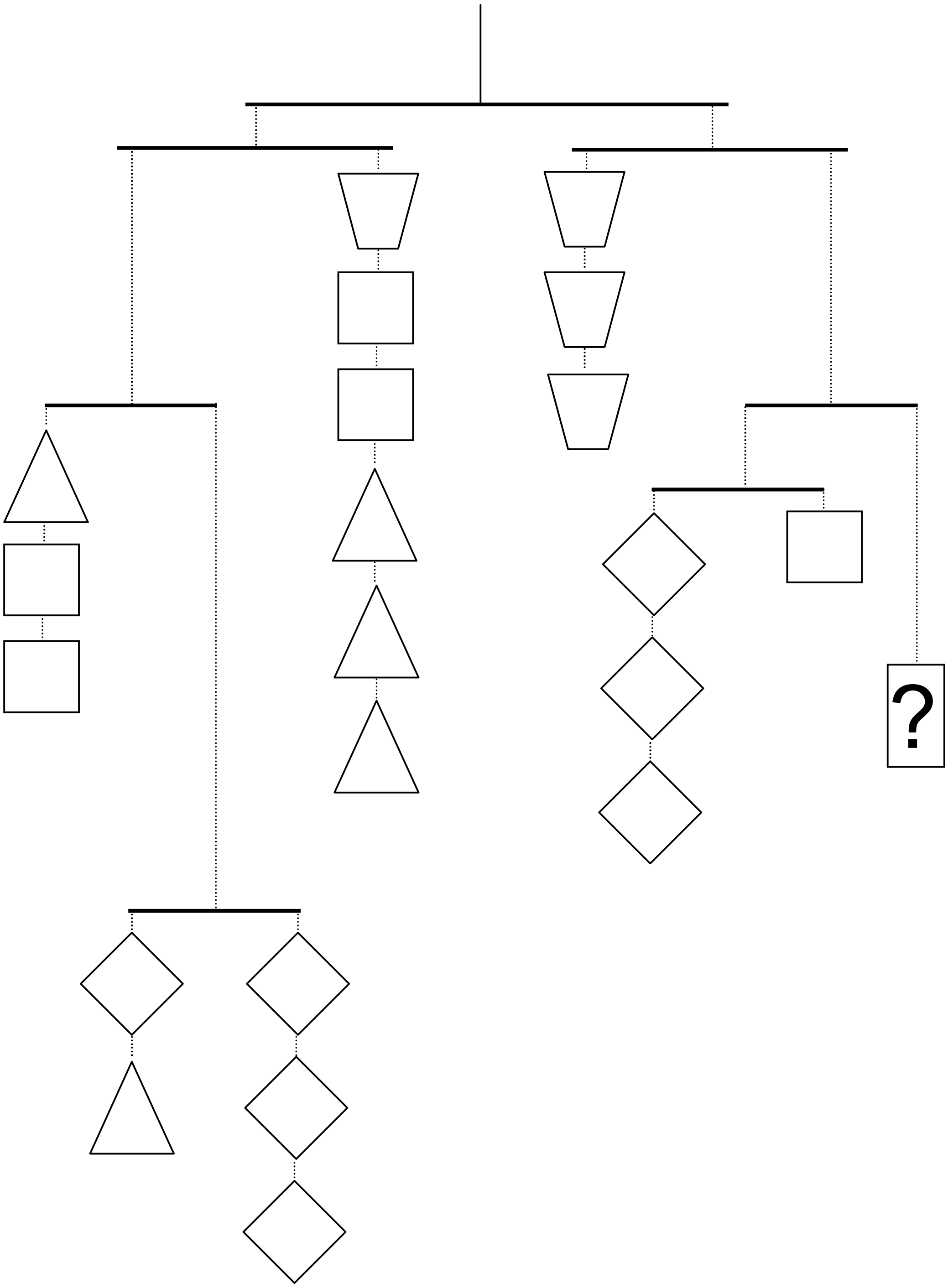
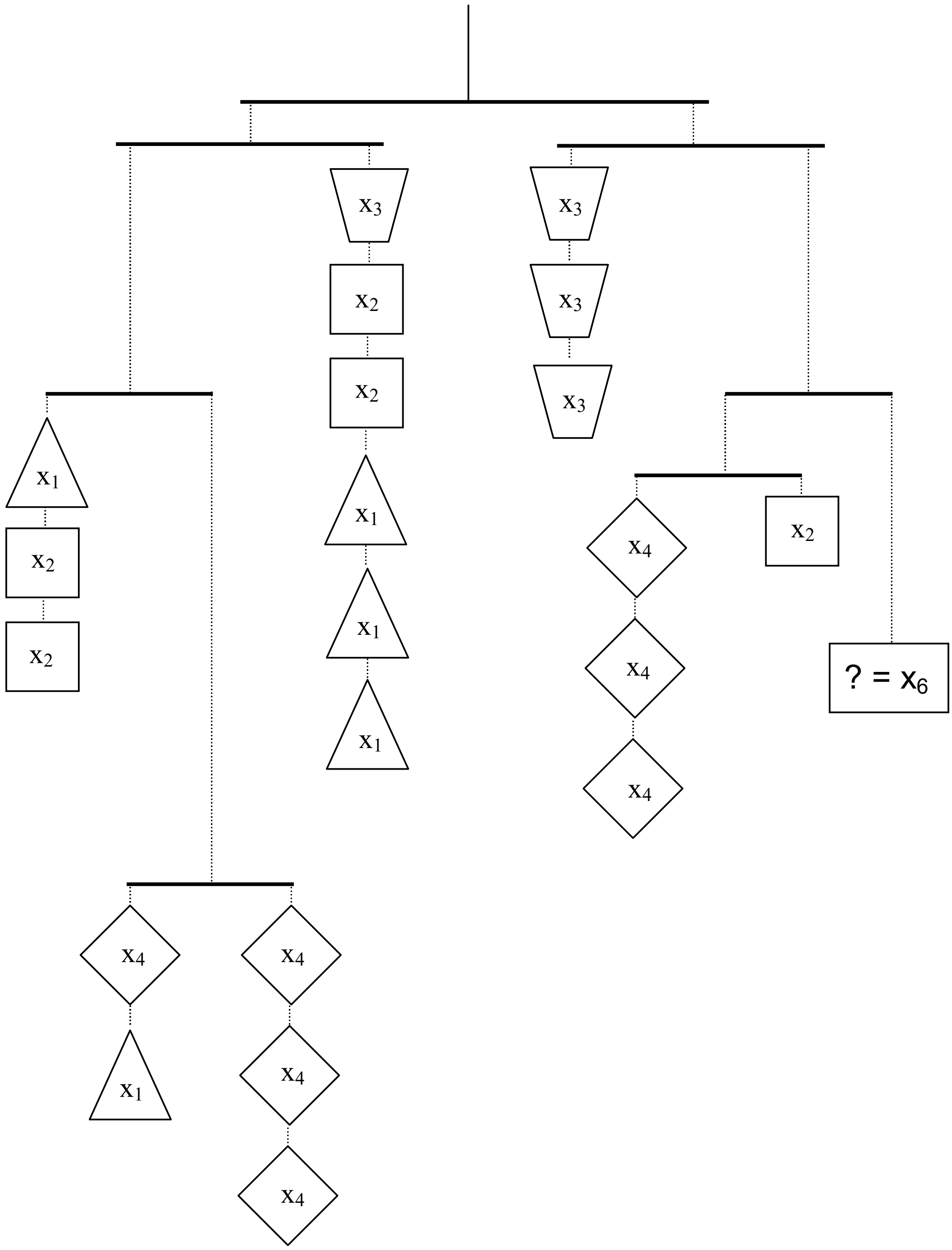
1 Mobile

