x_{81})$ heißt sudokuergänzbar $:\Longleftrightarrow N(V) \neq E$

4.4.11.4 Regelnkurznotation

$$\frac{\emptyset}{(W , V)} \quad \text{falls } (\emptyset, (W , V)) \in Ax(R)$$

$$\frac{(W_1 , V_1), \ldots, (W_n , V_n)}{(W , g((V_1,\ldots,V_n)))} \quad \text{falls } W_1, \ldots, W_n \text{ Nachfolger von } W$$

4.4.11.5 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r)\in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a\in A$ $D_1[\{a\}]< 00$

2)
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((V_1, ..., V_r), V) \in f \Longrightarrow V_1 < V \wedge \ldots \wedge V_r < V$
Diese Nachfolger haben ein belegtes Element mehr und sind deshalb (siehe Definition der Ordnungsrelation) kleiner als V.

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$R_F = \{ (\{V_1; ... , V_r\},V) \mid V\in A \wedge V_1\in A \wedge ... \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, ...V_r$ die Nachfolger von V im Spielbaum sind $\} \cup Ax(R)$

4) R_F ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da | F | = 1

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7)
Ax(R) : =
$\{(\emptyset,(K,K)) \mid$ K ist ein vollbelegtes Feld im Baum $\} \cup$
$\{(\emptyset,(K,E)) \mid$ K ist ein nicht vollbelegtes Feld im Baum, das keinen Nachfolger hat $\}$

also:
D_1 ist rechtseindeutig

4.4.11.6 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $W\in A$, dann gilt:

$N(W) = W$	falls $(\emptyset,W)\in R_F$ und W vollbelegt
$N(W) = E$	falls $(\emptyset,W)\in R_F$ und W nicht vollbelegt
$N(W) = g((N(W_1), ..., N(W_r)))$	sonst, d.h: $(\emptyset,W)\notin R_F$
	wobei $Z(W) := \{ (W_1, ..., W_r ,1)\}$

4.4.12 Zahlen verteilen

4.4.12.1 Beschreibung

Die Zahlen der Menge {1, ..., p} sollen auf q Zellen verteilt werden (wobei einige der Zellen schon vorbelegt sein können), so daß sich in den q Zellen keine zwei gleichen Zahlen befinden. Es sollen alle Möglichkeiten angegeben werden.

4.4.12.1.1 Beispiel

p = 4 und q = 3

123; 213; 312; 412; 132; 231; 321; 421; 124; 234; 314; 423; 142; 243; 341; 432;
134; 214; 324; 413; 143; 241; 342; 431

4.4.12.2 Definitionen

Alle im Folgenden vorkommenden Folgenglieder einer Folge sind Element der Grundmenge {1, ..., p} und dürfen keine 2 gleichen Folgenglieder enthalten und die Folge hat die maximale Länge q.
Eine Folge mit Länge q heißt **Blatt**.
Eine Folge V' = $(t_1, ..., t_{m+1})$ nennt man einen **Nachfolger** der Folge V = $(t_1, ..., t_m)$.

4.4.12.3 Regeln

$A := \{ (x_1, ..., x_k) \mid k \leq q \text{ und } \forall\, 1 \leq i \leq k \;\; x_k \in \{1, ..., p\}\}$
A ist die Menge aller Zahlenfolgen mit maximaler Länge q wobei alle Zahlen einer Zahlenfolge verschieden und aus {1, ..., p} sein müssen.
$B := P(A)$

$f = \{ ((V_1, ... , V_r),V) \mid V \in A \wedge V_1 \in A \wedge ... \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, ...V_r$ die Nachfolger von V sind }
$g((W_1, ..., W_r)) := W_1 \cup ... \cup W_r$

$S := \{ (V, \{V\}) \mid V$ hat die Länge q }

4.4.12.4 Regelnkurznotation

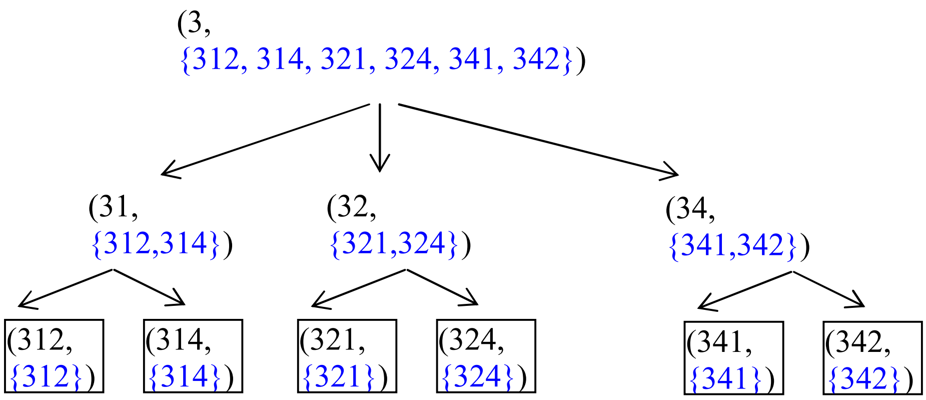
$$\frac{\emptyset}{(V, \{V\})} \quad \text{falls } (\emptyset, (V, \{V\}) \in Ax(R)$$

$$\frac{(V_1, W_1), ..., (V_n, W_n)}{(V, g((W_1,...,W_n)))} \quad \text{falls } V_1, ..., V_n \text{ Nachfolger von } V$$

4.4.12.5 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der Menge A aller Zahlenfolgen mit maximaler Länge q wobei alle Zahlen verschieden und aus {1, ..., p} sein müssen.
Man sortiert alle Zahlenfolgen der Länge q nach einem vorgegebenen Kriterium (z.B. dem Alphabet nach) und fügt sie in die Liste ein.
Dann sortiert man alle Zahlenfolgen der Länge q-1 und fügt sie an die Liste an, usw.
Die Menge aller so konstruierten Felder bilden die Menge A mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.12.6 Bäume



Es sollen alle 3-stelligen Folgen bestimmt werden, die mit den Zahlen 1, 2 , 3, 4 gebildet werden können und die mit der Zahl 3 beginnen.
Dies ist der dazugehörige Baum.
Der Baum wird von den Blättern (hier als umrandete Kästchen gezeichnet) ausgehend zur Wurzel konstruiert.

4.4.12.7 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r)\in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a\in A$ $D_1[\{a\}] < 00$

2)
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((V_1, ..., V_r), V) \in f \Longrightarrow V_1 < V \wedge \ldots \wedge V_r < V$
Die Nachfolger V_i haben eine um 1 größere Länge und sind deshalb (siehe Definition der Ordnungsrelation) kleiner als V.

