1 Marktwirtschaftliches Gleichgewicht

"Eine Wissenschaft ist erst dann als voll entwickelt anzusehen, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können."
Karl Marx, nach Paul Lafargue 'Persönliche Erinnerungen' In: Erinnerungen an Karl Marx. Berlin 1953. Seite 155.

1.1 Um was es geht

Beschreiben des dynamischen Verhalten der Preisentwicklung eines Marktes mit Hilfe der elementaren Grundrechenarten und ohne Verwendung höherer Mathematik anhand ausgewählter Übungsaufgaben und mit Unterstützung einer Tabellenkalkulation wie z.B. EXCEL.

1.2 Modellvorstellung

Bei einem Auktionsprozess ruft ein Auktionator einen Anfangsmarktpreis aus.
Dann melden sich Anbieter und Nachfrager. Die Differenz zwischen Nachfrage und Angebot bewirkt eine bestimmte Preisänderung. Je größer die Differenz, umso größer ist die Preisänderung.

Um diese Preisänderung wird dann der Preis verändert. Der Auktionator ruft dann einen neuen Preis aus. Dieser neue Preis bewirkt dann ein neues Angebot und eine neue Nachfrage, usw.
Wenn Angebot und Nachfrage gleich groß ist, wird das Geschäft abgeschlossen und der Auktionsprozess ist beendet.

1.2.1 Die verwendeten Parameter des Modells

Die volkswirtschaftlichen Größen, Preis p(t), Angebotsmenge a(n), Nachfragemenge n(t) werden zu den Zeitpunkten $0 \cdot \Delta t$, $1 \cdot \Delta t$, $2 \cdot \Delta t$, $3 \cdot \Delta t$, ... also allgemein nach dem Zeitpunkt $t_n = n \cdot \Delta t$ betrachtet.

Man definiert dann:
$p(t_n) = p_n$
$a(t_n) = a_n$
$n(t_n) = n_n$

1.2.1.1 Die Nachfrage

Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus „volkswirtschaftlichen“ Gründen):
Je größer der Preis wird, umso geringer wird die Nachfrage der Kunden.
Dies kann durch eine Nachfragekurve mit negativer Steigung modelliert werden:
$a(t) = S \cdot p(t) + s$

1.2.1.2 Das Angebot

Je größer der Preis wird, umso größer wird das Angebot der Unternehmer auf dem Markt
Dies kann durch eine Angebotskurve mit positiver Steigung modelliert werden:
$n(t) = D \cdot p(t) + d$

1.2.1.3 Die Preisveränderung

Je größer die Differenz zwischen Nachfrage und Angebot wird, umso größer wird die Preisveränderung.
Dies wird durch eine Proportionalität modelliert:
$p'(t) = m(n(t) - a(t))$

1.2.1.4 Die Berechnung

Damit folgt:
$p'(t) = m(D \cdot p(t) + d - (S \cdot p(t) + s)) =$
$m(D \cdot p(t) + d - S \cdot p(t) - s) =$
$mD \cdot p(t) + md - mS \cdot p(t) - ms =$
$(mD-mS) \cdot p(t) + md - ms$

also:
$p'(t) = (mD-mS) \cdot p(t) + md - ms$

Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n ($=n \cdot \Delta t$)
$p'(t_n) = (mD-mS) \cdot p(t_n) + md - ms$

oder anders geschrieben:
$p_n' = (mD-mS) \cdot p_n + md - ms$

Der Preis zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten Δt), kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Preisänderung während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muss man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.
$p_{n+1} \approx p_n + p_n' \cdot \Delta t$
also:

$$\boxed{p_{n+1} \approx p_n + ((mD-mS) \cdot p_n + md - ms) \cdot \Delta t}$$

Damit kann man von einem beliebigen Anfangspreis p_0 ausgehend den Preis p_1 berechnen, dann den Preis p_2 , usw. usf.

Dazu eignet sich ein Tabellenkalkulationsprogramm wie z.B. Excel

1.3 Exakte Berechnung

Der exakte Wert des Gleichgewichtspreises in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$\boxed{p(t) = (p_0 + \frac{d-s}{D-S})e^{(mD-mS)t} - \frac{d-s}{D-S}}$$

Damit gilt:

$$\lim_{t-->00} p(t) = \lim_{t-->00} (p_0 + \frac{d-s}{D-S})e^{(mD-mS)t} - \frac{d-s}{D-S} = \frac{s-d}{D-S}$$

Damit gilt für den Gleichgewichtspreis p_g

$$\boxed{p_g = \frac{s-d}{D-S}}$$

Bemerkungen:
1)
Der Preis ist die unabhängige Größe. Diese wird in vielen VWL-Büchern auf der y-Achse abgetragen.

2)
Wie in der VVL Modelle systematisch falsch auf die Realität übertragen werden, um politische bestimmte vorgefasste Sichtweisen zu vermitteln, kritisiert der verstorbene Mathematiker Claus Peter Prof. Ortlieb an einigen konkreten Beispielen:

https://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/hb18MethFehlerVWL.pdf

https://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/

2 Elektrotechnik

Bemerkungen:
Die Dimensionen sind wie folgt angegeben und werden bei den folgenden Rechnungen nicht immer angegeben, aber stillschweigend benutzt.

