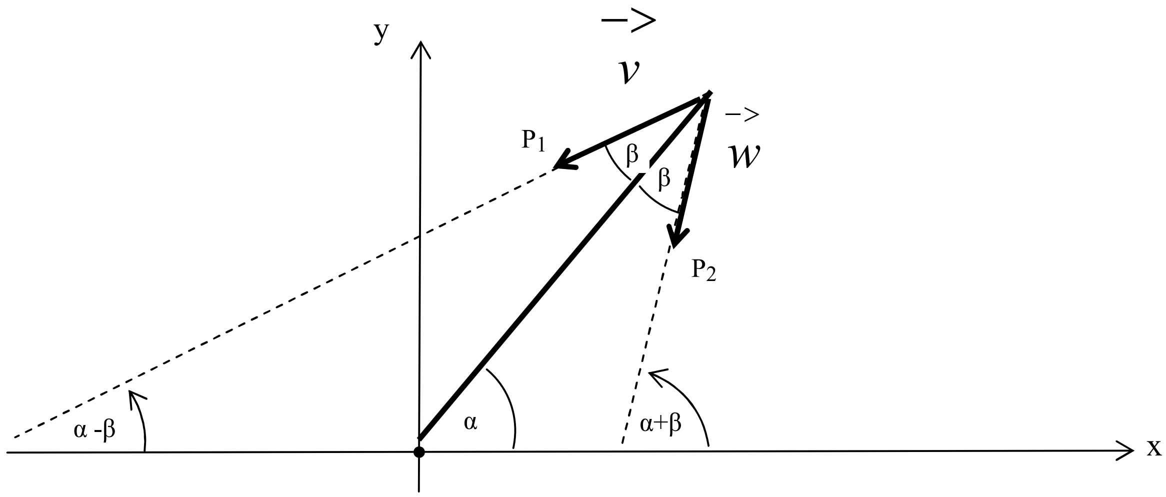
1.1 Zeichnen eines Pfeils durch ein Programm

Motivation:
In vielen Programmiersprache gibt es zwar eine Anweisung, eine Linie zwischen zwei Punkten zu zeichne, aber keine Anweisung, einen Pfeil zu zeichnen.
Deswegen muss der Pfeil durch 3 Linien gezeichnet werden.
Beispiel:
Um in einem Java-Programm auf eine grafische Oberfläche einen Pfeil in verschiedene Richtungen zu zeigen, muß sich die Pfeilspitze bewegen (z.B. Ortsvektor einer Geraden)



$\gamma_1 = \alpha - \beta$
$\gamma_2 = \alpha + \beta$

$$\vec{g}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\gamma_1) \end{pmatrix}}{\sqrt{1+\tan^2(\gamma_1)}} \qquad \vec{g}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\gamma_2) \end{pmatrix}}{\sqrt{1+\tan^2(\gamma_2)}}$$

Bestimmung der "Flügelvektors" $\vec{v}$ des Pfeils:

$0 \leq \gamma_1 < 90° \implies \vec{v} = -\vec{g}_1$

$90 < \gamma_1 \leq 180° \implies \vec{v} = \vec{g}_1$

$180 \leq \gamma_1 < 270° \implies \vec{v} = \vec{g}_1$

$270 < \gamma_1 \leq 360° \implies \vec{v} = -\vec{g}_1$

$\gamma_1 = 90° \implies \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\gamma_1 = 270° \implies \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmung der "Flügelvektors" $\vec{w}$ des Pfeils:

$0 \leq \gamma_1 < 90°$ ==> $\vec{w} = -\vec{g}_1$

$90 < \gamma_1 \leq 180°$ ==> $\vec{w} = \vec{g}_1$

$180 \leq \gamma_1 < 270°$ ==> $\vec{w} = \vec{g}_1$

$270 < \gamma_1 \leq 360°$ ==> $\vec{w} = -\vec{g}_1$

$\gamma_1 = 90°$ ==> $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\gamma_1 = 270°$ ==> $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Höhe einer Pyramide berechnen (Version1)