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$Ax(R_F)$ = Menge aller Blätter.
$R_F = \{ (\{V_1, ..., V_r\}, V) \mid V\in A \wedge V_1\in A \wedge ... \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, ... V_r$ die Nachfolger von V sind $\} \cup Ax(R_F)$

4) Die zweistellige Relation $(P(A), R_F, A)$ ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da $|F| = 1$

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7)
$S := \{ (V, \{V\}) \mid V$ hat die Länge $q \}$
also S ist rechtseindeutig

4.4.12.8 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $V\in A$, dann gilt:

$N(V) = \{V\}$	falls V ist Blatt
$N(V) = N(V_1) \cup ... \cup N(V_r)$	sonst, d.h: $V_1, ..., V_r$ sind Nachfolger von V

Bemerkung:
Um also (siehe oben) alle 3-stelligen Zahlen (die keine gleichen Ziffern enthalten dürfen) zu bestimmen, die mit den Ziffern 1,2,3,4 gebildet werden können, berechnet man $N(\varepsilon)$

4.4.13 Zahlen ergänzen

4.4.13.1 Beschreibung der Aufgabe

Es sollen alle n - stelligen Zahlen (z.B. n = 6) bestimmt werden, die mit den Ziffern M = {1,2} gebildet werden können. Allgemeiner:
Wie kann man ein Feld (wobei einige der Zellen schon vorbelegt sein können) der Länge n mit den Ziffern 1 und 2 belegen, oder anders ausgedrückt 1-2-ergänzen ?

Bemerkung:
Statt den Ziffern 1 und 2 kann man auch andere bzw. mehr als 2 Ziffern benutzen.

4.4.13.2 Definitionen

Alle im Folgenden vorkommenden Folgenglieder einer Folge sind Element der Grundmenge M = {1, 2} und die Folge hat die maximale Länge n.
Eine Folge mit Länge n heißt **Blatt**.
Eine Folge $V' = (t_1, ..., t_{m+1})$ nennt man einen **Nachfolger** der Folge $V = (t_1, ..., t_m)$.

4.4.13.3 Regeln

$A = \{x \in M^* \mid |x| \leq n\} = M \cup M^2 \cup \ldots \cup M^n$
Das bedeutet A ist die Menge aller Zahlenfolgen mit maximaler Länge n wobei alle Zahlen aus M sein müssen.
B = P(A)

$f = \{ ((V_1, \ldots, V_r),V) \mid V \in A \wedge V_1 \in A \wedge \ldots \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, \ldots V_r$ die Nachfolger von V sind }
$g((W_1, \ldots, W_r)) := W_1 \cup \ldots \cup W_r$
S := { (V, {V}) | V hat die Länge n }

4.4.13.4 Regelnkurznotation

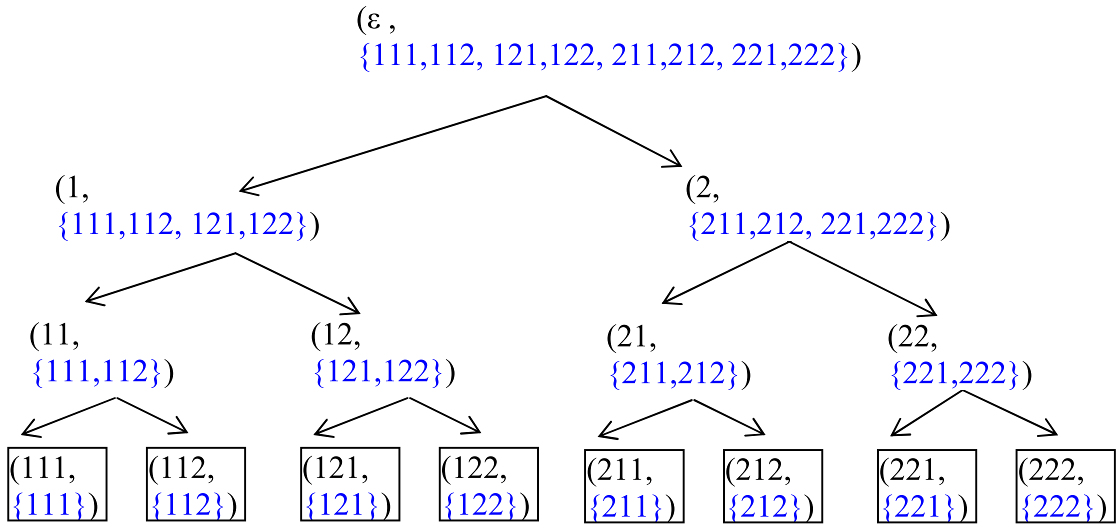
$$\frac{\emptyset}{(V,\{V\})} \quad \text{V hat Länge n}$$

$$\frac{(V_1 , W_1), \ldots, (V_n , W_n)}{(V , g((W_1,\ldots,W_n)))} \quad \text{falls } V_1, \ldots, V_n \text{ Nachfolger von V}$$

4.4.13.5 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der Menge A aller Zahlenfolgen mit maximaler Länge n wobei alle Zahlen aus {1, 2} sein müssen.
Man sortiert alle Zahlenfolgen der Länge n nach einem vorgegebenen Kriterium (z.B. dem Alphabet nach) und fügt sie in die Liste ein.
Dann sortiert man alle Zahlenfolgen der Länge n-1 und fügt sie an die Liste an, usw.
Die Menge aller so konstruierten Felder bilden die Menge A der korrekten Felder mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.13.6 Bäume



Es sollen alle 3-stelligen Zahlen bestimmt werden, die mit den Ziffern 1,2 gebildet werden können.
Dies ist der dazugehörige Baum, wobei alle 3-stelligen Zahlen gesucht werden, die mit den Ziffern 1,2 gebildet werden. Der Baum wird von den Blättern (hier als umrandete Kästchen gezeichnet) ausgehend zur Wurzel konstruiert.

4.4.13.7 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r) \in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a \in A$ $D_1[\{a\}] < 00$

2) A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((V_1, ..., V_r), V) \in f ==> \quad V_1 < V \wedge \ldots \wedge V_r < V$
Diese Nachfolger haben ein Element mehr und sind deshalb (siehe Definition der Ordnungsrelation) kleiner als V.