Physikalische Größe	Dim
Zeit (t)	s
Strom (I)	A
Spannung (U)	V
Widerstand (R)	Ω
Kapazität (C)	1 F
Eigeninduktivität (L)	Vs/A

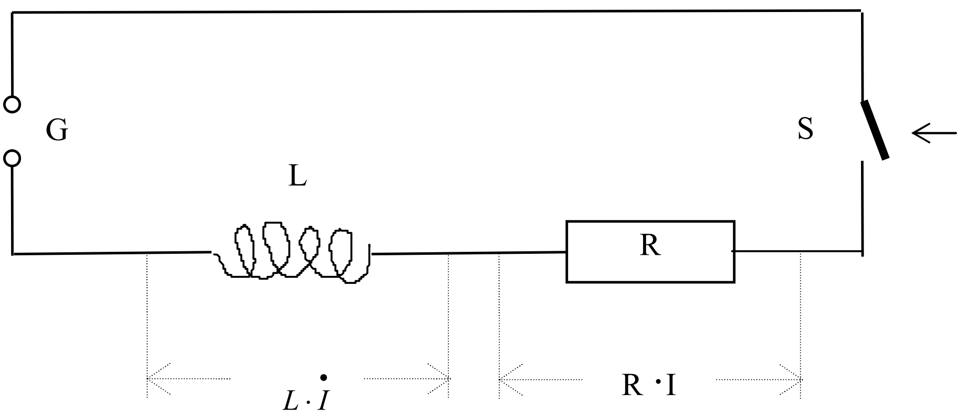
Wichtige Vorbemerkung:

Die elektrischen Größen Q(t), I(t), U(t), usw. werden zu den Zeitpunkten $0 \cdot \Delta t$, $1 \cdot \Delta t$, $2 \cdot \Delta t$, $3 \cdot \Delta t$, ... also allgemein nach dem Zeitpunkt $t_n = n \cdot \Delta t$ betrachtet.
Man definiert dann:
$Q(t_n) = Q_n$
$I(t_n) = I_n$
$U(t_n) = U_n$

usw.

2.1 Ladekurve einer Spule

Eine Spule L mit dem Widerstand R ist an einer Spannungsquelle G angeschlossen.
Dann wird der Schalter S geschlossen.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):

$G = R \cdot I(t) + L \cdot \dot{I}(t)$
Daraus folgt für die Stromänderung zu jedem Zeitpunkt t:

$$\mathbf{\dot{I}(t) = (G - I(t) \cdot R) / L}$$

Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n (=n ·R)

$$\mathbf{\dot{I}(t_n) = (G - I(t_n) \cdot R) / L}$$

oder anders geschrieben:

$$\mathbf{\dot{I}_n = (G - I_n \cdot R) / L} \qquad \text{(L1)}$$

2) Der Strom zum Zeitpunkt 0 beträgt:

$$\mathbf{I_0 = 0} \qquad \text{(L2)}$$

3) Die Stromstärke, die zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten Δt) fließt, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromänderung $\dot{I}$ während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$$\mathbf{I(t_{n+1}) \approx I(t_n) + \dot{I}(t_n) \cdot \Delta t}$$

oder anders geschrieben:

$$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n + \dot{I}_n \cdot \Delta t} \qquad \text{(L3)}$$

Mit diesen 3 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:

$$\begin{tikzcd}
I_0 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & I_1 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "3"'] & I_2 \arrow[r, "6"] \arrow[d, "5"'] & I_3 \arrow[d, "7"'] & \cdots\cdots \\
\dot{I}_0 \arrow[ur, "2"] & \dot{I}_1 \arrow[ur, "4"] & \dot{I}_2 \arrow[ur, "6"] & \dot{I}_3 &
\end{tikzcd}$$

Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 400 V; L = 10 Vs/A; R = 1 Ω; Δt = 1 s

n	t_n	$I(t_n)$	$\dot{I}(t_n)$
0	0 · 1s = 0s	0A	= (400V - 0A*1Ω) / 10Vs/A = 40A/s
1	1 · 1s = 1s	0A + 40A/s · 1s = 40A	= (400V - 40A*1Ω) / 10Vs/A = 36A/s
2	2 · 1s = 2s	40A + 36A/s · 1s = 76A	= (400V - 76A*1Ω) / 10Vs/A = 32,4A/s
3	3 · 1s = 3s	76A + 32,4A/s · 1s = 108,4A	= (400V - 108,4A*1Ω) / 10Vs/A = 29,16A/s
...			

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für G, R. L und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. G = 400 V, R = 1 Ω; L = Vs/A, Δt = 0,1 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.

Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, I_n und $\dot{I}_n$ in der die Zeit t_n (= n · Δt) nach n Zeitabschnitten, die Stromstärke I_n und die Stromstärkenänderung $\dot{I}_n$ in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = \frac{G}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von t = t_n dargestellt wird. Der letzte Eintrag aus der Wertetabelle soll 99,9% der Endstromstärke anzeigen.
D.h. man muß ca. $\frac{7L}{R \cdot \Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

Bemerkung (für mathematisch Interessierte):

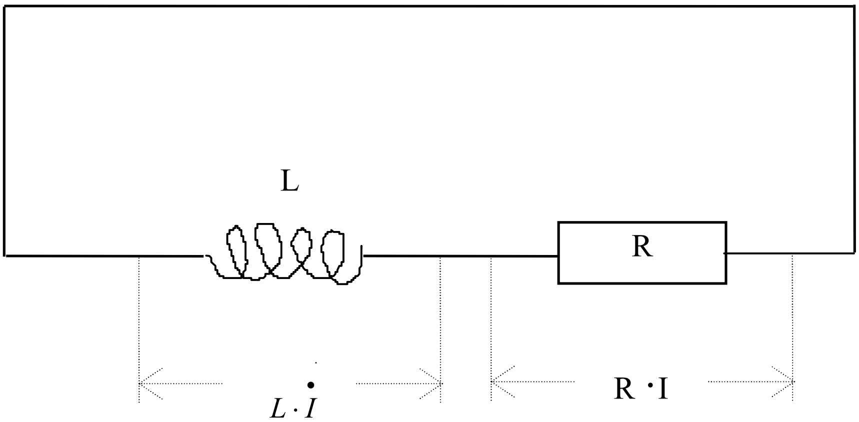
Mit (L1) in (L3) eingesetzt und (L2) ergibt sich:

$$\mathbf{I_0 = 0}$$

$$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n + (G - I_n \cdot R)/L \cdot \Delta t} \quad \text{für n >=1}$$

