1 Berechnung des Benzinverbrauchs

1.1 Aufgabe

Ein Auto verbraucht 12,5 Liter auf 200 Km. Es soll sein Durchschnittsverbrauch auf 100 Km ermittelt werden.

$$m = \frac{200}{12{,}5} = 8$$

Damit beträgt der Durchschnittsverbrauch 8 Liter pro 100 Km.
Ist diese Rechnung richtig?
Begründen Sie!

2 Preise erhöhen, verringern

2.1 Aufgabe

Der Preis eines Computers wird um einen bestimmten Prozentsatz p erhöht.
Ein paar Tage später um den gleichen Prozentsatz verringert.
Wie viel kostet er jetzt ?
Berechnen Sie dazu den allgemeinen Zusammenhang zwischen p, dem Ursprungspreis w_1 und dem neuen Preis w_2.

Lösung:
1) Preis nach der Erhöhung:

$$w_1 = w + \frac{w \cdot p}{100} = w(1 + \frac{p}{100})$$

2) Der Preis w_1 wird um p Prozent verringert

$$w_2 = w_1 - \frac{w_1 \cdot p}{100} = w_1(1 - \frac{p}{100}) = w(1 + \frac{p}{100})(1 - \frac{p}{100}) = w(1 - \frac{p^2}{10000})$$

3 Abends beim Griechen

3.1 Aufgabe

In manchen griechischen Gaststätten bekommt man nach dem Essen einen kostenlosen Uso spendiert. Für einen Autofahrer ist es interessant, ob er danach noch Auto fahren darf.
In wie vielen Usos ist gleich viel reiner Alkohol enthalten, wie in einem halben Liter Bier?

Bemerkungen:
In einem halben Liter Bier ist 5% Alkohol enthalten.
In einem Uso (= 2cl = 20ml) befindet sich 40% Alkohol.

Lösung:
1) Berechnung der reiner Alkoholmenge in 20 ml Uso:

$$u = \frac{40}{100} \cdot 20ml = \frac{4}{10} \cdot 20ml = 8ml$$

2) Berechnung der reiner Alkoholmenge in 0,5 l = 500 ml Bier:

$$b = \frac{5}{100} \cdot 500ml = 5 \cdot 5ml = 25ml$$

3)

$$v = \frac{b}{u} = \frac{25\,ml}{8\,ml} = 3{,}125$$

Ergebnis:
Wenn man 3 Usos trinkt, hat man ungefähr so viel reinen Alkohol im Blut, wie wenn man einen halben Liter Bier trinkt.

4 Achtung: Volumenprozent und Gewichtprozent

4.1 Aufgabe

Warum ist auf den meisten Flaschen mit alkoholischem Inhalt (wie z.B. Bier, Wein, usw.) die Angabe des Alkoholgehalts in Volumenprozent und nicht in Gewinnprozent angegeben ?

4.2 Definitionen

Mit p_v wird der Volumenprozentsatz des Alkohols in einer Flüssigkeit bezeichnet.
Mit p_G wird der Gewichtsprozentsatz des Alkohols in einer Flüssigkeit bezeichnet.

$$p_V = \frac{V_A}{V_A + V_W}$$

$$p_G = \frac{G_A}{G_A + G_W}$$

Hinweis:
Die Dichte ρ des Alkohols beträgt 0,8 g/cm³
Es gilt: $G = \rho \cdot V$

4.2.1 Arbeitsauftrag

1) 60 cm³ Wasser und 40 cm³ reiner Alkohol werden zusammengemischt.
Berechnen Sie p_V und p_G

2) Man will die Angabe Volumenprozent in Gewichtprozent umrechnen.
Berechnen Sie dazu den allgemeinen Zusammenhang zwischen p_G und p_V , d.h. stellen Sie p_G in Abhängigkeit von ρ und p_V dar.

3) Zeigen Sie, daß $p_V \geq p_G$ ist.

4) Wann ist die Differenz zwischen p_V und p_G am größten ?