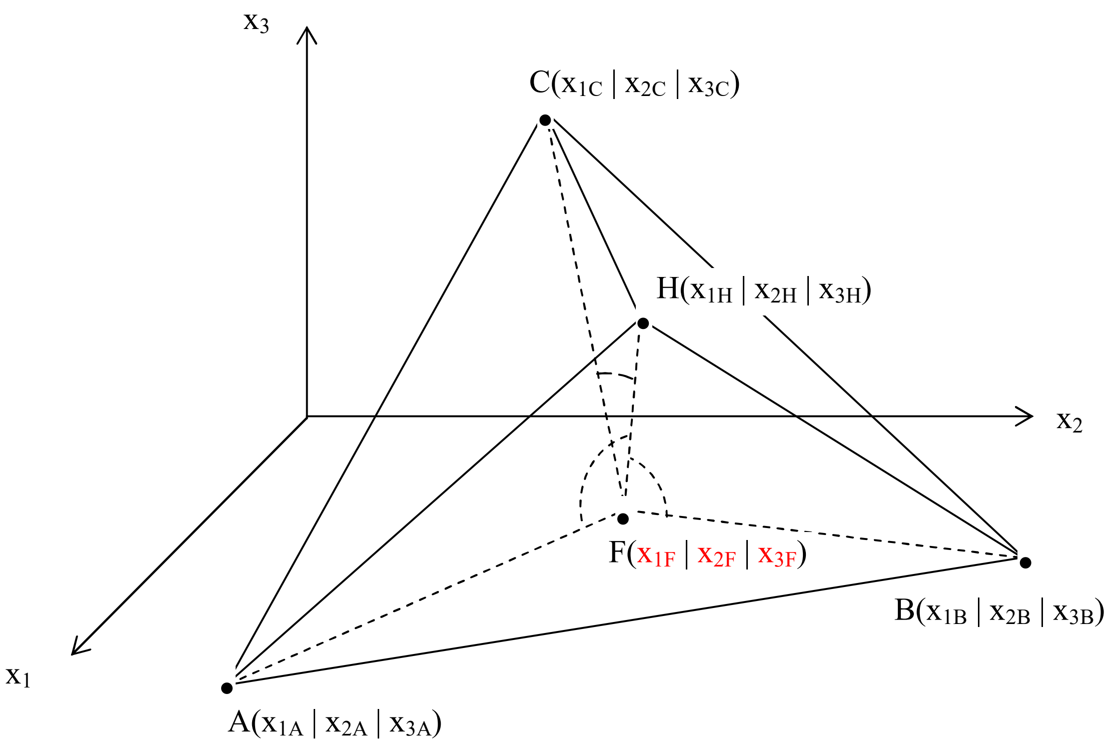
2.1 Aufgabe

gegeben:
Punkte A, B, C, H

gesucht:
Berechnen Sie die Höhe der Pyramide mit den gegebenen Ecken A, B, C, H
Bestimmen Sie den Fußpunkt F.
Stellen Sie dazu ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten auf.
Schreiben Sie ein Programm, das dieses Gleichungssystem mittels Näherung (brute force) löst.

Oder:

Wie groß ist der Abstand eines Punktes H von einer durch die 3 verschiedenen Punkte A, B und C bestimmten Ebene?



Lösung:

Da die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, gilt:

$$\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{FA} = 0$$
$$\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$$
$$\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1H} - x_{1F} \\ x_{2H} - x_{2F} \\ x_{3H} - x_{3F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1A} - x_{1F} \\ x_{2A} - x_{2F} \\ x_{3A} - x_{3F} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{1H} - x_{1F} \\ x_{2H} - x_{2F} \\ x_{3H} - x_{3F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1B} - x_{1F} \\ x_{2B} - x_{2F} \\ x_{3B} - x_{3F} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{1H} - x_{1F} \\ x_{2H} - x_{2F} \\ x_{3H} - x_{3F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - x_{1F} \\ x_{2C} - x_{2F} \\ x_{3C} - x_{3F} \end{pmatrix} = 0$$

also:

$$(x_{1H} - x_{1F}) \cdot (x_{1A} - x_{1F}) + (x_{2H} - x_{2F}) \cdot (x_{2A} - x_{2F}) + (x_{3H} - x_{3F}) \cdot (x_{3A} - x_{3F}) = 0$$

$$(x_{1H} - x_{1F}) \cdot (x_{1B} - x_{1F}) + (x_{2H} - x_{2F}) \cdot (x_{2B} - x_{2F}) + (x_{3H} - x_{3F}) \cdot (x_{3B} - x_{3F}) = 0$$

$$(x_{1H} - x_{1F}) \cdot (x_{1C} - x_{1F}) + (x_{2H} - x_{2F}) \cdot (x_{2C} - x_{2F}) + (x_{3H} - x_{3F}) \cdot (x_{3C} - x_{3F}) = 0$$

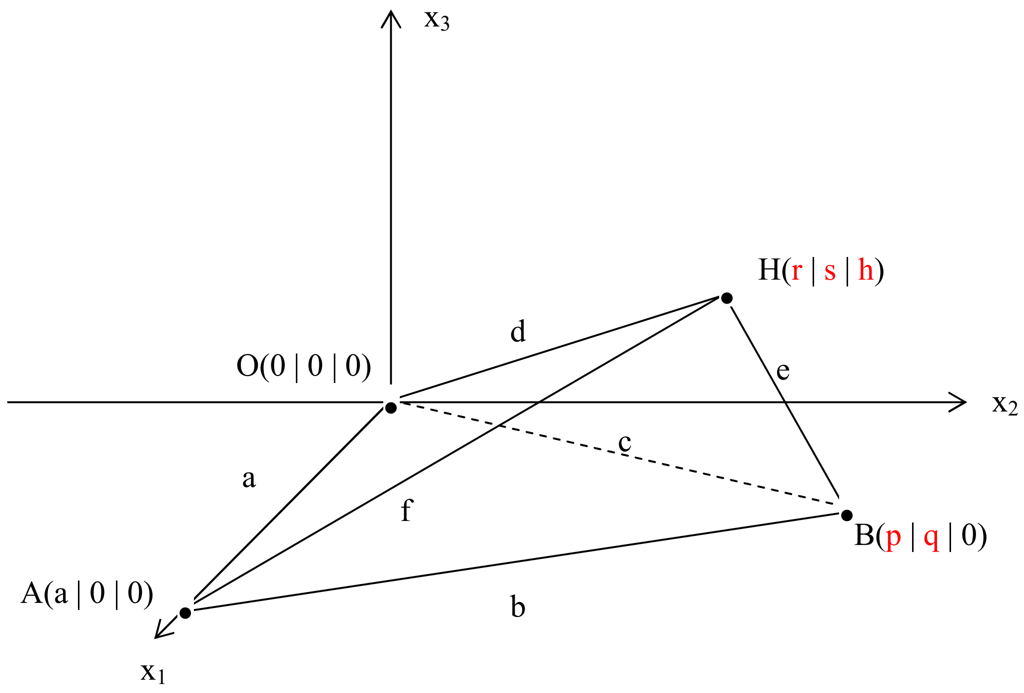
Da dieses Gleichungssystem nicht so einfach zu lösen ist, kann man ein Programm schreiben, das eine näherungsweise Lösung berechnet.

3 Höhe einer Pyramide berechnen (Version2)

3.1 Aufgabe

gegeben:
Seitenlängen a, b, c, d, e, f

gesucht:
Berechnen Sie die Höhe der Pyramide mit den gegebenen Seitenlängen
a, b, c, d, e, f.
Unbekannt sind:
p, q, r, s, h
Bestimmen Sie h
Stellen Sie dazu ein Gleichungssystem mit 5 Unbekannten auf und lösen dieses.



Trick:
Dadurch, daß sich die Grundfläche der Pyramide in der x_1- x_2- Ebene befindet, ist h die Höhe der Pyramide.