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$Ax(R_F)$ = Menge aller Blätter.
$R_F = \{ (\{V_1, ... , V_r\},V) \mid V \in A \wedge V_1 \in A \wedge ... \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, ...V_r$ die Nachfolger von V$\}$
$\cup\ Ax(R_F)$

4) Die zweistellige Relation (P(A), R_F , A) ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da | F | = 1

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7) S := { (V, {V}) | V hat die Länge n }
also S ist rechtseindeutig

4.4.13.8 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $V \in A$, dann gilt:

$N(V) = V$	falls V ist Blatt
$N(V) = N(V_1) \cup ... \cup N(V_r)$	sonst, d.h: $V_1, ..., V_r$ sind Nachfolger von V

4.4.13.9 Satz

Wenn $T = (t_1, ..., t_k, ..., t_m)$ mit $m \leq n$ und
M(T) = Menge alle Blätter aus A, die mit T beginnen.
Dann gilt:
$M(T) = N(T)$

Beweis: (über induktiven Aufbau von A)
I) T ist ein Atom (Blatt)
klar

II)
B(V) bezeichnet die obige Behauptung
Es gelte $B(V_1), ..., B(V_j))$ für alle Nachfolger $V_1, ..., V_j$ von V
Zeige B(V)
$V = (t_1, ..., t_k, ... , t_m) ==>$
$M(V) = M(V_1) \cup ... \cup M(V_j)$
Nach Indutionsvoraussetzung gilt:
$M(V) = M(V_1) \cup ... \cup M(V_j) = N(V_1) \cup ... \cup N(V_j) = g((N(V_1), ... , N(V_j))) = N(V)$

Bemerkung:
Um also (siehe oben) alle 6-stelligen Zahlen zu bestimmen, die mit den Ziffern 1,2 gebildet werden können, berechnet man $N(\varepsilon)$

4.4.14 Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT)

4.4.14.1 Beschreibung

Gegeben ist eine boolsche Formel F (mit n Variablen $x_1, ..., x_n$) in konjunktiver Normalform, also eine UND-Verknüpfung von Klauseln, wie z.B:
$F = x_1+x_2+x_3' \quad \cdot \quad x_1' \quad \cdot \quad x_2+x_3 \quad \cdot \quad x_1'+x_4$
und die boolschen Variablen die Werte 0 (für falsch) und 1 (für wahr) annehmen.
Ist F erfüllbar, d.h. es gibt eine Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten, so daß die ausgewertete Formel F den Wert 1 erhält?

Bemerkung:
Z.B. bedeutet x_3' eine negierte boolsche Variable
+ bedeutet das logische ODER und · das logische UND

4.4.14.1.1 Beispiel

$F = x_1+x_2+x_3' \quad \cdot \quad x_1' \quad \cdot \quad x_2+x_3 \quad \cdot \quad x_1'+x_4$
Man beginnt mit der leeren Belegung ε.
E bedeutet nicht erfüllbar.
Die Belegungen können von (0), (1), (0,0), (0,1), ...(0,0,0,0) , ... , (1,1,1,1) gehen.
$F = x_1+x_2+x_3' \quad \cdot \quad x_1' \quad \cdot \quad x_2+x_3 \quad \cdot \quad x_1'+x_4$
ist erfüllbar für (0, 1, x, x) oder (0, 0, 1, x), wobei x beliebig mit $x \in \{0 ; 1\}$ ist.

4.4.14.2 Definitionen

$n \geq 0$ sei die Anzahl der verschiedenen Variablen in einer vorgegebenen Formel F (im obigen Beispiel 4).
Jedes Element $(t_1, ..., t_k)$ aus der Menge $\{0;1\}^n$ nennt man eine Belegung der Formel F mit den Variablen $x_1, ..., x_n$,wobei t_1 für x_1 , … , t_k für x_k eingesetzt (0 für falsch und 1 für wahr) wird.

Eine Belegung $V' = (t_1, ..., t_{m+1})$ nennt man einen **Nachfolger** der Belegung $V = (t_1, ..., t_m)$.
$V = (t_1, ..., t_k)$ mit $k \leq n$ **erfüllt** F <==> Die Formel F ist für die Belegung V wahr.
$V = (t_1, ..., t_k)$ mit $k \leq n$ **erfüllt** nicht F <==> Die Formel F ist für die Belegung V falsch.
$V = (t_1, ..., t_k)$ mit $k < n$ **entscheidet** F nicht <==> Der Wahrheitswert der Formel F kann für die partielle Belegung V nicht entschieden werden..

Eine Belegung $V=(t_1, ..., t_{k-1}, t_k)$ heißt **Blatt** <==> V erfüllt F und $(t_1, ..., t_{k-1})$ entscheidet F nicht oder V erfüllt F nicht und $(t_1, ..., t_{k-1})$ entscheidet F nicht.

4.4.14.3 Regeln

$n \geq 0$ sei die Anzahl der verschiedenen Variablen in F
$M = \{0,1\}$
$A = \{x \in M^* \mid |x| \leq n\} = M \cup M^2 \cup \ldots \cup M^n$
Das bedeutet A ist die Menge aller Zahlenfolgen mit maximaler Länge n wobei alle Zahlen der Zahlenfolge aus $\{0,1\}$ sein müssen.
$E := (-1, \ldots ,-1)$ wobei dieses Tupel die Länge n hat.
$B := A \cup E$
$f = \{ ((V_1, V_2),V) \mid V \in A \wedge V_1 \in A \wedge V_2 \in A$, wobei V_1, V_2 die Nachfolger von V sind $\} :=$
$\{ ((V+0, V+1),V) \mid V \in A$ und $V+0$ bzw. $V+1$ ist die um 0 bzw. 1 ergänzte Belegung von V$\}$

$g((W_1, W_2)) :=$ das erste W_i in (W_1, W_2), das $\neq E$ ist, falls $W_1 \neq E$ oder $W_2 \neq E$
E , falls $W_1 = E$ und $W_2 = E$.

$S :=$
$\{ (V, E) \mid$ V belegt nicht alle Variablen und eine der Klauseln in F wird durch V auf 0 gesetzt$\} \cup$
$\{ (V, V) \mid$ V belegt alle Variablen in F und F wird durch V auf 1 gesetzt$\} \cup$
$\{ (V, E) \mid$ V belegt alle Variablen in F und F wird durch V auf 0 gesetzt$\}$

4.4.14.4 Regelnkurznotation

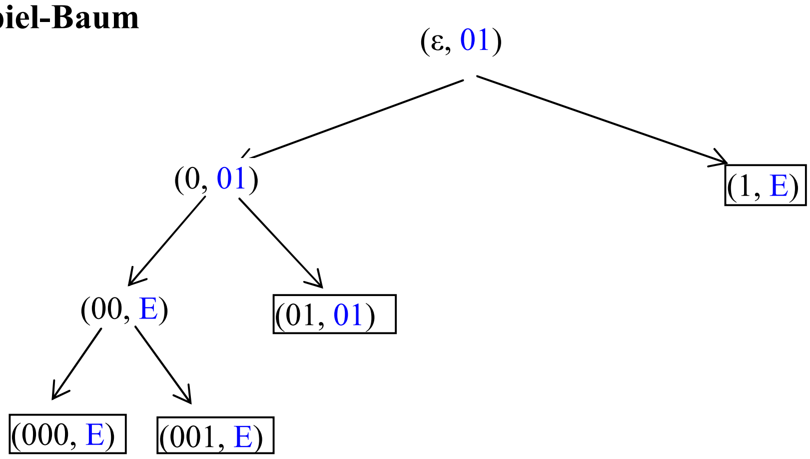
$$\frac{\emptyset}{(V, W)} \quad \text{falls} (V , W) \in S$$

$$\frac{(V_1 , W_1), (V_2 , W_2)}{(V , g((W_1,W_2)))} \quad \text{falls } V_1, V_2 \text{ Nachfolger von } V$$