2.2 Entladekurve einer Spule

Eine Spule L mit dem Widerstand R ist an einer Spannungsquelle G angeschlossen.
Nach einer gewissen Zeit befindet sich dann an der Spule die Endspannung G.
Dann wird die Spannungsquelle entfernt und die Spule kurzgeschlossen.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):

$R \cdot I(t) = L \cdot \dot{I}(t)$

Daraus folgt für die Stromänderung zu jedem Zeitpunkt t:

$\mathbf{\dot{I}(t) = R \cdot I(t) / L}$

Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n (=n ·R)

$\mathbf{\dot{I}(t_n) = R \cdot I(t_n) / L}$

oder anders geschrieben:

$\mathbf{\dot{I}_n = R \cdot I_n / L}$ **(L11)**

2) Der Strom zum Zeitpunkt 0 beträgt:

$\mathbf{I_0 = G/R}$ (L21)

3) Die Stromstärke, die zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten Δt) fließt, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromänderung $\dot{I}$ während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$$\mathbf{I(t_{n+1}) \approx I(t_n) - \dot{I}(t_n) \cdot \Delta t}$$

oder anders geschrieben:

$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n - \dot{I}_n \cdot \Delta t}$ (L31)

Damit diesen 3 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:

$$\begin{tikzcd}
I_0 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & I_1 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "3"'] & I_2 \arrow[r, "6"] \arrow[d, "5"'] & I_3 \arrow[d, "7"'] & \cdots\cdots \\
\dot{I}_0 \arrow[ur, "2"] & \dot{I}_1 \arrow[ur, "4"] & \dot{I}_2 \arrow[ur, "6"] & \dot{I}_3 &
\end{tikzcd}$$

Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 400 V; L = 10 Vs/A; R = 1 Ω; Δt = 1 s

n	t_n	$I(t_n)$	$\dot{I}(t_n)$
0	$0 \cdot 1$ s = 0s	400V / 1Ω = 400A	= 400A ·1Ω / 10Vs/A = 40A/s
1	$1 \cdot 1$ s = 1s	400A - 40A/s ·1s = 360A	= 360A ·1Ω / 10Vs/A = 36A/s
2	$2 \cdot 1$ s = 2s	360A - 36A/s ·1s = 324A	= 324A ·1Ω / 10Vs/A = 32,4A/s
3	$3 \cdot 1$ s = 3s	324V - 32,4A/s ·1s = 291,6A	= 291,6A ·1Ω / 10Vs/A = 29,16A/s
...			

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für G, R. L und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. G = 400 V, R = 1 Ω; L = Vs/A, Δt = 0,1 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.

Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, I_n und $\dot{I}_n$, in der die Zeit t_n (= $n \cdot \Delta t$) nach n Zeitabschnitten, die Stromstärke I_n und die Stromstärkenänderung $\dot{I}_n$ in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = \frac{G}{R} \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird. Der letzte Eintrag aus der Wertetabelle soll 0,1% der Anfangsstromstärke anzeigen.
D.h. man muß ca. $\frac{7L}{R \cdot \Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

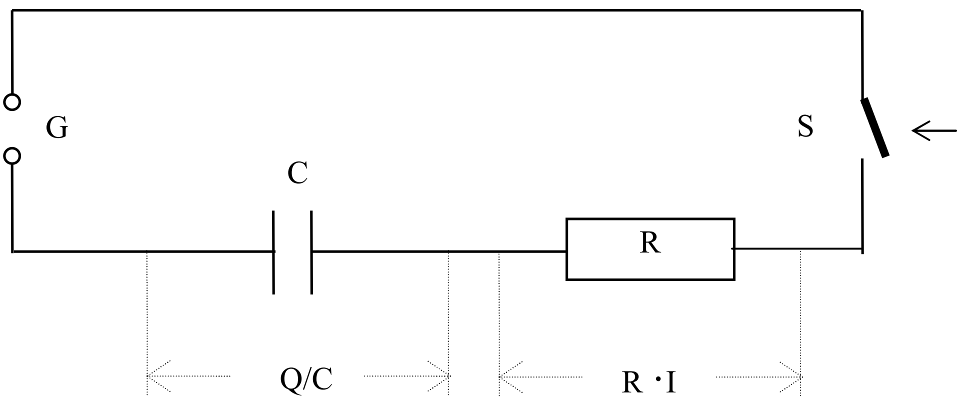
Bemerkung (für mathematisch Interessierte):
Mit (L11) in (L31) eingesetzt und (L21) ergibt sich:

$$\mathbf{I_0 = GR}$$

$$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n - (R \cdot I_n / L) \cdot \Delta t} \qquad \text{für } n >= 1$$

2.3 Ladekurve eines Kondensators

Ein Widerstand R und ein (entladener) Kondensator C sind an einer Spannungsquelle G angeschlossen.
Dann wird der Schalter S geschlossen.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):
$G = Q(t) / C + R \cdot I(t)$
Daraus folgt für die Stromstärke zu jedem Zeitpunkt t:
$I(t) = (GC - Q(t)) / RC$
Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n (=n ·R)
$I(t_n) = (GC - Q(t_n)) / RC$
oder anders geschrieben:

$$\mathbf{I_n = (GC - Q_n) / RC} \qquad \text{(C1)}$$

2) Die Ladungsmenge zum Zeitpunkt 0 beträgt:

$$\mathbf{Q_0 = 0} \qquad \text{(C2)}$$

3) Die Ladungsmenge, die sich zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten) auf dem Kondensator befindet, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromstärke I während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n + I_n \cdot \Delta t} \qquad \text{(C3)}$$

Mit diesen 3 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:

$$\begin{tikzcd}
Q_0 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & Q_1 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "3"'] & Q_2 \arrow[r, "6"] \arrow[d, "5"'] & Q_3 \arrow[d, "7"'] & \cdots\cdots \\
I_0 \arrow[ur, "2"] & I_1 \arrow[ur, "4"] & I_2 \arrow[ur, "6"] & I_3 &
\end{tikzcd}$$

Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 200 V; R = 10 Ω; C = 1 F; Δt = 1 s

n	t_n	$Q(t_n)$	$I(t_n)$
0	0 · 1s = 0s	0C	(200V ·1C - 0C) / 10Ω ·1C = 20A
1	1 · 1s = 1s	0C + 20A · 1s = 20C	(200V ·1C - 20C) / 10Ω ·1C = 18A
2	2 · 1s = 2s	20C + 18A · 1s = 38C	(200V ·1C -38C) / 10Ω ·1C = 16,2A
...			