Lösung:
60 cm³ Wasser und 40 cm³ reiner Alkohol werden zusammengemischt.

$$p_V = \frac{V_A}{V_A + V_W} = \frac{40\,cm^3}{40\,cm^3 + 60\,cm^3} = 0{,}4 = 40\%$$

$$p_G = \frac{G_A}{G_A + G_W} = \frac{40\,cm^3 \cdot 0{,}8g/cm^3}{40\,cm^3 \cdot 0{,}8g/cm^3 + 60\,g} = \frac{32}{32+60} = \frac{32}{92} \approx 0{,}35 = 35\%$$

4.3 Allgemeiner Zusammenhang zwischen p_V und p_G

Vorbemerkung:

$$p_V = \frac{V_A}{V_A + V_W} \Leftrightarrow p_V \cdot (V_A + V_W) = V_A \Leftrightarrow p_V \cdot V_A + p_V \cdot V_W = V_A \Leftrightarrow p_V \cdot V_W = V_A - p_V \cdot V_A$$

$$\Leftrightarrow p_V \cdot V_W = V_A - p_V \cdot V_A \Leftrightarrow p_V \cdot V_W = V_A(1 - p_V) \Leftrightarrow V_W = \frac{V_A(1-p_V)}{p_V}$$

Damit gilt nun:

$$p_G = \frac{G_A}{G_A + G_W} = \frac{\rho \cdot V_A}{\rho \cdot V_A + 1 \cdot V_W} = \frac{\rho \cdot V_A}{\rho \cdot V_A + V_A \cdot \frac{1-p_V}{p_V}} = \frac{\rho \cdot V_A}{V_A(\rho + \frac{1-p_V}{p_V})} = \frac{\rho}{\rho + \frac{1-p_V}{p_V}}$$

also:

$$p_G = \frac{\rho}{\rho + \frac{1-p_V}{p_V}}$$

oder

oder umgeformt:

$$p_V = \frac{p_G}{\rho - p_G \cdot \rho + p_G}$$

5 Liegen Sie richtig mit Ihrer Intuition?

5.1 Aufgabe

Auf einem See schwimmt ein Schiff mit der Geschwindigkeit v die Strecke s von A nach B und wieder zurück.
Die Gesamtzeit für die Strecke von A nach B und wieder zurück beträgt T_1.
Nachdem der See einen Zu- und Abfluss bekommen hatte und er dadurch zu einem Fluss wurde, hatte er die Strömungsgeschwindigkeit w. Die Gesamtzeit für die Strecke von A nach B und wieder zurück beträgt jetzt T_2.

5.1.1 Arbeitsauftrag

1) Was gilt (was sagt ihre Intuition?)
$T_1 > T_2$?
$T_1 < T_2$?
$T_1 = T_2$?

2) Begründen Sie mathematisch!

Lösung:
Damit die Aufgabe physikalisch einen Sinn ergibt, muss gelten:
$v > 0 \wedge s > 0 \wedge v > w$
Also gilt:

$$T_1 = \frac{2s}{v}$$

$$T_2 = \frac{s}{v+w} + \frac{s}{v-w} = \frac{s(v-w)+s(v+w)}{(v+w)(v-w)} = \frac{sv-sw+sv+sw}{v^2-w^2} = \frac{2sv}{v^2-w^2}$$

Annahme: $T_1 \leq T_2$

$T_1 \leq T_2$ <==>

$\frac{2s}{v} \leq \frac{2sv}{v^2-w^2}$ | : 2s <==>

$\frac{1}{v} \leq \frac{v}{v^2-w^2}$ | · v <==>

$1 \leq \frac{v^2}{v^2-w^2}$ | · $v^2 - w^2$ <==>

$v^2 - w^2 \leq v^2$ | - v^2 <==>

$-w^2 \leq 0$ wahr

Also
$T_1 \leq T_2$

6 Uhrenzeiger

6.1 Aufgabe

1) Wann steht der Minutenzeiger und der Stundenzeiger einer Uhr das 1.Mal nach 12.00 Uhr direkt übereinander?

2) Wann steht der Sekundenzeiger, der Minutenzeiger und der Stundenzeiger einer Uhr das 1.Mal nach 12.00 Uhr direkt übereinander?

Lösung:
1)
Die Geschwindigkeit des Minutenzeigers ist:

$$v_M = \frac{1U}{1h} = 1\frac{U}{h}$$

Die Geschwindigkeit des Stundenzeigers ist:

$$v_S = \frac{1U}{12h} = \frac{1}{12}\frac{U}{h}$$

In einer Stunde macht der Stundenzeiger also $\frac{1}{12}U$

In einer Stunde macht der Minutenzeiger 1 U

Damit holt der Minutenzeiger pro Stunde einen Vorsprung von $\frac{11}{12}U$ heraus.