4.4.14.5 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der Menge $A := \{0 ; 1\}^n$
Man sortiert alle Folgen der Länge n nach einem vorgegebenen Kriterium (z.B. dem Alphabet nach) und fügt sie in die Liste ein.
Dann sortiert man alle Folgen der Länge n-1 und fügt sie an die Liste an, usw.
Die Menge aller so konstruierten Folgen bilden die Menge A mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.14.6 Beispiel-Baum



$F = x_1+x_2+x_3' \quad \cdot \quad x_1' \quad \cdot \quad x_2+x_3 \quad \cdot \quad x_1'+x_4$
ist gegeben.
Dies ist der Baum zur obigen Formel F, wobei die Belegung der Formel gesucht wird. Der Baum wird von den Blättern (hier als umrandete Kästchen gezeichnet) ausgehend zur Wurzel konstruiert.

4.4.14.7 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r)\in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a\in A$ $D_1[\{a\}]< 00$

2)
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((V_1, ..., V_r), V) \in f \Longrightarrow \quad V_1 < V \wedge \ldots \wedge V_r < V$
Die Nachfolger V_i haben eine um 1 größere Länge und sind deshalb (siehe Definition der Ordnungsrelation) kleiner als V.

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$Ax(R_F)$ = Menge aller Blätter.
$R_F = \{ (\{V_1, V_2\},V) \mid V\in A \wedge V_1\in A \wedge V_2 \in A$, wobei V_1, V_2 die Nachfolger von V sind $\} \cup Ax(R_F)$

4) Die zweistellige Relation (P(A), R_F , A) ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da | F | = 1

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7)
S : = { (V, E) | V belegt nicht alle Variablen und eine der Klauseln in F wird durch V auf 0 gesetzt} $\cup$
{ (V, V) | V belegt alle Variablen in F und F wird durch V auf 1 gesetzt} $\cup$
{ (V, E) | V belegt alle Variablen in F und F wird durch V auf 0 gesetzt}
also ist S rechtseindeutig.

4.4.14.8 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $W \in A$, dann gilt:

$N(V) = E$	falls V ist Blatt und V erfüllt F nicht
$N(V) = V$	falls V ist Blatt und V erfüllt F
$N(V) = g((N(V+0), N(V+1)))$	sonst, wobei V+0 und V+1 Nachfolger von V

4.4.15 Tiefe eines Baums bestimmen

4.4.15.1 Beschreibung

$K = \{ n_1, .., n_{anz} \}$ ist die Knotenmenge eines Graphen mit Knotenanzahl $|K| = anz$, wobei der Graph ein Baum ist, d.h. ein spezieller Graph mit einer Wurzel.
Je zwei benachbarte Knoten i und j haben einen bestimmten Abstand a(i , j) voneinander, der im Beispiel durch eine Zahl an der Kante dargestellt wird.
Mit $(k_1, .., k_n)$) (andere Schreibweise: $[k_1, .., k_n]$ um runde Klammergebirge zu vermeiden) wird ein **Pfad** in einem Graphen bezeichnet, wobei die $k_1, .., k_n$ Elemente aus der Knotenmenge des Graphen alle benachbart und paarweise verschieden sind.
Der Pfad $[k_1, .., k_n , k_{n+1}]$ ist ein **Nachfolger** des Pfads $[k_1, .., k_n]$ gdw k_{n+1} und k_n benachbart sind.
Gesucht ist die Tiefe eines Baums, d.h. die Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt.

Die Absicht ist, einen vorgegebenen Pfad $[k_1, .., k_n]$ so zu einem Pfad $[k_1, .., k_n , v_{n+1}, ..., v_m]$ zu ergänzen, daß v_m ein Blatt des Baumes wird.und die Länge des Pfades
k_1 --> ... --> k_n ---> v_{n+1} --> ... --> v_m maximal wird.

4.4.15.2 Regeln

A : = Menge aller Pfade des Baums
B : = Menge aller Paare (w, p) wobei w eine natürliche Zahl (einschließlich 0 und 00) und p ein Pfad im Graph G bedeutet.
$f = \{ ((p_1, ... , p_r), p) \mid p \in A \wedge p_1 \in A \wedge ... \wedge p_r \in A$, wobei $p_1, ...p_r$ die Nachfolger von p }
$g(((b_1, p_1), ..., (b_m, p_m))) = (\max\limits_{i \in \{1,...,m\}} \{ b_i \} , p_k)$
wobei p_k der 1.Pfad mit $b_k = \max\limits_{i \in \{1,...,m\}} \{ b_i \}$
S : =
$\{ ((k_1, .., k_n) ; (a(k_1, k_2) + ... + a(k_{n-1}, k_n) , (k_1, .., k_n))) \mid (k_1, .., k_n)$ hat keinen Nachfolger }

4.4.15.3 Regelnkurznotation

R1:
$[k_1, .., k_n]$ hat keinen Nachfolger

$\emptyset$

$([k_1, .., k_n] ; (a(k_1, k_2) + ... + a(k_{n-1}, k_n), [k_1, .., k_n]))$

R2:
sonst, d.h: $[p_1, .., p_m]$ ist Nachfolger von p

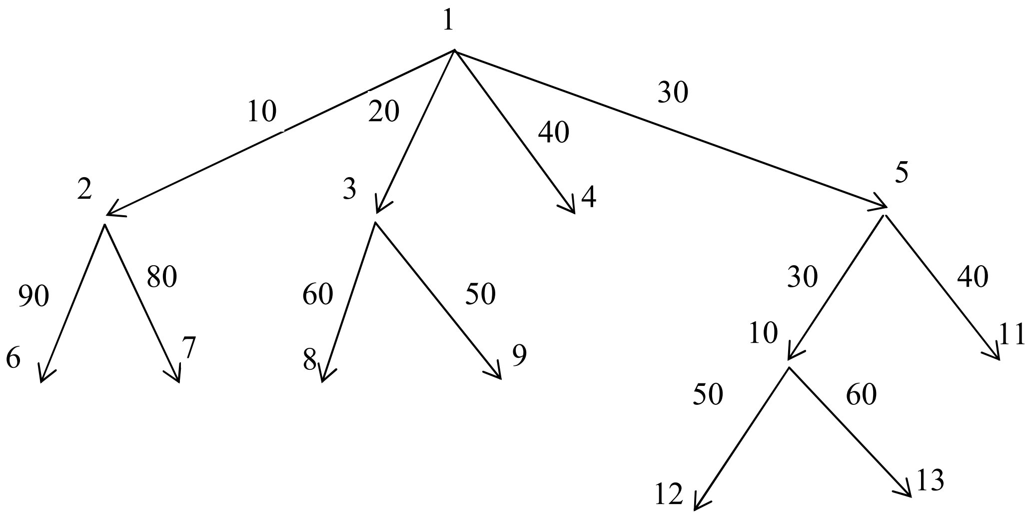
$(p_1 ; (b_1 , kp_1)) , ... , (p_m ; (b_m , kp_m))$