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für R, C, G und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. R = 1 Ω; C = 2 F; G = 40 V; Δt = 1 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.
Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, Q_n und I_n, in der die Zeit t_n (= n · Δt) nach n Zeitabschnitten, die Ladungsmenge Q_n und der Strom I_n am Kondensator in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = \frac{G}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.
Der letzte Einträg aus der Wertetabelle soll 99,9% der Endstromstärke anzeigen.
D.h. man muß ca. $\frac{7CR}{\Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

d) Nehmen Sie noch die Spannung U_n und die exakte Spannung Uex_n am Kondensator (in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten) in die Wertetabelle mit auf.

Bemerkung:
Der exakte Wert der Spannung U in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Uex(t) = G \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

e) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n, U_n und Uex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.

Bemerkung (für mathematisch Interessierte):

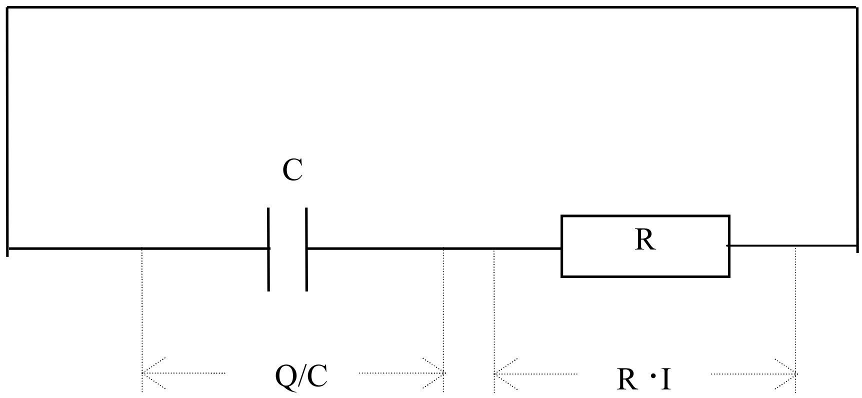
Mit (C1) in (C3) eingesetzt und (C2) ergibt sich:

$$\mathbf{Q_0 = 0}$$

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n + (GC - Q_n) / RC \cdot \Delta t} \qquad \text{für } n >= 1$$

2.4 Entladekurve eines Kondensators

Ein voll geladener Kondensator C mit der Anfangsspannung G wird über einen Widerstand R entladen.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):
$Q(t) / C = R \cdot I(t)$
Daraus folgt für die Stromstärke zu jedem Zeitpunkt t:
$I(t) = Q(t) / RC$
Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n $(=n \cdot R)$
$I(t_n) = Q(t_n) / RC$
oder anders geschrieben:

$$\mathbf{I_n = Q_n / RC} \qquad \text{(C11)}$$

2) Die Ladungsmenge zum Zeitpunkt 0 beträgt (U(0) = G):

$$\mathbf{Q_0 = GC} \qquad \text{(C21)}$$

3) Die Ladungsmenge, die sich zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten) auf dem Kondensator befindet, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromstärke I während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - I_n \cdot \Delta t} \qquad \text{(C31)}$$

Mit diesen 3 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:

$$\begin{tikzcd}
Q_0 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & Q_1 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "3"'] & Q_2 \arrow[r, "6"] \arrow[d, "5"'] & Q_3 \arrow[d, "7"'] & \cdots\cdots \\
I_0 \arrow[ur, "2"] & I_1 \arrow[ur, "4"] & I_2 \arrow[ur, "6"] & I_3 &
\end{tikzcd}$$

Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 200 V; R = 10 Ω; C = 1 F; Δt = 1 s

n	t_n	$Q(t_n)$	$I(t_n)$
0	0 · 1s = 0s	200V · 1F = 200C	200C / 10Ω · 1F = 20A
1	1 · 1s = 1s	200C - 20A · 1s = 180C	180C / 10Ω · 1F = 18A
2	2 · 1s = 2s	180C - 18A · 1s = 162C	162C / 10Ω · 1F = 16,2A
...			

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für R, C, G und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. R = 1 Ω; C = 2 F; G = 40 V; Δt = 1 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.
Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, Q_n, und I_n, in der die Zeit t_n (= n · Δt) nach n Zeitabschnitten, die Ladungsmenge Q_n , und der Strom I_n und am Kondensator in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = \frac{G}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.
Der letzte Eintrag aus der Wertetabelle soll 0,1% der Anfangsstromstärke anzeigen.
D.h. man muß ca. $\frac{7CR}{\Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

d) Nehmen Sie noch die Spannung U_n und die exakte Spannung Uex_n am Kondensator (in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten) in die Wertetabelle mit auf.