Also:
$\frac{11}{12}U$ Vorsprung in 1h
1 U Vorsprung in xh
Also:

$$x = \frac{1}{\frac{11}{12}U}U \cdot 1h = \frac{12}{11}h = 1h\frac{60}{11}\min \approx 1 \text{ Uhr und } 5{,}45 \text{ min}$$

2)
a) Vorsprung Minutenzeiger vor Stundenzeiger:
Einen Vorsprung von n Umdrehungen ergibt sich nach der Zeit:

$$x = \frac{n}{\frac{11}{12}U}U \cdot 1h = \frac{12n}{11}h$$

b) Vorsprung Sekundenzeiger vor Minutenzeiger:
Die Geschwindigkeit des Minutenzeigers ist:

$$v_M = \frac{1U}{1h} = 1\frac{U}{h}$$

Die Geschwindigkeit des Sekundenzeigers ist:

$$v_S = \frac{60U}{1h} = 60\frac{U}{h}$$

Damit holt der Sekundenzeiger pro Stunde einen Vorsprung von 59 U heraus.
Damit holt der Sekundenzeiger nach x Stunden einen Vorsprung von 59x Umdrehungen heraus.

c) Damit beträgt der Vorsprung des Sekundenzeigers vor dem Minutenzeiger nach $x = \frac{12n}{11}h$:

$$v = \frac{59 \cdot 12n}{11}U$$

Diese Zahl wird eine ganze Zahl für n$\in${0, 11, 22, ...}

7 Teilbarkeit

7.1 Aufgabe

1) Beweisen Sie:
Das Produkt von 2 ungeraden Zahlen ist ungerade.

2) Beweisen Sie:
Das Vielfache einer geraden Zahl ist wieder gerade.

3) Beweisen Sie:
Das Produkt von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 6 teilbar.

Lösung:
1)
(2n+1)(2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm+n+m) + 1.
Da 2(2nm+n+m) gerade ist, ist 2(2nm+n+m) + 1 ungerade.

2) z = 2n
mz = m·2n = 2mn
2mn ist aber durch 2 teilbar.

3)
Eine Zahl, die durch 3 dividiert wird, hat als Rest den Wert 0 oder 1 oder2.
Also gilt:
Jede Zahl z lässt sich darstellen als:
z = 3n + r, wobei r$\in${0,1,2}

Fall1:
P = 3n (3n+1) (3n+2)
Da 3n+1 oder 3n+2 gerade sein muss, gilt die Behauptung.

Fall2:
P = (3n+1) (3n+2) (3n+3) = (3n+1) (3n+2) 3(n+1) =
Da 3n+1 oder 3n+2 gerade sein muss, gilt die Behauptung.

Fall3:
P = (3n+2) (3n+3) (3n+4) = (3n+2) 3(n+1) (3n+4)
Annahme: n ist ungerade
Dann ist n+1 gerade. Also gilt die Behauptung.
Annahme: n ist gerade
Dann ist 3n gerade. Also ist 3n+2 gerade. Also gilt die Behauptung.

8 Gemeinsam sind wir stark

8.1 Aufgabe

Ein Arbeiter allein beseitigt einen Dreckhaufen in 6 Stunden, ein anderer (allein) in 4 Stunden.
Wie viel Stunden benötigen sie gemeinsam, um den Dreckhaufen zu beseitigen?

Lösung:
Die Leistung für Arbeiter 1 beträgt:

$$L1 = \frac{1D}{6h} = \frac{1}{6}\frac{D}{h}$$

Die Leistung für Arbeiter 2 beträgt:

$$L2 = \frac{1D}{4h} = \frac{1}{4}\frac{D}{h}$$

Die Leistung für Arbeiter 1 und Arbeiter 2 beträgt:

$$L12 = \frac{1}{4}\frac{D}{h} + \frac{1}{6}\frac{D}{h} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{6})\frac{D}{h} = (\frac{3}{12} + \frac{2}{12})\frac{D}{h} == \frac{5}{12}\frac{D}{h}$$

Damit beträgt die Zeit:

$$t = \frac{1D}{\frac{5}{12}\frac{D}{h}} = \frac{1D \cdot 12h}{5D} = \frac{12}{5}h = 2{,}4h$$

9 Ritter und Schurken

9.1 Aufgabe

In einem fiktiven Land gibt es in der Bevölkerung drei Arten von Menschen:
entweder Ritter, Schurken oder Diplomaten. Diese haben folgende Eigenschaften:

Ritter: Menschen, die immer die Wahrheit sagen,
Schurken: Menschen, die immer lügen
Diplomaten: Menschen, die manchmal lügen und manchmal die Wahrheit sagen.