$(p , g(((b_1, kp_1), ..., (b_m, kp_m))))$

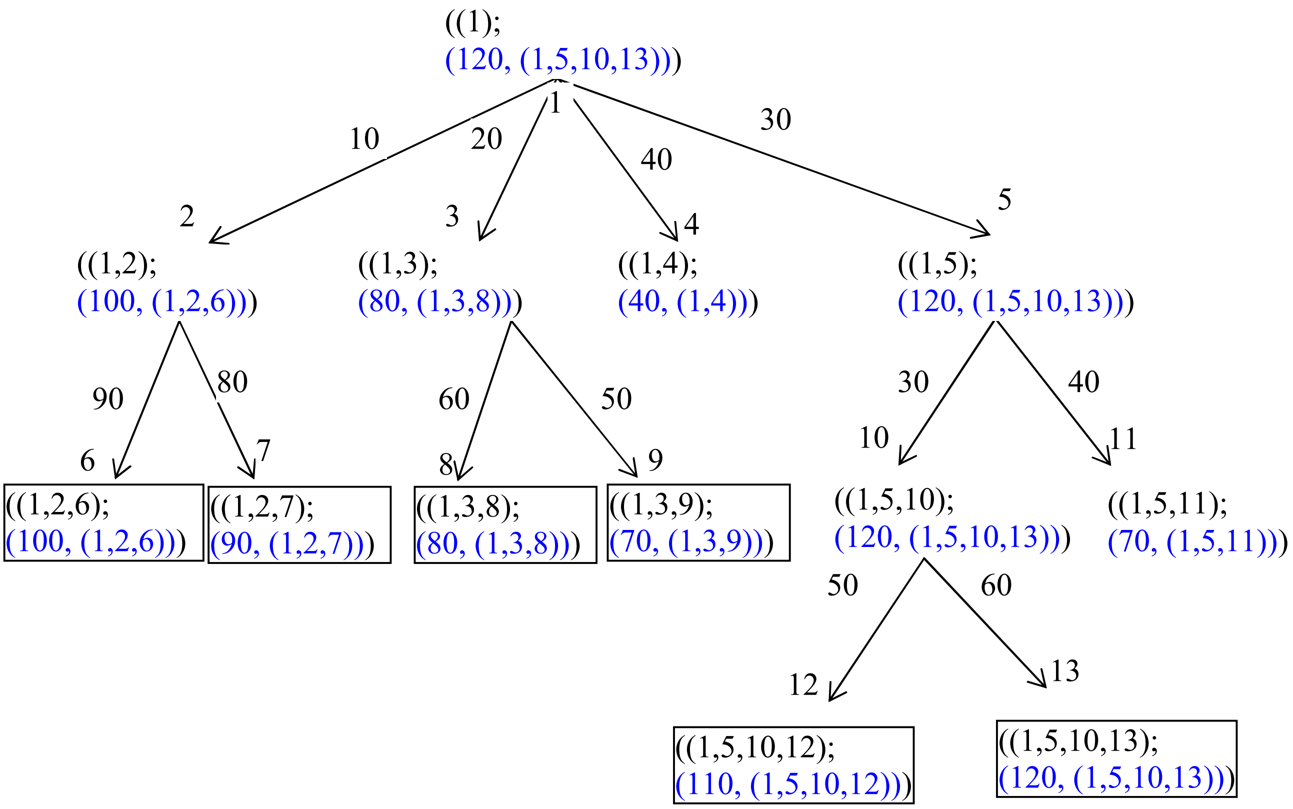
4.4.15.4 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der Menge A aller Pfade:
Man sortiert alle Pfade der Länge |K| nach einem vorgegebenen Kriterium (z.B. dem Alphabet nach) und fügt sie in die Liste ein.
Dann sortiert man aller Pfade der Länge |K|-1 und fügt sie an die Liste an, usw.
Die Menge aller so konstruierten Folgen bilden die Menge A mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.15.5 Beispiel-Baum



und hier der "ausgewertete" Baum:



4.4.15.6 Überprüfen der Voraussetzungen des RekIndsatz 4 Version 2

1) f entscheidbar und g[] ist berechenbar und $\forall(b_1, ..., b_r)\in B^*$ $|g[\{(b_1, ..., b_r)\}]| < 00$ und $D_1[]$ ist berechenbar und $\forall a\in A$ $D_1[\{a\}]< 00$

2)
A ist aufzählbar mit folgender Eigenschaft:
$((V_1, ..., V_r), V) \in f \Longrightarrow V_1 < V \wedge \ldots \wedge V_r < V$
Die Pfadlänge (zur Wurzel) dieser Nachfolger ist um eins größer und sind deshalb (siehe Definition der Ordnungsrelation) kleiner als V.

3) R_F ist die durch F und die Projektion von S in die 1. Koordinate induzierte Regelmenge.
$R_F = \{ (\{V_1, ... , V_r\},V) \mid V\in A \wedge V_1\in A \wedge ... \wedge V_r \in A$, wobei $V_1, ...V_r$ die Nachfolger von V im Baum sind $\} \cup Ax(R)$

4) R_F ist linkseindeutig und rechtstotal
klar

5) F ist disjunkt zerlegbar.
klar, da $| F | = 1$

6) g ist rechtseindeutig
klar, da g eine Abbildung ist.

7)
$S := \{([k_1, ..,k_n], n) \mid [k_1, ..,k_n]$ hat keinen Nachfolger$\}$
also: S ist rechtseindeutig

4.4.15.7 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $V\in A$, dann gilt:

$N([k_1, ..,k_n]) = (a(k_1, k_2) + ... + a(k_{n-1}, k_n) ; [k_1, ..,k_n])$
falls $[k_1, ..,k_n]$ hat keinen Nachfolger

$N(p) = g((N(p_1), .., N(p_m)))$ sonst, wobei $p_1, ..,p_m$ die Nachfolger von p sind.

Bemerkung:
Man muß noch zeigen, daß die Abbildung N(p) auch wirklich eine Formalisierung des kürzesten Abstands ist.

4.4.16 Kürzester Abstand zweier Knoten in einem Graph

4.4.16.1 Beschreibung

K = { n_1, ..,n_{anz} } ist die Knotenmenge eines Graphen mit Knotenanzahl |K| = anz.
Je zwei benachbarte Knoten i und j haben einen bestimmten Abstand a(i , j) voneinander, der im Beispiel durch eine Zahl an der Kante dargestellt wird.
Mit [k_1, ..,k_n] (andere Schreibweise: [k_1, ..,k_n] um runde Klammergebirge zu vermeiden) wird ein **Pfad** in einem Graphen bezeichnet, wobei die k_1, ..,k_n Elemente aus der Knotenmenge V(G) des Graphen G alle paarweise verschieden sind und k_i und k_{i+1} benachbart sind.
Der Pfad [k_1, ..,k_n , k_{n+1}] ist ein **Nachfolger** des Pfads [k_1, ..,k_n] gdw k_{n+1} und k_n benachbart sind.