Gleichungssystem

$(p-a)^2 + q^2 = b^2$ (G1)
$p^2 + q^2 = c^2$ (G2)
$r^2 + s^2 + h^2 = d^2$ (G3)
$(r - a)^2 + s^2 + h^2 = f^2$ (G4)
$(r - p)^2 + (s - q)^2 + h^2 = e^2$ (G5)

(G2) nach q auflösen
$q^2 = c^2 - p^2$
und in (G1) einsetzen:
$(p-a)^2 + c^2 - p^2 = b^2$
$p^2 - 2ap + a^2 + c^2 - p^2 = b^2$
$-2ap + a^2 + c^2 = b^2$
$2ap = a^2 + c^2 - b^2$

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \qquad \text{(G6)}$$

p in (G2) eingesetzt ergibt:

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} + q^2 = c^2$$

$$q = \sqrt{c^2 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}} \qquad \text{(G7)}$$

(G3) nach h auflösen;
$h^2 = d^2 - r^2 - s^2$
und in (G4) einsetzen:
$(r-a)^2 + s^2 + d^2 - r^2 - s^2 = f^2$
$(r-a)^2 + d^2 - r^2 = f^2$
$r^2 - 2ar + a^2 + d^2 - r^2 = f^2$
$-2ar + a^2 + d^2 = f^2$
$2ar = a^2 + d^2 - f^2$

$$r = \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2a} \qquad \text{(G8)}$$

(G4) nach h auflösen
$h^2 = f^2 - (r-a)^2 - s^2$
und in (G5) einsetzen:
$(r - p)^2 + (s - q)^2 + f^2 - (r - a)^2 - s^2 = e^2$
$r^2 - 2rp + p^2 + s^2 - 2sq + q^2 + f^2 - r^2 + 2ar - a^2 - s^2 = e^2$
$-2rp + p^2 - 2sq + q^2 + f^2 + 2ar - a^2 = e^2$
$2sq = f^2 - a^2 - e^2 - 2rp + p^2 + q^2 + 2ar$

$$s = \frac{f^2 - a^2 - e^2 - 2rp + p^2 + q^2 + 2ar}{2q} \qquad \text{(G9)}$$

r, p, q eingesetzt in (G9) ergibt:

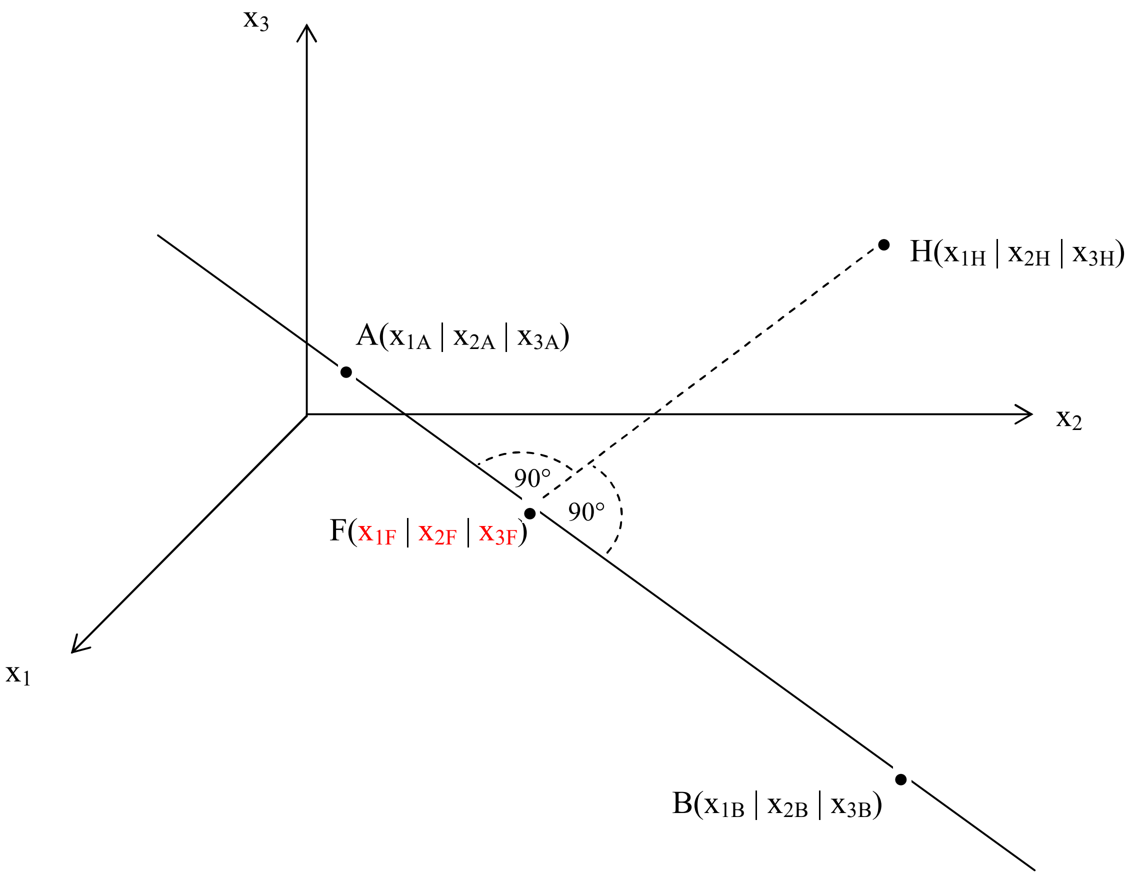
$$s=\frac{f^2-a^2-e^2-\frac{(a^2+d^2-f^2)(a^2+c^2-b^2)}{2a^2}+\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2+c^2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}+a^2+d^2-f^2}{2\sqrt{c^2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}}}$$