Drei verschiedene Einwohner A, B und C wurden wegen eines Verbrechens als Tatverdächtige vor Gericht gestelllt.
Durch die Ermittlungen der Staatsanwaltschaft (Ritter) war folgendes bekannt:
1) Es gibt **genau einen** Täter und dieser befindet sich unter den 3 Tatverdächtigen A, B, C
2) Der Täter ist ein **Ritter**.
3) Es gibt **genau einen** Ritter unter diesen 3 Tatverdächtigen.

Die 3 Tatverdächtigen machten folgende Aussagen:

A: "Ich bin nicht der Täter"
B: "Das (die Aussage von A) ist wahr"
C: "B ist kein Diplomat"

Frage:
Wer ist der Täter ?

Hilfestellung:
1) Nehmen Sie an, dass A der Täter ist. Dann ziehen Sie daraus Schlüsse. Wenn einer dieser Schlüsse auf einen Widerspruch zu den obigen Annahmen führt (z.B. es gibt mehrere Täter oder mehrere Ritter), dann war die Annahme - A ist der Täter - falsch.

2) Dann nehmen Sie an dass B der Täter ist ...

3) Dann nehmen Sie an dass C der Täter ist ...

Beachten Sie, welche Annahmen jeweils zu einem Widerspruch führen (also nicht sein können) und ziehen Sie dann den entsprechenden Schluss.

Lösung:
1.) Annahme: A ist der Täter:
A ist der Täter ==> A ist ein Ritter ==> A spricht immer die Wahrheit ==> Die Aussage "Ich bin nicht der Täter" ist wahr ==> A ist nicht der Täter (*1) ==> Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (A ist der Täter)
(auch möglich: aus (siehe (*1)) A ist nicht der Täter ==> B ist der Täter oder C ist der Täter ==>
B ist ein Ritter oder C ist ein Ritter ==> Es gibt mehr als einen Ritter unter den Tatverdächtigen ==> Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (Es gibt unter den Tatverdächtigen genau einen Ritter)
==> A ist nicht der Täter

2.) Annahme: B ist der Täter
B ist der Täter ==> B ist ein Ritter ==> B spricht immer die Wahrheit ==> Die Aussage von A "Ich bin nicht der Täter" ist wahr ==> A ist nicht der Täter
a) Annahme: A ist Ritter
A ist Ritter ==> Es gibt also (mit B) 2 Ritter ==> Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (Es gibt unter den Tatverdächtigen genau einen Ritter)
==> A ist kein Ritter

b) Annahme: A ist ein Schurke
A ist ein Schurke ==> Die Aussage von A "Ich bin nicht der Täter" ist falsch ==> A ist der Täter ==> Es gibt also (mit B) 2 Täter ==> Widerspruch zur Voraussetzung (Es gibt unter den Tatverdächtigen genau einen Täter)
==> A ist kein Schurke
Da A ein Ritter oder ein Schurke oder ein Diplomat sein muss, und aber A kein Ritter und kein Schurke ist, muss A ein Diplomat sein !
Man kann noch zeigen, dass der Diplomat A gerade die Wahrheit spricht.

c) Annahme: C ist ein Ritter
C ist ein Ritter ==> Es gibt (mit B) 2 Ritter ==> Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (Es gibt unter den Tatverdächtigen genau einen Ritter)
==> C ist kein Ritter

d) Annahme: C ist ein Schurke:
==> C ist ein Schurke ==> C spricht immer die Unwahrheit ==> Die Aussage von C "B ist kein Diplomat" ist falsch ==> B ist ein Diplomat ==> B ist kein Schurke ==> Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (C ist ein Schurke)
==> C ist kein Schurke
Da C ein Ritter oder ein Schurke oder ein Diplomat sein muss, und aber C kein Ritter und kein Schurke ist, muss C ein Diplomat sein !
Man kann noch zeigen, dass der Diplomat C gerade die Wahrheit spricht.

Wichtige Bemerkung:
Es wurde zwar noch kein Widerspruch gefunden, es könnte aber trotzdem sein, dass es doch einen gibt (den man eben noch nicht entdeckt hat). Man kann also noch nicht folgern, dass B der Täter sein muss. Deswegen muss man noch den nächtsen Fall untersuchen (siehe gleich unten)....