Gesucht ist der kürzeste Abstand d([k_1, ..,k_n] , k) zweier Knoten k_n und k
wobei [k_1, ..,k_n] ein Pfad ist und dieser Weg nicht durch einen der Knoten { k_1, ..,k_{n-1} } gehen darf und k $\notin$ { k_1, ..,k_{n-1} }.

Die Absicht ist, (bei einem vorgegebenen Knoten k) einen vorgegebenen Pfad [k_1, ..,k_n] so zu einem Pfad [k_1, ..,k_n , v_{n+1}, ..., k] zu ergänzen, daß die Länge des Pfades
k_1 --> ... --> k_n ---> v_{n+1} --> ... ---> k minimal wird.

4.4.16.1.1 Beispiel

Die Knotenmenge des Graphen ist {1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }
Die Zahlen an den Kanten bedeuten die Abstände zwischen 2 Knoten.
Der kürzeste Abstand zwischen den Knoten 1 und 3 beträgt d([1] , 3) = 50 + 60 = 110

```
         50              60                 70
1---------------2---------------3---------------4
|               |               |               |
|               |               |               |
|               |               |               |
|40             |30             |20             |10
|               |               |               |
|               |               |               |
|               |               |               |
5---------------6---------------7---------------8
         80               90                100
```

4.4.16.2 Regeln

A : = Menge aller Paare ($[k_1, .., k_n]$, k) wobei $[k_1, .., k_n]$ ein Pfad ist und $k \notin \{ k_1, .., k_{n-1} \}$.
B : = Menge aller Paare (w, p) wobei w eine natürliche Zahl (einschließlich 0 und 00) und p ein Pfad im Graph G bedeutet.

$f = \{ (((p_1,k), \ldots , (p_r,k)),(p,k)) \mid p \in A \wedge p_1 \in A \wedge \ldots \wedge p_r \in A \wedge k \in K$
wobei $p_1, \ldots p_r$ die Nachfolger von p }

$g(((b_1, p_1), \ldots, (b_m, p_m))) = (\min\limits_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{ b_i \} , p_k)$

wobei p_k der 1.Pfad mit $b_k = \min\limits_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{ b_i \}$

$S := \{ (((k_1, \ldots , k_r),k) ; (a(k_1,k_2)+ a(k_2,k_3)+\ldots a(k_{r-1},k_r), (k_1, \ldots , k_r))) \mid k = kr \} \cup$
$\{ (((k_1, \ldots , k_r),k) ; (00, (-1))) \mid (k_1, \ldots , k_r)$ hat keinen Nachfolger und $k \neq kr \}$

4.4.16.3 Regelnkurznotation

R1:

$\varnothing$
-- falls $k_n = k$
$(([k_1, .., k_n] ,k) ; (a(k_1, k_2) + a(k_2, k_3) + \ldots + a(k_{n-1}, k_n) , [k_1, .., k_n]))$

R2:
$k \neq k_n$ und es gibt keinen Nachfolgerpfad mehr von $[k_1, .., k_n]$ (d.h. es existieren keinen "freien" direkten Nachbarknoten mehr von k_n), d.h. alle direkten Nachbarknoten von k_n sind Element von $\{ k_1, .., k_{n-1} \}$

Beispiel oben: (([3,7,8,4],1) ; (00, [-1]))

$\varnothing$

$(([k_1, .., k_n],k) , (00, [-1]))$

R3:
$[k_1, .., k_n , V_1], \ldots, [k_1, .., k_n , V_m]$ sind die Nachfolger von $[k_1, .., k_n]$.

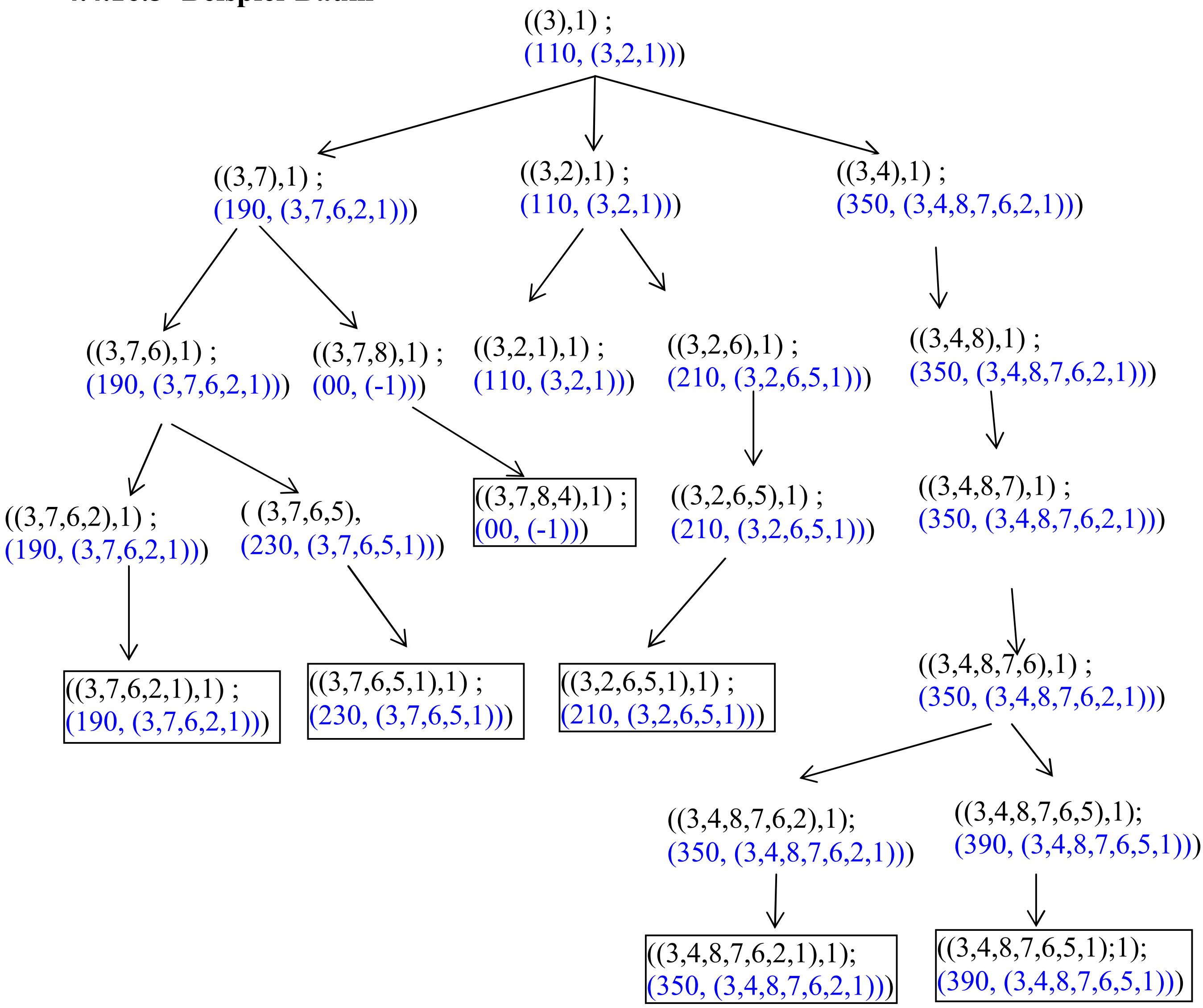
$(([k_1, .., k_n , V_1] , k) ; (b_1, [v_1, .., v_r, N_1])) , \ldots, ([k_1, .., k_n , V_m], k) , (b_m, [v_1, .., v_r, N_m]))$