4 Abstand eines Punkts von einer Geraden

4.1 Aufgabe

gegeben:
Punkte A, B, H

gesucht:
Berechnen Sie den Abstand des Punkts $H(x_{1H} \mid x_{2H} \mid x_{3H})$ von der Geraden, die durch die 2 Punkte $A(x_{1A} \mid x_{2A} \mid x_{3A})$ und $B(x_{1B} \mid x_{2B} \mid x_{3B})$ geht und bestimmen Sie den Fußpunkt F.
Stellen Sie dazu ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten auf.
Schreiben Sie ein Programm, das dieses Gleichungssystem mittels Näherung (brute force) löst.



Lösung:

Da die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, gilt:

$\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{FA} = 0$

$\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$

Außerdem sind $\overrightarrow{FA}$ und $\overrightarrow{FB}$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet:

$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = |\overrightarrow{FA}| \cdot |\overrightarrow{FB}|$ oder

$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = -|\overrightarrow{FA}| \cdot |\overrightarrow{FB}|$ oder

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1H} - x_{1F} \\ x_{2H} - x_{2F} \\ x_{3H} - x_{3F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1A} - x_{1F} \\ x_{2A} - x_{2F} \\ x_{3A} - x_{3F} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{1H} - x_{1F} \\ x_{2H} - x_{2F} \\ x_{3H} - x_{3F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1B} - x_{1F} \\ x_{2B} - x_{2F} \\ x_{3B} - x_{3F} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{1A} - x_{1F} \\ x_{2A} - x_{2F} \\ x_{3A} - x_{3F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1B} - x_{1F} \\ x_{2B} - x_{2F} \\ x_{3B} - x_{3F} \end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix} x_{1A} - x_{1F} \\ x_{2A} - x_{2F} \\ x_{3A} - x_{3F} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} x_{1B} - x_{1F} \\ x_{2B} - x_{2F} \\ x_{3B} - x_{3F} \end{pmatrix}\right| \quad \text{oder}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1A} - x_{1F} \\ x_{2A} - x_{2F} \\ x_{3A} - x_{3F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1B} - x_{1F} \\ x_{2B} - x_{2F} \\ x_{3B} - x_{3F} \end{pmatrix} = - \left|\begin{pmatrix} x_{1A} - x_{1F} \\ x_{2A} - x_{2F} \\ x_{3A} - x_{3F} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} x_{1B} - x_{1F} \\ x_{2B} - x_{2F} \\ x_{3B} - x_{3F} \end{pmatrix}\right|$$

also:

$(x_{1H} - x_{1F}) \cdot (x_{1A} - x_{1F}) + (x_{2H} - x_{2F}) \cdot (x_{2A} - x_{2F}) + (x_{3H} - x_{3F}) \cdot (x_{3A} - x_{3F}) = 0$

$(x_{1H} - x_{1F}) \cdot (x_{1B} - x_{1F}) + (x_{2H} - x_{2F}) \cdot (x_{2B} - x_{2F}) + (x_{3H} - x_{3F}) \cdot (x_{3B} - x_{3F}) = 0$

$(x_{1A} - x_{1F}) \cdot (x_{1B} - x_{1F}) + (x_{2A} - x_{2F}) \cdot (x_{2B} - x_{2F}) + (x_{3A} - x_{3F}) \cdot (x_{3B} - x_{3F}) =$
$\sqrt{(x_{1A} - x_{1F})^2 + (x_{2A} - x_{2F})^2 + (x_{3A} - x_{3F})^2} \cdot \sqrt{(x_{1B} - x_{1F})^2 + (x_{2B} - x_{2F})^2 + (x_{3B} - x_{3F})^2}$

oder

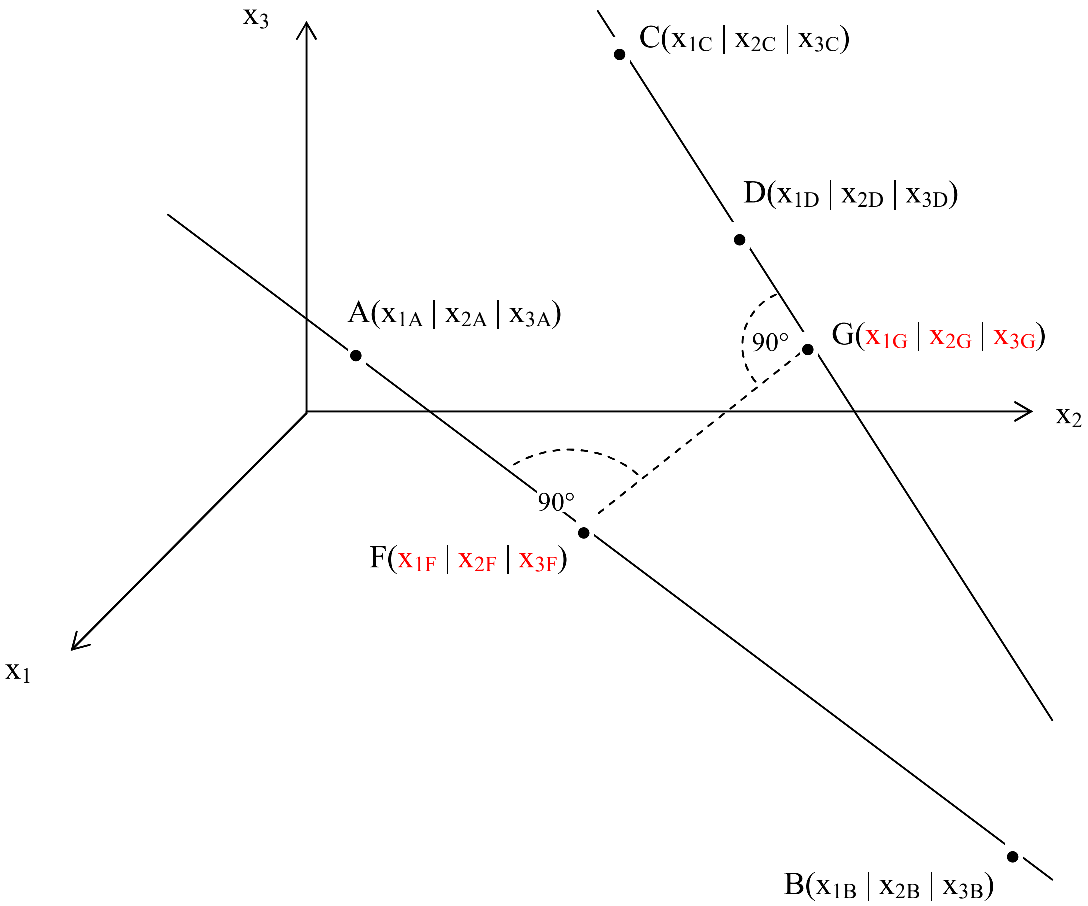
$(x_{1A} - x_{1F}) \cdot (x_{1B} - x_{1F}) + (x_{2A} - x_{2F}) \cdot (x_{2B} - x_{2F}) + (x_{3A} - x_{3F}) \cdot (x_{3B} - x_{3F}) =$
$- \sqrt{(x_{1A} - x_{1F})^2 + (x_{2A} - x_{2F})^2 + (x_{3A} - x_{3F})^2} \cdot \sqrt{(x_{1B} - x_{1F})^2 + (x_{2B} - x_{2F})^2 + (x_{3B} - x_{3F})^2}$