3.) Annahme: C ist der Täter
C ist der Täter ==> C ist ein Ritter ==> C spricht immer die Wahrheit ==> B ist kein Diplomat ==> B ist ein Schurke oder B ist ein Ritter (*2)
a) Annahme: B ist ein Ritter
B ist ein Ritter ==> es gibt (mit C) 2 Ritter ==> Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (Es gibt unter den Tatverdächtigen genau einen Ritter)
==> B ist kein Ritter
b) Annahme B ist ein Schurke
B ist ein Schurke ==> B spricht immer die Unwahrheit ==> Die Aussage "Das ist wahr" ist falsch ==> Die Aussage von A "Ich bin nicht der Täter" ist falsch ==> A ist der Täter ==> Es gibt 2 Täter ==> Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (Es gibt unter den Tatverdächtigen genau einen Täter
==> B ist kein Schurke
Damit folgt:
B ist kein Schurke und B ist kein Ritter und (siehe oben (*2))
B ist ein Schurke oder B ist ein Ritter. Dies ist ein Widerspruch
==> C ist kein Täter

Also:
Da nach 1) A kein Täter ist und nach 3) C kein Täter ist, aber gleichzeitig
A oder B oder C ein Täter sein muss, folgt, dass B der Täter sein muss !!!!!!!!

9.2 Aufgabe

In einem fiktiven Land gibt es in der Bevölkerung drei Arten von Menschen:
entweder Ritter, Schurken oder Diplomaten. Diese haben folgende Eigenschaften:

Ritter:	Menschen, die immer die Wahrheit sagen,
Schurken:	Menschen, die immer lügen
Diplomaten:	Menschen, die manchmal lügen und manchmal die Wahrheit sagen.

Ritter haben den höchsten Rang, Diplomaten den zweithöchsten und Schurken den dritthöchsten (niedersten Rang), kurz: $S < D < R$

Zwei verschiedene Menschen A und B dieses fiktiven Landes machen folgende Aussagen:
A: Ich habe einen niederen Rang als B
B: Das ist nicht wahr

Fragen:
1) Welche der beiden Aussagen A und B sind wahr bzw. falsch ?
2) Welche Art von Menschen (Ritter, Diplomaten, Schurken) sind A und B ?

Hilfestellung:
1) Nehmen Sie an, dass A wahr ist und B wahr ist. Dann ziehen Sie daraus Schlüsse. Wenn einer dieser Schlüsse auf einen Widerspruch zu den obigen Annahmen führt (z.B. $R < S$ und $S < R$), dann war die Annahme - A wahr ist und B wahr - falsch.

2) Nehmen Sie an, dass A wahr ist und B falsch ist. Dann ziehen Sie daraus Schlüsse...

3) Nehmen Sie an, dass A falsch ist und B wahr ist. Dann ziehen Sie daraus Schlüsse...

4) Nehmen Sie an, dass A falsch ist und B falsch ist. Dann ziehen Sie daraus Schlüsse...

Beachten Sie, welche Annahmen jeweils zu einem Widerspruch führen (also nicht sein können) und ziehen Sie dann den entsprechenden Schluss.

Lösung:
A ist ein Diplomat.
B ist ein Diplomat.

9.3 Aufgabe (Logik)

In einer Quizshow stehen 5 Koffer zur Auswahl, einer von ihnen enthält den Hauptgewinn von 20'000 €. Die anderen vier Koffer sind leer. Als Hilfe erhält man den Hinweis, dass genau eine der folgenden Aussagen korrekt ist:

Aussage 1: Der Gewinn ist im 1. oder der Gewinn ist im 4. Koffer.
Aussage 2: Der Gewinn ist im 2. oder der Gewinn ist im 3. Koffer.
Aussage 3: Der Gewinn ist weder im 3. noch im 4. Koffer.
Aussage 4: Im 3. Koffer ist kein Gewinn.
Aussage 5: Der Gewinn ist im 4. Koffer.
In welchem Koffer ist der Gewinn?

Lösung:
Annahme 1: Aussage 1 ist wahr und andere Aussagen alle falsch
also:
Gewinn Element von {1, 4} und
Gewinn Element von {1, 4, 5} und
Gewinn Element von {3, 4} und
Gewinn Element von {3} und
Gewinn Element von {1, 2, 3, 5}
also Widerspruch, da Durchschnitt der Mengen = leere Menge

Annahme 2: Aussage 2 ist wahr und andere Aussagen alle falsch
also:
Gewinn Element von {2, 3} und
Gewinn Element von {2, 3, 5} und
Gewinn Element von {3, 4} und
Gewinn Element von {3} und
Gewinn Element von {1, 2, 3, 5}
also Koffer = 3

Annahme 3: Aussage 3 ist wahr und andere Aussagen alle falsch
also:
Gewinn Element von {3, 4} und
Gewinn Element von {2, 3, 5} und
Gewinn Element von {1, 4, 5} und
Gewinn Element von {3} und
Gewinn Element von {1, 2, 3, 5}
also Widerspruch, da Durchschnitt der Mengen = leere Menge