$(([k_1, .., k_n] , k) , g(((b_1, [v_1, .., v_r, N_1]), \ldots, (b_m, [v_1, .., v_r, N_m])))$

4.4.16.4 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der Menge A aller Pfade:
Man sortiert alle Pfade der Länge |K| (= Menge aller Knoten des Graphen) nach einem vorgegebenen Kriterium (z.B. dem Alphabet nach) und fügt sie in die Liste ein.
Dann sortiert man aller Pfade der Länge |K|-1 und fügt sie an die Liste an, usw.
Die Menge aller so konstruierten Folgen bilden die Menge A mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.16.5 Beispiel-Baum



Dies ist der Baum zum obigen Graphen, wobei der kürzeste Pfad vom Knoten 3 zum Knoten 1 gesucht wird. Der Baum wird von den Blättern (hier als umrandete Kästchen gezeichnet) ausgehend zur Wurzel konstruiert.

4.4.16.6 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

Wenn $[k_1, .., k_n] \in A$, dann gilt:
$N(([k_1, .., k_n], k)) = (a(k_1,k_2)+...+a(k_{n-1},k_n),\ [k_1, .., k_n])$ falls $k = k_n$

$N(([k_1, .., k_n], k])) = (00, [-1])$ falls $[k_1, .., k_n]$ keinen Nachfolger und $k \neq k_n$

$N((p, k)) = g((N(p_1, k) , ..., N(p_m, k)))$ sonst, wobei $p_1, .., p_n$ die Nachfolger von p sind.

Bemerkung:
Man muß noch zeigen, daß die Abbildung N(p, k) auch wirklich eine Formalisierung des kürzesten Abstands ist.

4.4.17 Kürzeste Rundreise in einem Graph

4.4.17.1 Beschreibung

K = { n_1, ..,n_{anz} } ist die Knotenmenge eines Graphen mit Knotenanzahl |K| = anz.
Je zwei benachbarte Knoten i und j haben einen bestimmten Abstand a(i , j) voneinander, der im Beispiel durch eine Zahl an der Kante dargestellt wird.
Mit [k_1, ..,k_n] (andere Schreibweise: [k_1, ..,k_n] um runde Klammergebirge zu vermeiden) wird ein **Pfad** in einem Graphen bezeichnet, wobei die k_1, ..,k_n Elemente aus der Knotenmenge K des Graphen alle paarweise verschieden sind und k_i und k_{i+1} benachbart sind.
Der Pfad [k_1, ..,k_n , k_{n+1}] ist ein **Nachfolger** des Pfads [k_1, ..,k_n] gdw k_{n+1} und k_n benachbart sind.
Gesucht ist kürzeste Pfad (Rundreise), der von einem Anfangsknoten k ausgeht, alle Knoten des Graphen genau einmal besucht und wieder am Anfangsknoten k ankommt.

Die Absicht ist, einen vorgegebenen Pfad [k_1, ..,k_n] so zu einem Pfad [k_1, ..,k_n , v_{n+1}, ..., $v_{|K|}$] zu ergänzen, daß $v_{|K|}$ zu k_1 benachbart ist und die Länge der Rundreise
k_1 --> ... --> k_n ---> v_{n+1} --> ... --> $v_{|G|}$ ---> k_1 minimal wird.

4.4.17.1.1 Beispiel

Die Knotenmenge des Graphen ist {1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }
Die Zahlen an den Kanten bedeuten die Abstände zwischen 2 Knoten.
Die kürzeste Rundreise, die beim Knoten k = 4 beginnt ist:
[4,3,2,1,5,6,7,8,4]
Bem:
[4,8,7,6,5,1,2,3,4] ist ebenfalls eine kürzeste Rundreise.

```
          50                60                  70
1---------------2---------------3---------------4
|               |               |               |
|               |               |               |
|               |               |               |
|40             |30             |20             |10
|               |               |               |
|               |               |               |
|               |               |               |
5---------------6---------------7---------------8
          80                90                 100
```

4.4.17.2 Regeln

A : = Menge aller Pfade im Graph.
B : = Menge aller Paare (w, p) wobei w eine natürliche Zahl (einschließlich 0 und 00) und p ein Pfad im Graph G bedeutet.

f = { ((p_1, ... , p_r),p) | $p \in A \wedge p_1 \in A \wedge \ldots \wedge p_r \in A$, wobei p_1, ...p_r die Nachfolger von Pfad p }
g(((b_1, p_1), ..., (b_m, p_m))) = ($\min\limits_{i \in \{1,\ldots,m\}}$ { b_i } , p_k)
wobei p_k der 1. Pfad mit $b_k = \min\limits_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{ b_i \}$

S: =
{([k_1, ..,k_n] ; (a(k_1,k_2) +...a(k_{n-1},k_n) + a(k_n,k_1), [k_1, ..,k_n])) | [k_1, ..,k_n] hat keinen
Nachfolger und [k_1, ..,k_n] und n = | G und k_n und k_1 sind benachbart} $\cup$
{([k_1, ..,k_n] ; (00, [-1])) | [k_1, ..,k_n] hat keinen Nachfolger und es gilt nicht :
[k_1, ..,k_n] und n = Knotenanzahl und k_n und k_1 sind benachbart}

4.4.17.3 Regelnkurznotation

Regel 1:
[k_1, ..,k_n] hat keinen Nachfolger und [k_1, ..,k_n] und n = |K| und k_n und k_1 sind benachbart:

$\varnothing$

([k_1, ..,k_n] ; (a(k_1,k_2)+...a(k_{n-1},k_n)+a(k_n,k_1), [k_1, ..,k_n]))

Regel 2:
[k_1, ..,k_n] hat keinen Nachfolger und es gilt nicht :
[k_1, ..,k_n] und n = Knotenanzahl und k_n und k_1 benachbart:
N([k_1, ..,k_n]) = (00, [-1])