Bemerkung:
Der exakte Wert der Spannung U in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Uex(t) = G \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

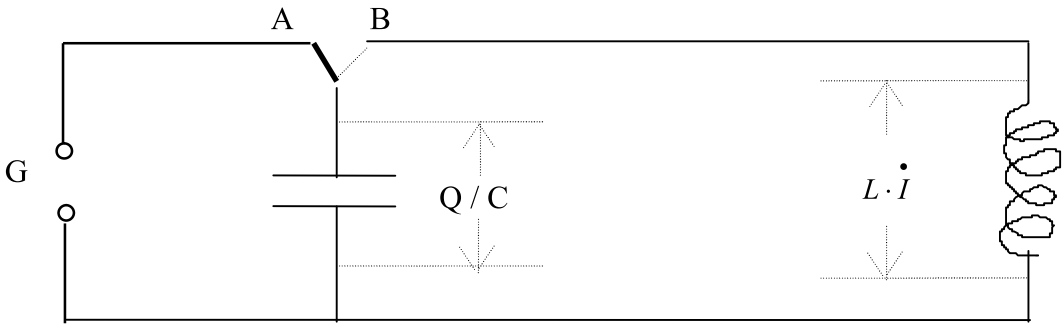
e) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n, U_n und Uex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.

Bemerkung (für mathematisch Interessierte):
Mit (C11) in (C31) eingesetzt und (C21) ergibt sich:

$$\mathbf{Q_0 = GC}$$
$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - (Q_n / RC) \cdot \Delta t} \qquad \text{für } n >= 1$$

2.5 Elektrischer Schwingkreis

In der Schalterstellung A wird ein Kondensator C voll geladen, bis an ihm die Spannung G anliegt. Danach wird der Schalter in Stellung B gebracht, d.h. die Spule L und der Kondensator C sind direkt miteinander verbunden. Der Widerstand der Spule soll 0 Ω sein.



1) Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus elektrotechnischen Gründen):

$Q(t) / C = L \cdot \dot{I}\,\mathbf{(t)}$

Daraus folgt für die Stromstärkenänderung zu jedem Zeitpunkt t:

$\dot{I}\,(t) = Q(t) / LC$

Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n (=n ·R)

$\dot{I}\,(t_n) = Q(t_n) / LC$

oder anders geschrieben:

$\mathbf{\dot{I}_n = Q_n / LC}$ (S1)

2) Die Ladungsmenge zum Zeitpunkt 0 beträgt (U(0) = G):

$\mathbf{Q_0 = GC}$ (S2)

3) Die Stromstärke zum Zeitpunkt 0 beträgt:

$\mathbf{I_0 = 0}$ (S3)

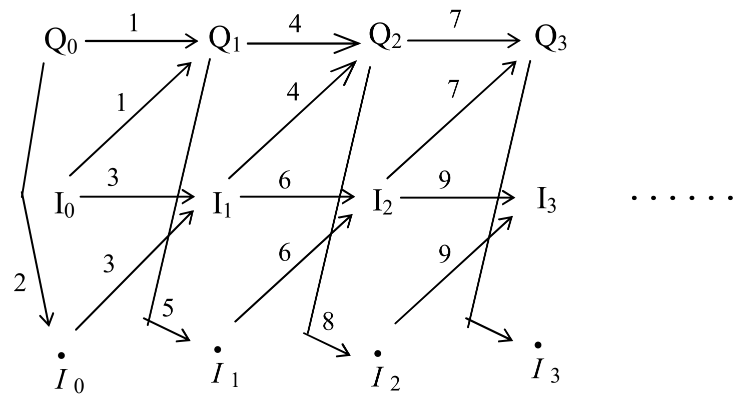
4) Die Stromstärke zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten), kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Stromstärkenänderung $\dot{I}\,(t)$ während des Zeitraums Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n + \dot{I}_n \cdot \Delta t}$ (S4)

5) Die Ladungsmenge, die sich zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten) auf dem Kondensator befindet, kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da der Strom I während des Zeitraums Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - I_n \cdot \Delta t}$ (S5)

Mit diesen 5 Formeln kann man die Stromstärke nach **jedem** Zeitraum Δt berechnen:



Konkretes Beispiel:
Voraussetzungen: G = 200V; L = 1Vs/A; C = 10F; Δt = 1 s

n	t_n	$Q(t_n)$	$I(t_n)$	$\dot{I}_1(t_n)$
0	0 · 1s = 0s	200V ·10F = 2000C	0A	2000C / 10F ·1VS/A = 200A/s
1	1 · 1s = 1s	2000C - 0A ·1s = 2000C	0A + 200A/s ·1s = 200A	2000C / 10F ·1VS/A = 200A/s
2	2 · 1s = 2s	2000C - 200A ·1s = 1800C	200A + 200A/s ·1s = 400A	1800C / 10F ·1VS/A = 180A/s
...				

Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für L, C, G und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. G = 2V; L = 0,01Vs/A; C = 1F; Δt = 0,001 s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.

Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, Q_n, I_n, und $\dot{I}_n$, in der die Zeit t_n (= n ·Δt) nach n Zeitabschnitten, die Ladungsmenge Q_n, der Strom I_n, und die Stromstärkenänderung $\dot{I}_n$ am Kondensator in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Iex(t) = -\frac{GC}{\sqrt{LC}} \cdot \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Nehmen Sie den exakten Wert der Stromstärke Iex_n nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.

Bemerkung:

Um 2 Perioden des Stromverlaufs anzuzeigen, muß man $\frac{4\pi\sqrt{LC}}{\Delta t}$ Einträge aus der Wertetabelle für das Diagramm benutzen.

d) Nehmen Sie noch die Spannung U_n und die exakte Spannung Uex_n am Kondensator (in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten) in die Wertetabelle mit auf.

Bemerkung:
Der exakte Wert der Spannung U in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$Uex(t) = G \cdot \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})$$

e) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem I_n und Iex_n, U_n und Uex_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.