Annahme 4: Aussage 4 ist wahr und andere Aussagen alle falsch
also:
Gewinn Element von {3} und
Gewinn Element von {2, 3, 5} und
Gewinn Element von {1, 4, 5} und
Gewinn Element von {3, 4} und
Gewinn Element von {1, 2, 3, 5}
also Widerspruch, da Durchschnitt der Mengen = leere Menge

Annahme 5: Aussage 5 ist wahr und andere Aussagen alle falsch
also:
Gewinn Element von {1, 2, 3, 5} und
Gewinn Element von {2, 3, 5} und
Gewinn Element von {1, 4, 5} und
Gewinn Element von {3, 4} und
Gewinn Element von {3}
also Widerspruch, da Durchschnitt der Mengen = leere Menge

9.4 Aufgabe (Logik)

In einem indischen Tempel sitzen in unbekannter Reihenfolge genau 3 Götter (Gott der Wahrheit, Gott der Lüge, Gott der Diplomatie) nebeneinander.
Der Gott der Lüge lügt immer. Der Gott der Wahrheit spricht immer die Wahrheit.
Der Gott der Diplomatie spricht manchmal die Wahrheit und manchmal lügt er.
Ein Logiker betritt den Tempel und stellt folgende Fragen an die Götter:
Frage an den Gott ganz links: Wer steht neben dir?
Antwort: Der Gott der Wahrheit.
Frage an den Gott in der Mitte: Wer bist du ?
Antwort: Der Gott der Diplomatie.
Frage an den Gott ganz rechts: Wer steht neben dir?
Antwort: Der Gott der Lüge.

10 Schwierig

10.1 Aufgabe

Alfred und Bernhard nehmen abwechselnd Zahlen aus der Menge {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} wobei jede Zahl nur einmal verwendet werden darf. Der Erste, der 3 Zahlen mit der Summe 15 hat, hat gewonnen. Gibt es für Alfred eine Gewinnstrategie?

10.2 Aufgabe

Es seinen 25 verschiedene positive Zahlen gegeben. Beweisen Sie, dass man 2 von ihnen so auswählen kann, dass keine der anderen Zahlen ihrer Summe oder ihrer Differenz gleicht.

10.3 Aufgabe

Addieren Sie für eine gegebene natürliche Zahl $n > 1$ alle Bruchzahlen der Form $1/pq$, wobei g und p teilerfremd sind und gilt:
$0 < p < q < n$ und $p + q > n$
Beweisen Sie, dass das Ergebnis immer 0,5 ist.
Beispiele:

$n = 4$: $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$

$n = 5$: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5}$

10.4 Aufgabe

Schreiben Sie eine Folge von n positiven ganzen Zahlen auf. Ersetzen Sie jede durch die absolute Differenz zwischen ihr und dem Nachfolger (bei der letzten Zahl subtrahieren Sie die Erste).
Beweisen Sie, dass für n == 5 der Prozeß immer weitergeht, aber für n = 4 stets endet.
Beispiele:
n = 4

1	5	8	12
4	3	4	11
1	1	7	7
0	6	0	6

n = 5

5	7	11	13	17
2	4	2	4	12
2	2	2	8	10
0	0	6	2	8
0	6	4	6	8
6	2	2	2	8

....

10.5 Aufgabe

Herr X schreibt auf zwei Zettel jeweils eine ganze Zahl. Diese Zahlen sind verschieden. Dann verbirgt Herr X in jeder Hand einen Zettel.
Herr Y wählt eine Hand aus. Herr X öffnet die Hand, so dass Herr Y die Zahl auf dem Papier sehen kann.
Herr Y muss raten, ob diese Zahl die größere bzw. die kleinere ist. Wenn er gewinnt, bekommt er 1 Euro, sonst verliert er 1 Euro.
Gibt es eine Strategie für Herr Y, so dass sein durchschnittlicher Gewinn größer 0 ist?
Bemerkung:
Wenn er nur rät, indem er z.B. eine Münze würfelt, ist sein durchschnittlicher Gewinn 0.

10.6 Aufgabe (grafische Oberfläche)

Unter den Quadraten eines n x n Schachbretts breitet sich eine Infektion wie folgt aus:
Hat ein Quadrat 2 oder mehr infizierte Nachbarn, wird es ebenfalls infiziert.
Beweisen Sie, dass man nicht das gesamte Brett infizieren kann, wenn man mit weniger als n infizierten Quadraten beginnt.
Bemerkung:
Nachbarn haben eine gemeinsame Kante, so dass jedes Quadrat höchstens 4 Nachbarn hat.