5 Abstand zweier Geraden

5.1 Aufgabe

gegeben:
Punkte A, B, C, D

gesucht:
Berechnen Sie den Abstand (kürzeste Entfernung) zweier Geraden im Raum.
Die Geraden sind durch die Punkte A, B, C, D gegeben.
Stellen Sie dazu ein Gleichungssystem mit 6 Unbekannten auf.
Schreiben Sie ein Programm, das dieses Gleichungssystem mittels Näherung (brute force) löst.

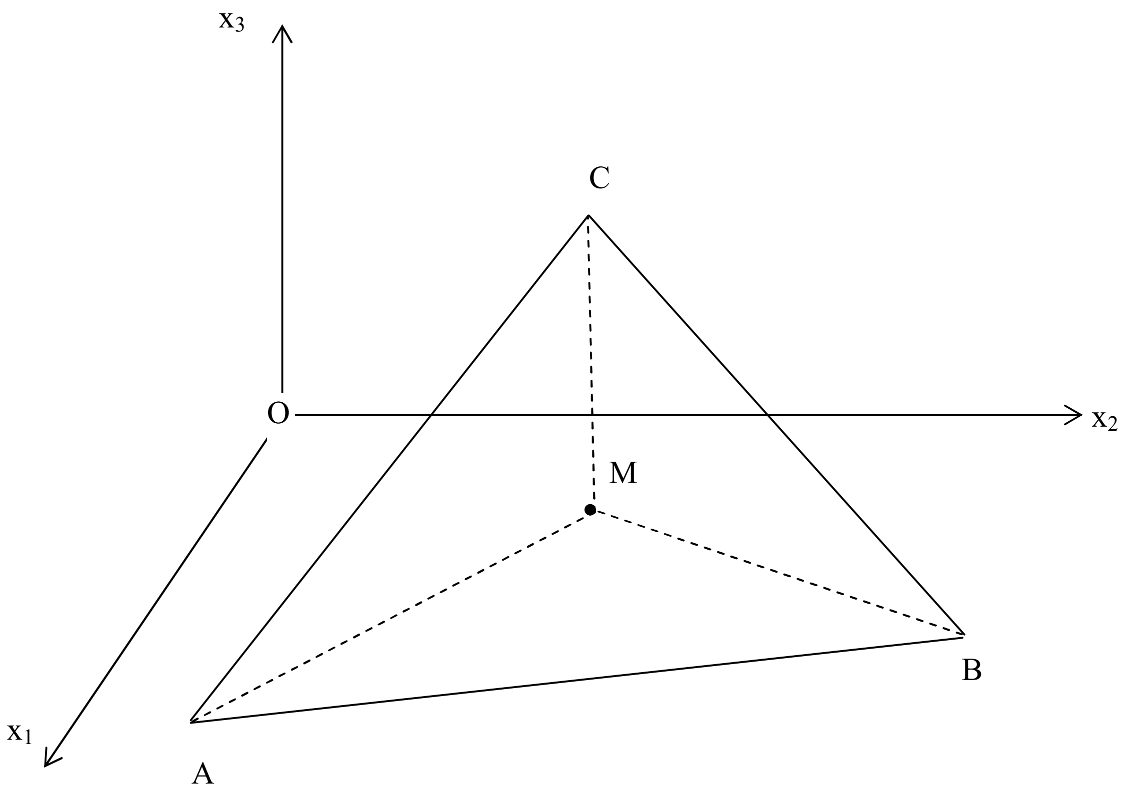


6 "Mittelpunkt" eines Dreiecks

6.1 Aufgabe

gegeben:
Punkte A, B, C

gesucht:
Berechnen Sie den Punkt M eines Dreiecks, das durch die Ecken A., B und C gegeben ist, der von allen 3 Ecken die gleiche Entfernung hat.
Schreiben Sie ein Programm, das von endlichen vielen Punkten (also Näherung) innerhalb des Dreiecks jeweils die Entfernung zu den Ecken A, B und C (durch brute force) berechnet und dann die Koordinaten von M ausgibt.