Bemerkung (für mathematisch Interessierte):

$$\mathbf{I_{n+1} \approx I_n + I_n \cdot \Delta t}$$

damit:

$$\mathbf{I_n \approx I_{n-1} + \dot{I}_{n-1} \cdot \Delta t} \qquad \text{(H1)}$$

$$\mathbf{\dot{I}_n = Q_n / LC} \qquad \text{(S1)}$$

damit:

$$\mathbf{\dot{I}_{n-1} = Q_{n-1} / LC} \qquad \text{(H2)}$$

(H2) in (H1) eingesetzt:

$$\mathbf{I_n \approx I_{n-1} + (Q_{n-1} / LC) \cdot \Delta t} \qquad \text{(H3)}$$

$\mathbf{I_n}$ in (S5) eingesetzt:

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - (I_{n-1} + (Q_{n-1} / LC) \cdot \Delta t) \cdot \Delta t}$$

Damit hat man folgende Gleichungen, mit denen man die Ladungsmenge Q nach 0, 1, 2, ... Zeitabschnitten **Δt** berechnen kann:

$$\mathbf{I_0 = 0}$$

$$\mathbf{Q_0 = GC}$$

$$\mathbf{Q_1 \approx Q_0 - I_0 \cdot \Delta t}$$

$$\mathbf{Q_{n+1} \approx Q_n - (I_{n-1} + (Q_{n-1} / LC) \cdot \Delta t) \cdot \Delta t} \qquad \textbf{für n>=1}$$

3 Chemisches Gleichgewicht

Beschreiben des dynamisches Verhaltens einer chemischen Reaktion mit Hilfe der elementaren Grundrechenarten und ohne Verwendung höherer Mathematik anhand ausgewählter Übungsaufgaben und mit Unterstützung einer Tabellenkalkulation wie z.B. EXCEL.

Bemerkungen:
Die Dimensionen sind wie folgt angegeben und werden bei den folgenden Rechnungen nicht immer angegeben, aber stillschweigend benutzt.

Physikalische Größe	Dim
Zeit (t)	s
Konzentration []	g/l
Reaktionsgeschwindigkeit (v)	g/(l·s)
...	

Wichtige Vorbemerkung:

Die chemischen Größen, wie z.B. Konzentration [A](t), Reaktionsgeschwindigkeit v(t), usw. werden zu den Zeitpunkten $0 \cdot \Delta t$, $1 \cdot \Delta t$, $2 \cdot \Delta t$, $3 \cdot \Delta t$, ... also allgemein nach dem Zeitpunkt $t_n = n \cdot \Delta t$ betrachtet.

Man definiert dann:
$[A](t_n) = [A]_n$
$v(t_n) = v_n$
usw.

3.1 Die chemischen Vorgänge

3.1.1 Anschauliche Beschreibung

Ein Stoff A der Konzentration [A] zerfällt mit einer bestimmten "Geschwindigkeit" v_a - die proportional der Konzentration [A] (mit dem Proportionalitätsfaktor k_a) ist - in den Stoff B.
Umgekehrt zerfällt auch der Stoff B der Konzentration [B] mit einer bestimmten "Geschwindigkeit" v_b - die proportional der Konzentration [B] (mit dem Proportionalitätsfaktor k_b) ist - in den Stoff A.

Als Reaktionsgleichung dargestellt:

$$A \xrightarrow{k_a} B$$

$$B \xrightarrow{k_b} A$$

3.2 Detaillierte Beschreibung

3.2.1 Bezeichnungen

Die Konzentration des Stoffs A zum Zeitpunkt t wird mit [A](t) bezeichnet.
Die Konzentration des Stoffs B zum Zeitpunkt t wird mit [B](t) bezeichnet.
Die Reaktionsgeschwindigkeit des Stoffs A zum Zeitpunkt t (d.h. die pro Zeiteinheit abnehmende Konzentration des Stoffs A = die um den gleichen Betrag zunehmende Konzentration des Stoffs B) wird mit $v_a(t)$ bezeichnet.
Die Reaktionsgeschwindigkeit des Stoffs B zum Zeitpunkt t (d.h. die pro Zeiteinheit abnehmende Konzentration des Stoffs B = die um den gleichen Betrag zunehmende Konzentration des Stoffs A) wird mit $v_b(t)$ bezeichnet.

Die sich zum Zeitpunkt t ändernde Konzentration [A](t), (d.h. die Konzentrationsänderung des Stoffs A pro Zeiteinheit) wird mit $[\dot{A}](t)$ bezeichnet.
Die sich zum Zeitpunkt t ändernde Konzentration [B](t), (d.h. die Konzentrationsänderung des Stoffs B pro Zeiteinheit) wird mit $[\dot{B}](t)$ bezeichnet.

3.2.2 Gesetze aus der Chemie

$v_a(t) = k_a \cdot [A](t)$ (C11)
$v_b(t) = k_b \cdot [B](t)$ (C12)

3.2.3 Mathematische Beschreibung von [A](t) und [B](t)

$[\dot{A}](t) = v_b(t) - v_a(t)$ (C21)

$[\dot{B}](t) = v_a(t) - v_b(t)$ (C22)

(C11) und (C12) eingesetzt in (C21) und (C22) ergeben:

$[\dot{A}](t) = k_b \cdot [B](t) - k_a \cdot [A](t)$

$[\dot{B}](t) = k_a \cdot [A](t) - k_b \cdot [B](t)$

3.2.4 Berechnung zu bestimmten (diskreten) Zeitpunkten t_n ($=n \cdot \Delta t$)

3.2.4.1 Für die Konzentrationsänderungen gelten:

$[\dot{A}](t_n) = k_b \cdot [B](t_n) - k_a \cdot [A](t_n)$ (F11)

$[\dot{B}](t_n) = k_a \cdot [A](t_n) - k_b \cdot [B](t_n)$ (F12)

oder anders geschrieben:

$[\dot{A}]_n = k_b \cdot [B]_n - k_a \cdot [A]_n$

$[\dot{B}]_n = k_a \cdot [A]_n - k_b \cdot [B]_n$

3.2.4.2 Konzentrationen von A und B zum Zeitpunkt 0 betragen:

$[A]_0 := [A](t_0)$ (F21)

$[B]_0 := [B](t_0)$ (F22)

3.2.4.3 Annäherung

Die Konzentration des Stoffs A zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten Δt), kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Konzentrationsänderung $[\dot{A}]$ während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muß man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.