10.7 Aufgabe (etwas zum Abelpreis von Endre Szemeredi)

Bemerkungen:
Eine arithmetische Progression der Länge n mit Abstand d sind n aufeinander folgende Zahlen mit Abstabd d.

Beispiel:
3, 7, 11, 15, 19 ist eine arithmetische Progression der Länge 5 mit Abstand 4.

Frage:
Kann man die Menge {1 ; 2; 3; 4 ;5 ; 6 ; 7 ;8 ; 9} so in 2 Teilmengen zerlegen, daß keine von ihnen eine arithmetische Progression enthält ?

Quelle: Spektrum der Wisenschaft Mai 2012 Seite 23

10.8 Aufgabe

Es stehen genau ein 5-Liter-Eimer mit genau einer 5-Liter-Markierung und ein 3-Liter-Eimer mit genau einer 3-Liter-Markierung zur Verfügung. Das bedeutet, daß man z.B. aus dem 5-Liter-Eimer nicht direkt 4 Liter entnehmen kann, da die zugehörige Markierung fehlt.
Wie kann man trotzdem einem Fluß 2 Liter Wasser entnehmen?

11 Mathematisch oder mit Brute Force

11.1 Aufgabe

Es gelten folgende Regeln:
R1) Es gibt genau 5 Häuser mit jeweils einer anderen Farbe
R2) In jedem Haus wohnt eine Person einer anderen Nationalität
R3) Jeder Hausbewohner hat ein Lieblingsgetränk.
R4) Jeder Hausbewohner raucht eine bestimmte Zigarettenmarke.
R5) Jeder Hausbewohner hält ein Haustier.
R6) Die Zigarettenmarken, die Lieblinsgetränke und die Haustiere aller 5 Hausbewohner sind jeweils verschieden.

Es gibt folgende Hinweise:
H1) Der Besitzer des gelben Hauses raucht Dunhill
H2) Der Mann im mittleren Haus trinkt Milch
H3) Der Engländer lebt im roten Haus
H4) Der Mann, der ein Pferd hält, wohnt neben dem, der Dunhill raucht.
H5) Der Norweger wohnt im 1. Haus
H6) Das grüne Haus steht direkt links vom weissen Haus.
H7) Der Winfield-Raucher trinkt gerne Bier.
H8) Der Marlboro-Raucher wohnt neben dem, der eine Katze hält.
H9) Der Däne trinkt gerne Tee.
H10) Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
H11) Der Marlboro-Raucher hat einen Nachbarn, der gerne Wasser trinkt.
H12) Der Deutsche raucht Rothmanns.
H13) Der Besitzer des grünen Hauses trinkt Kaffee.
H14) Der Schwede hält einen Hund.
H15) Die Person, die Pall Mal raucht, hält einen Vogel.

Frage:
In welchem Land wohnt der Fischbesitzer?

11.2 Aufgabe

Fünf Häuser verschiedener Farben werden von fünf Männern verschiedener Nationalitäten bewohnt. Die Bewohner halten sich fünf verschiedene Tiere, trinken alle etwas anderes und haben verschieden Rauchgewohnheiten.

Es gibt folgende Hinweise:
H1) Der Engländer wohnt im roten Haus
H2) Dem Spanier gehört der Hund.
H3) Im grünen Haus trinkt man Kaffe.
H4) Das grüne Haus steht rechts neben dem weißen Haus.
H5) Der Zigarettenraucher hält sich Schnecken.
H6) Der Zigarettenraucher wohnt im gelben Haus.
H7) Der Bewohner des mittleren Hauses trinkt Milch.
H8) Der Norweger bewohnt das erste Haus links.
H9) Der Pfeifenraucher lebt im Haus neben dem Mann mit dem Fuchs.
H10) Der Stumpenraucher trinkt Limonade.
H11) Der Japaner raucht Zigarillos.
H12) Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
H13) Der Zigarettenraucher bewohnt das Haus neben dem Mann mit dem Pferd.
H14) Der Ukrainer trinkt Tee.

Fragen:
1) Wer trinkt Wasser ?
2) Wem gehört das Zebra ?