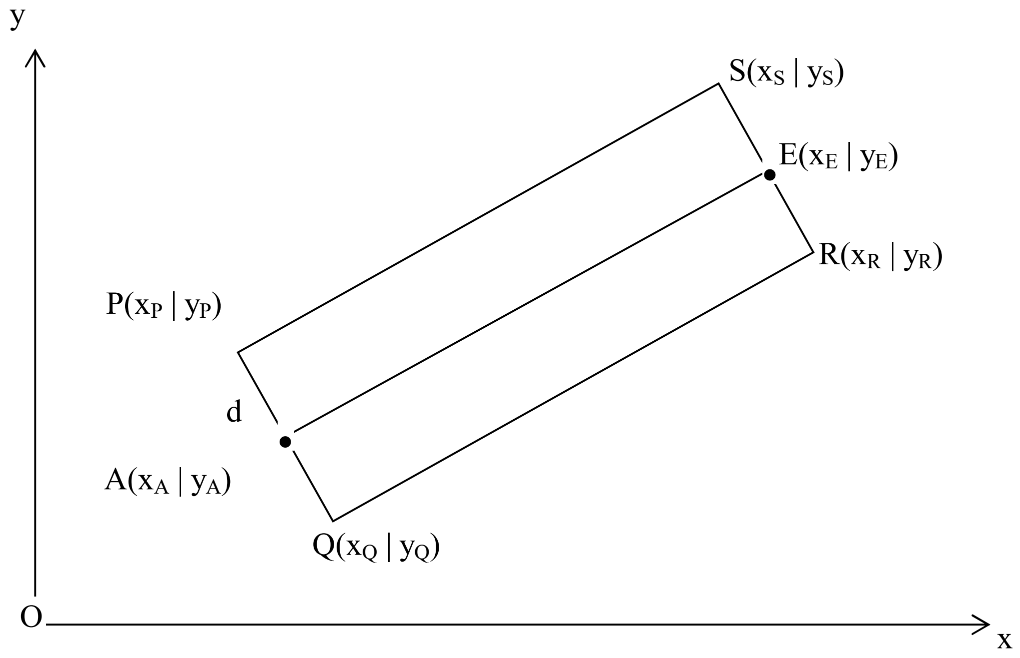


6.2 Aufgabe

Motivation:
Um in einem Java-Programm auf eine grafische Oberfläche statt einer dünnen Linie eine dickere Linie zu zeichnen, kann man dies dadurch realisieren, daß man ein Rechteck mit einer Farbe ausfüllt.

gegeben:
Punkte A, E und Dicke d der Strecke

gesucht:
Punkte P, Q, R, S



6.3 Einfache geometrische Simulationen

Schreiben Sie eine 2D-Bibliothek, mit der man folgende Ergebnisse aus der Mathematik bestätigen (visualisieren) kann:

1) Schnittpunkt der Höhen in einem Dreieck (Höhenschnittpunkt).

2) Schnittpunkt der Winkelhalbierenden (Mittelpunkt des Inkreises).

3) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (Mittelpunkt des Umkreises).

4) Alle Lichtstrahlen, die von einem Punkt P ausgehen, werden von einer Linse (ziemlich genau) auf einen Punkt P' abgebildet.