$[A](t_{n+1}) \approx [A](t_n) + [\dot{A}](t_n) \cdot \Delta t$

$[B](t_{n+1}) \approx [B](t_n) + [\dot{B}](t_n) \cdot \Delta t$

oder anders geschrieben:

$[A]_{n+1} \approx [A]_n + [\dot{A}]_n \cdot \Delta t$ (F31)

$[B]_{n+1} \approx [B]_n + [\dot{B}]_n \cdot \Delta t$ (F32)

Man kann also hintereinander (iterativ) berechnen:

$[A]_0$ (F21)

$[B]_0$ (F22)

$[\dot{A}]_1$ (F11)

$[\dot{B}]_1$ (F12)

$[A]_2$ (F31)

$[B]_2$ (F32)

...

Das heißt man kann die Konzentrationen [A] und [B] nach einem beliebigen Zeitabschnitt t_n berechnen !!!

3.2.5 Bemerkungen für mathematisch Interessierte

3.2.5.1 Rekursion

Mit (F11) bzw. (F12) in (F31) bzw. (F32) und (F21) und F(22) eingesetzt ergibt sich:
$[A]_0 = [A](t_0)$
$[B]_0 = [B](t_0)$
$[A]_{n+1} \approx [A]_n + (k_b \cdot [B]_n - k_a \cdot [A]_n) \cdot \Delta t$ (n >= 1)
$[B]_{n+1} \approx [B]_n + (k_a \cdot [A]_n - k_b \cdot [B]_n) \cdot \Delta t$ (n >= 1)

3.2.5.2 Exakte Lösung ohne Beweis

Die exakte Lösung ist (Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems):

$$[A](t) = \frac{k_b([A]_0 + [B]_0)}{k_b + k_a} + \frac{[A]_0 \cdot k_a - k_b \cdot [B]_0}{k_b + k_a} \cdot e^{-(k_b+k_a)t}$$
$$[B](t) = [A]_0 + [B]_0 - [A](t)$$

3.2.5.3 Gleichgewicht

$$\lim_{t-->00} [A](t) = \lim_{t-->00} \frac{k_b([A]_0 + [B]_0)}{k_b + k_a} + \frac{[A]_0 \cdot k_a - k_b \cdot [B]_0}{k_b + k_a} \cdot e^{-(k_b+k_a)t} = \frac{k_b([A]_0 + [B]_0)}{k_b + k_a}$$

also:
Im Gleichgewicht gilt für die Konzentration von [A] und [B]:

$$\lim_{t-->00} [A](t) = \frac{k_b([A]_0 + [B]_0)}{k_b + k_a}$$
$$\lim_{t-->00} [B](t) = [A]_0 + [B]_0 - \frac{k_b([A]_0 + [B]_0)}{k_b + k_a}$$

3.2.6 Konkretes Beispiel

Voraussetzungen:
$[A]_0 = 1000$ g/l; $[B]_0 = 2000$ g/l; $k_a = 0{,}1$/s; $k_b = 0{,}01$/s; $\Delta t = 1$ s

n	t_n	$[\dot{A}](t_n)$	$[\dot{B}](t_n)$	$[A](t_n)$	$[B](t_n)$
0	0 · 1s = 0s	0,01/s ·2000 g/l - 0,1/s ·1000 g/l = -80 g/l·s (1)	80 g/ l·s (1)	1000 g/l (0)	2000 g/l (0)
1	1 · 1s = 1s	0,01/s ·2008 g/l - 0,1/s ·992 g/l = -79,12 g/l·s (3)	79,12 g/ l·s (3)	1000 g/l + -80 g/ l·s ·0,1 s = 992 g/l (2)	2000 g/l + 80 g/ l·s ·0,1 s = 2008 g/l (2)
2	2 · 1s = 2s	0,01/s ·2015,912 g/l - 0,1/s ·984,088 g/l = -78,24968 g/ l·s (5)	78,24968 g/ l·s (5)	992 g/l + -79,12 g/ l·s ·0,1/s = 984,088 g/l (4)	2008 g/l + 79,12 g/ l·s ·0,1 s = 2015,912 g/l (4)
3	3 · 1s = 3s	0,01/s ·2023,736968 g - 0,1/s ·976,263032 g = -77,38893352 g/ l·s (7)	77,38893352 g/ l·s (7)	984,088 g/l + -78,24968 g/ l·s ·0,1s = 976,263032 g/l (6)	2015,912 g/l + 78,24968 g/ l·s ·0,1 s = 2023,736968 g/l (6)
..	...	...	...	...	...

Bemerkung:
Die Zahlen (0), (1), (2), usw. in der Tabelle geben die Reihenfolge der Berechnungen in der Tabelle an.

3.2.7 Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für k_a, k_b, $[A]_0$, $[B]_0$ und Δt die von Ihnen bestimmten (z.B. $k_a = 0{,}1/s$ $k_b = 0{,}01/s$, $[A]_0 = 1000$ g, $[B]_0 = 2000$ g, $\Delta t = 0{,}1$ s) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.

Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, t_n, $[\dot{A}]_n$, $[\dot{B}]_n$, $[A]_n$, $[B]_n$, in der die Zeit t_n (= n $\cdot\Delta$t) nach n Zeitabschnitten, die Konzentrationenänderungen $[\dot{A}]_n$, $[\dot{B}]_n$, die Massen $[A]_n$, $[B]_n$ in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

b) Der exakte Wert der Konzentrationen [A] und [B] in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$[A](t) = \frac{k_b([A]_0 + [B]_0)}{k_b + k_a} + \frac{[A]_0 \cdot k_a - k_b \cdot [B]_0}{k_b + k_a} \cdot e^{-(k_b+k_a)t}$$

$$[B](t) = [A]_0 + [B]_0 - [A](t)$$

Nehmen Sie den exakten Werte der Konzentrationen $[Ae]_n$ und $[Be]_n$ nach n Zeiteinheiten in die Wertetabelle mit auf.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem $[A]_n$ und $[Ae]_n$ (bzw. $[B]_n$ und $[Be]_n$) in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.
Der letzte Eintrag aus der Wertetabelle soll 99,9% der Endkonzentration anzeigen.

4 Chemisches Gleichgewicht - spieltheoretisch modelliert

4.1 Modellbeschreibung

Die chemische Reaktion wird durch ein Kugelspiel modelliert.
Dabei gilt folgende Zuordnung:

Chemische Reaktion	Kugelspiel
Moleküle des Stoffs A und B im Reaktionsgefäß.	weiße und schwarze Kugel in einer Urne.
Je Zeiteinheit hat eine bestimmte Anzahl von Molekülen des Stoffes A die Chance durch Stöße (Energieübertragung) in Moleküle des Stoffs B umgewandelt zu werden. Diese Anzahl hängt von der Konzentration des Stoffs A und davon ab, ob der Stoss genügend energiereich war (größer als die dazu notwendige Aktivierungsenergie ist). Das Analoge gilt für die Moleküle des Stoffes B.	Je Zeiteinheit hat eine weiße Kugel im Falle ihrer Ziehung danach mit einer (z.B. durch einen Würfel ermittelten) bestimmten Wahrscheinlichkeit die Chance in eine schwarze umgewandelt zu werden. Diese Chance (der Umwandlung) hängt von der Anzahl (Konzentration) der weißen Kugeln in der Urne ab und davon, ob z.B. mit einem Würfel die "Sechs" gespielt wurde. Das Analoge macht man danach mit der schwarzen Kugel.

4.2 Beispiel

Es wird eine Urne mit 2000 weißen und 1000 schwarzen Kugeln aufgestellt.
1) Es wird aus der Urne eine Kugel gezogen.
a) Wenn eine weiße Kugel gezogen wurde, dann wird ein Würfel geworfen.
    a1) Wenn eine 6 gewürfelt wurde, dann wird die weiße Kugel durch eine schwarze Kugel ausgetauscht.
    a2) Wenn keine 6 gewürfelt wurde, dann wird die weiße Kugel wieder in die Urne zurückgelegt.
b) Wenn keine weiße Kugel gezogen wurde (sondern eine schwarze), dann wird die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt.

2) Das analoge wird nun mit den schwarzen Kugeln gemacht:
a) Es wird aus der Urne eine Kugel gezogen.
Wenn eine schwarze Kugel gezogen wurde, dann wird ein Würfel geworfen.
    a1) Wenn eine 1 oder 2 gewürfelt wurde, dann wird die schwarze Kugel durch eine weiße ausgetauscht.
    a2) Wenn keine 1 oder 2 gewürfelt wurde, dann wird die schwarze Kugel wieder in die Urne zurückgelegt.
b) Wenn keine schwarze Kugel gezogen wurde (sondern eine weiße), dann wird die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt.

3) Es wird immer wieder abwechselnd 1) und 2) durchgeführt.
Nach einer bestimmten Anzahl Ziehungen wird das Spiel abgebrochen. Jede Ziehung - ob erfolgreich oder nicht - zählt als eine Zeiteinheit.

4.2.1 Umsetzung in Excel

a) Geben Sie für p_1, p_2, w_0, s_0 die von Ihnen bestimmten (z.B. $p_w = 0,1$ $p_s = 0,01$, $w_0 = 1000$, $s_0 = 2000$) Werte in die von Ihnen vorgesehenen Zellen ein.

Erzeugen Sie die Wertetabelle für n, w_n, s_n, in der die Zeit t_n (= $n \cdot \Delta t$) nach n Zeitabschnitten, die Anzahl der weissen Kugeln w_n, die Anzahl der schwarzen Kugeln s_n in Abhängigkeit von 0, 1, 2, ... , n Zeitabschnitten dargestellt wird.

c) Erzeugen Sie ein Diagramm, in dem w_n und s_n in Abhängigkeit von $t = t_n$ dargestellt wird.

Gleichgewicht

g :	Gesamtanzahl der schwarzen und weißen Kugeln = $s_0 + w_0$
s_n :	Anzahl schwarzer Kugeln nach n Ziehungen
w_n :	Anzahl weißer Kugeln nach n Ziehungen
p_w :	Wahrscheinlichkeit der Aktivierung einer weißen Kugel
p_s :	Wahrscheinlichkeit der Aktivierung einer schwarzer Kugel
s :	Anzahl der schwarzer Kugeln im Gleichgewichtszustand
w :	Anzahl der weißen Kugeln im Gleichgewichtszustand

Im Gleichgewichtszustand gilt:

$$s \cdot p_s = w \cdot p_w$$
$$(g - w) \cdot p_s = w \cdot p_w$$
$$w = \frac{g \cdot p_s}{p_w + p_s}$$

und

$$s \cdot p_s = w \cdot p_w$$
$$s \cdot p_s = (g - s) \cdot p_w$$
$$s = \frac{g \cdot p_w}{p_w + p_s}$$

zusammengefaßt:

$$\boxed{s = \frac{g \cdot p_w}{p_w + p_s} \qquad w = \frac{g \cdot p_s}{p_w + p_s}}$$

Bemerkung:
Eine hervorragende Ausarbeitung zu diesem Themenkreis befindet sich unter:
http://www.jkrieger.de/bzr/