11.3 Besondere Zählweise

Mit einer Hand kann man wie folgt mit den Fingern F1 bis F5 zählen zählen:

F1	F2	F3	F4	F5
1	4	2	5	3
6	9	7	10	8
11	14	12	15	13
16	19	17	20	18
...				

wie kann man von der Zahl auf den Finger schliesen?
Ergebnis:
$F = (2 * (n-1)\bmod 5)\bmod 5 + 1$
Beispiel: $(2*(17-1)\bmod 5)\bmod 5 = (2*1)\bmod 5 = 3$

11.4 Äpfel verteilen

Im 1. Korb befinden sich 50 Äpfel, im 2.Korb befinden sich 100 Äpfel und im 3. Korb befinden sich 150 Äpfel.
Aus einem Korb dürfen genau 2 Äpfel heraus genommen werden. Diese 2 Äpfel werden gleichmäßig auf die anderen Körbe verteilt (also in jeden Korb genau ein Apfel).
Ist es möglich dadurch in jeden Korb 100 Äpfel zu bekommen?

1. Lösung:
In der folgenden Tabelle sei als Beispiel irgendeine willkürliche, aber mögliche Zugfolge dargestellt.
Aus einer Verteilung von 100, 100, 100 wird nach n Zügen die Verteilung 50, 100, 150

100	100	100
98 (-2)	101 (+1)	101 (+1)
99 (+1)	99 (-2)	102 (+1)
97 (-2)	100 (+1)	103 (+1)
98 (+1)	101 (+1)	101 (-2)
99 (+1)	102 (+1)	99 (-2)
100 (+1)	103 (+1)	97 (-2)
101 (+1)	101 (-2)	98 (+1)
...	...	...
50	100	150

Die 1. Spalte besteht aus einer bestimmten Anzahl n_1 von Zweien, die subtrahiert werden und $(n - n_1)$ Einsen, die addiert werden.
Die 2. Spalte besteht aus einer bestimmten Anzahl n_2 von Zweien, die subtrahiert werden und $(n - n_2)$ Einsen, die addiert werden.
Die 3. Spalte besteht aus einer bestimmten Anzahl n_3 von Zweien, die subtrahiert werden und $(n - n_3)$ Einsen, die addiert werden.
Also:

$100 - n_1 \cdot 2 + (n - n_1) \cdot 1 = 50$
$100 - n_2 \cdot 2 + (n - n_2) \cdot 1 = 100$
$100 - n_3 \cdot 2 + (n - n_3) \cdot 1 = 150$
$n_1 + n_2 + n_3 = n$

also (eingesetzt)
$-2 n_1 + n_1 + n_2 + n_3 - n_1 = -50$
$-2 n_2 + n_1 + n_2 + n_3 - n_2 = 0$
$-2 n_3 + n_1 + n_2 + n_3 - n_3 = 50$

also (vereinfacht):
$-2 n_1 + n_2 + n_3 = -50$
$-2 n_2 + n_1 + n_3 = 0$
$-2 n_3 + n_1 + n_2 = 50$

also (nochmals vereinfacht):

$-2\ n_1 + n_2 + n_3 = -50$
$n_1 - 2\ n_2 + n_3 = 0$
$n_1 + n_2 - 2\ n_3 = 50$

Also Matrix

-2	1	1	-50	G1
1	-2	1	0	G2
1	1	-2	50	G3
-2	1	1	-50	G4=G1
0	-3	3	-50	G5=G1+2G2
0	3	-3	50	G6=G1+2G3
-6	0	6	-200	G7=G5+3G4
0	-3	3	-50	G8=G5
0	0	0	0	G9=G5+G6
-6	0	6	-200	G10=G7
0	-3	3	-50	G11=G8
1	0	-1	100/3	G12=G10/-6
0	1	-1	50/3	G13=G8/-3

$L = \{(n_1; n_2; n_3) | n1 = 100/3 + n_3 \wedge n_2 = 50/3 + n_3 \wedge n_3 \in N \wedge n_1 \in N \wedge n_2 \in N \} = \{\}$

2. Lösung:
Mit Modulo Rechnung

11.5 Landkarte

In einem fiktiven Land gibt es endlich viele Städte, von denen jeweils genau 3 Strassen weggehen.
Von einer beliebigen Stadt ausgehend fährt ein Autofahrer auf einer der 3 Strassen zur nächsten Stadt. Von dort ausgehend fährt er abwechselnd links, rechts, links, rechts, ... zur jeweils nächsten Stadt.
Man zeige, daß der Autofahrer für ein beliebiges (wie oben angegebenes) Land wieder an den Ausgangspunkt zurück kommt.

Beispiel:
A: Ausgangspunkt
L : Links
R : Rechts