

1 Maschinen zur Aufgabenherstellung erzeugen

1.1 Beschreibung

Da alle Schüler sehr fleißig sind und viel üben wollen, kommt es zwangsläufig vor, dass den Lehrern die Übungsaufgaben ausgehen.

Deswegen sollen die Schüler die Möglichkeit bekommen selbst Übungsaufgaben (mit Lösungen) herzustellen: Sie schreiben ein Programm, in dem der Anwender die Lösung eingibt und das Programm die zugehörige Aufgabe erzeugt.

Damit haben die Schüler endlich die Möglichkeit beliebig viele Aufgaben eines Aufgabentyps selbst herzustellen.

Bemerkung:

Nach Möglichkeit soll bei der Konstruktion der Aufgaben der exakte Wert einer Zahl angegeben werden, also nicht 1,73 sondern $\sqrt{3}$

1.2 Aufgaben

1) Schnittpunkte zweier Geraden (genau ein Schnittpunkt) im 3D

Eingabe des Programms:

- a) Schnittpunkt S,
- b) Richtungsvektoren v einer Geraden g_1
- c) Richtungsvektoren w der anderen Geraden g_2

Ausgabe des Programms:

- a) Parameterform der Geraden g_1
- b) Parameterform der Geraden g_2

Bemerkung:

Man kann auch Geraden vorgeben, die keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben, oder Geraden, die identisch sind.

2) Von einem Punkt P aus das Lot auf eine Gerade g fällen

Eingabe des Programms:

- a) Fußpunkt F der Geraden g,
- b) Punkt P

Ausgabe des Programms:

- a) Parameterform einer Geraden g , die senkrecht zu \overrightarrow{FP} ist und durch F geht
- b) Punkt P

3) Von einem Punkt A einer Geraden g zwei Punkte B und C bestimmen, die den gleichen Abstand a von A haben.

Eingabe des Programms:

- a) Parameterform einer Geraden g,
- b) Punkt B (z.B. über Eingabe der Größe des Parameters r in der Parameterform von g).
- c) Punkt C (z.B. über Eingabe der Größe des Parameters r in der Parameterform von g).

Ausgabe des Programms:

- a) Parameterform der Geraden g,
- b) Punkt A, der den Abstand a zu B und C hat.

2 Aufgaben erstellen

Um sich selbst schnell, viele Übungsaufgaben zu erstellen (einschließlich der Lösung) kann man dies durch ein Programm machen lassen.

Um nicht zu schwierige Übungsaufgaben zu erhalten, kann man z.B. noch fordern, dass die Zahlen natürliche Zahlen und in einem bestimmten Intervall liegen (z.B. zwischen -10 und 10).

2.1 Aufgabe

gegeben:

Ein Aufpunkt $A(a_1 | a_2 | a_3)$ und ein Vektor auf der Geraden g :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

und

der Punkt $R(r_1 | r_2 | r_3)$, von dem ein Lot (d.h. die Senkrechte) auf g gefällt wird.

gesucht:

- Koordinaten des Schnittpunkts S zwischen der Senkrechten und g .
- Entfernung zwischen R und $S(s_1 | s_2 | s_3)$

2.2 Aufgaben mit Lösungen basteln

Es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (G1)$$

$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ sei ein Vektor, der senkrecht auf $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ steht, also gilt:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ also } c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0 \quad (G2)$$

Für den Punkt $R(r_1 | r_2 | r_3)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (G3)$$

wobei alle Variablen z.B. ganzzahlige Werte zwischen -10 und 10 annehmen sollen.

Ansatz:

Damit die Rechenzeit nicht zu groß wird, gibt man z.B. a_1, a_2, a_3 vor und lässt die Variablen $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, u Werte zwischen -10 und 10 annehmen

Dazu muss ein Programm erstellt werden.

2.3 Beispiel: quadratische Ergänzung

Die Gleichung

$$(ax-b) * (dx-c) = 0$$

$$\iff adx^2 - bdx - acx + bc = 0 \iff adx^2 + x(-bd - ac) + bc = 0$$

hat 2 Lösungen.

Die Gleichung

$$adx^2 + x(-bd - ac) + bc = 0$$

soll durch quadratische Ergänzung gelöst werden und aus "schönen" Zahlen und "schönen" Lösungen bestehen.

Dazu muss ein Programm erstellt werden.