$\varnothing$

([k_1, ..,k_n] ; (00, [-1]))

Regel 3:
sonst, wobei [k_1, ..,k_n, N_1], ..., [k_1, ..,k_n, N_m] die Nachfolger von [k_1, ..,k_n] sind
und p_k der 1.Pfad mit $b_k = \min\limits_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{ b_i \}$

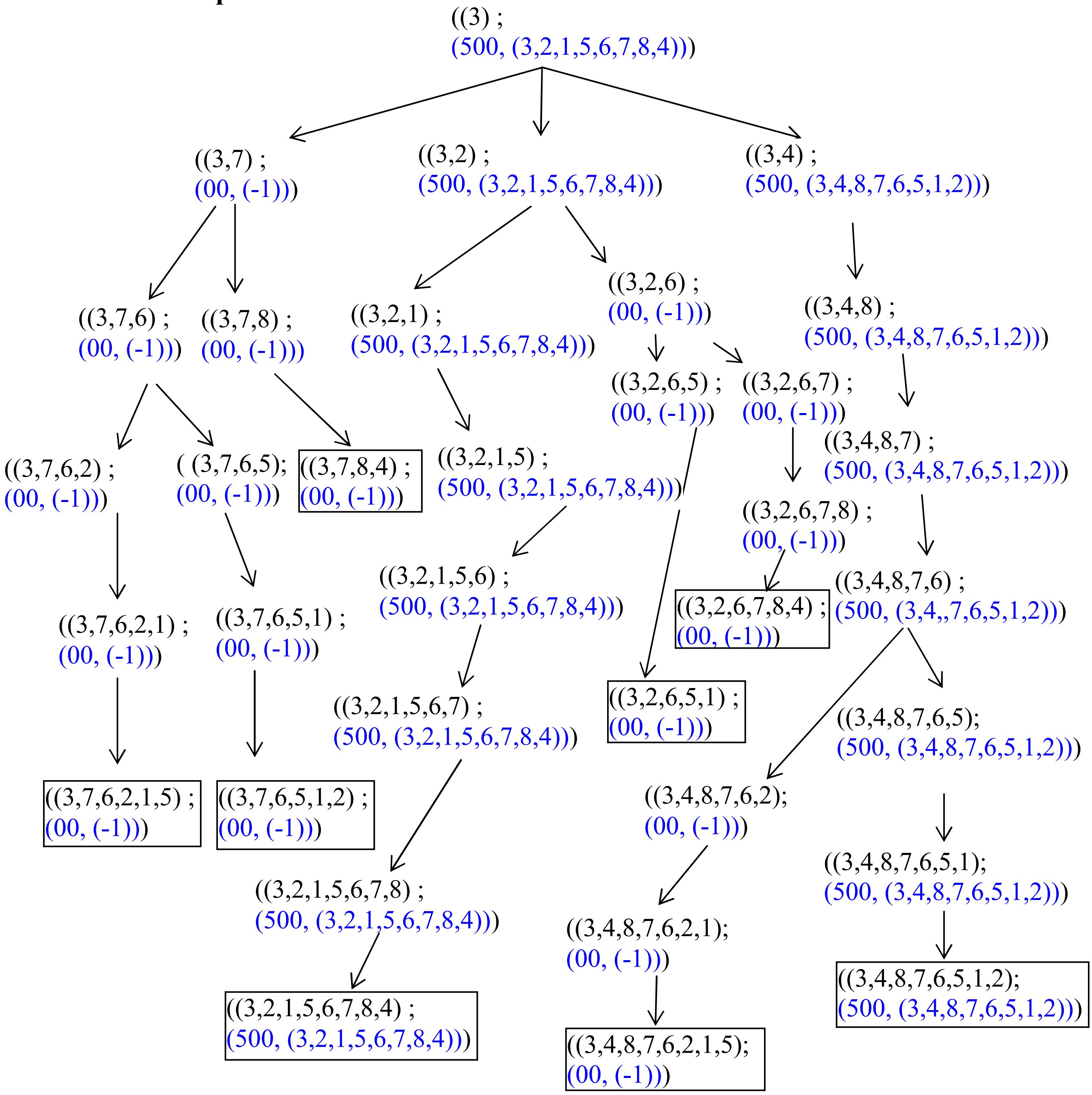
([k_1, ..,k_n, N_1]; (b_1,p_1)) , ..., ([k_1, ..,k_n, N_m]; (b_m,p_m))

([k_1, ..,k_n] ; g(((b_1,p_1) ...., (b_m,p_m))))

4.4.17.4 Ordnung

Man bildet wie folgt eine geordnete Liste der Menge A aller Pfade:
Man sortiert alle Pfade der Länge |K| nach einem vorgegebenen Kriterium (z.B. dem Alphabet nach) und fügt sie in die Liste ein.
Dann sortiert man alle Pfade der Länge |K|-1 und fügt sie an die Liste an, usw.
Die Menge aller so konstruierten Folgen bilden die Menge A mit der entsprechenden Ordnungsrelation <

4.4.17.5 Beispiel-Baum



Dies ist der Baum zum obigen Graphen, wobei die kürzeste Rundreise vom Knoten 3 ausgehend gesucht wird. Der Baum wird von den Blättern (hier als umrandete Kästchen gezeichnet) ausgehend zur Wurzel konstruiert.

4.4.17.6 Anwendung des RekIndsatz 4 Version 2

$N([k_1, .., k_n]) = (a(k_1,k_2)+...+a(k_{n-1},k_n)+a(k_n,k_1),\ [k_1, .., k_n])$

wenn $[k_1, .., k_n] \in A$, dann gilt:
$[k_1, .., k_n]$ hat keinen Nachfolger und
$[k_1, .., k_n]$ und n = Knotenanzahl und k_n
und k_1 benachbart:

$N([k_1, .., k_n]) = (00,\ [-1])$

$[k_1, .., k_n]$ hat keinen Nachfolger und nicht:
$[k_1, .., k_n]$ und n = Knotenanzahl und k_n
und k_1 benachbart:

$N(p) = g(\ (N(p_1), ..., N(p_m))\ )$

sonst:
wobei $p_1, .., p_m$ die Nachfolger von p sind.

Bemerkung:
Man muß noch zeigen, daß die Abbildung N(p) auch wirklich eine Formalisierung der kürzesten Rundreise ist.

5 Was fehlt noch

1) Sortieren einer Liste mit Rekursion.

2)
Das Spiel Solitaire vollanalysieren !!!!!!
Solitär: 38 Kugeln (Anordnung s.u.,keine in der Mitte)
Ziel: Nur noch eine Kugel genau in der Mitte übrigzulassen.
Anleitung: Mit einer Kugel über eine andere auf ein freies Feld springen, die übersprungene Kugel darf weggenommen werden.