Aufgabe:
Was muß anstelle des Fragezeichens angehängt werden, damit das Mobile im Gleichgewicht bleibt ? Das Gewicht der Fäden soll vernachlässigt werden, nicht jedoch das der Stäbe. Jeder Stab ist gleich schwer. Kommen Sie mit möglichst wenig Teilen aus.



1.1 Lösung durch Gausschen Algorithmus

Das Gewicht eines jeden Stabes sei x_5



Das ergibt das folgende Gleichungssystem:

$2\ x_1 + 2\ x_2 + 4\ x_4 + 2\ x_5 = 3\ x_1 + 2\ x_2 + x_3$
$x_1 + 2\ x_2 = x_1 + 4\ x_4 + x_5$
$x_1 + x_4 = 3\ x_4$
$3\ x_3 = x_2 + 3\ x_4 + 2\ x_5 + x_6$
$x_2 + 3\ x_4 + x_5 = x_6$
$x_2 = 3\ x_4$
$5\ x_1 + 4\ x_2 + x_3 + 4\ x_4 + 3\ x_5 = x_2 + 3\ x_3 + 3\ x_4 + 3\ x_5 + x_6$

Zusammengefasst ist dies:

$- x_1 - x_3 + 4\ x_4 + 2\ x_5 = 0$
$2\ x_2 - 4\ x_4 - x_5 = 0$
$x_1 - 2\ x_4 = 0$
$- x_2 + 3\ x_3 - 3\ x_4 - 2\ x_5 - x_6$
$x_2 + 3\ x_4 + x_5 - x_6 = 0$
$x_2 - 3\ x_4 = 0$
$5\ x_1 + 3\ x_2 - 2\ x_3 + x_4 - x_6 = 0$

Damit ergibt sich die folgende Matrix:

```
-1   0  -1   4   2   0  0
 0   2   0  -4  -1   0  0
 1   0   0  -2   0   0  0
 0  -1   3  -3  -2  -1  0
 0   1   0   3   1  -1  0
 0   1   0  -3   0   0  0
 5   3  -2   1   0  -1  0
```

Also:

```
1    0    0    0    0    -1/4    0
0    1    0    0    0    -3/8    0
0    0    1    0    0    -3/4    0
0    0    0    1    0    -1/8    0
0    0    0    0    1    -1/4    0
```

Damit ergeben sich die Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = x_6 \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/8 \\ 3/4 \\ 1/8 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , $x_6 \in ZF = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

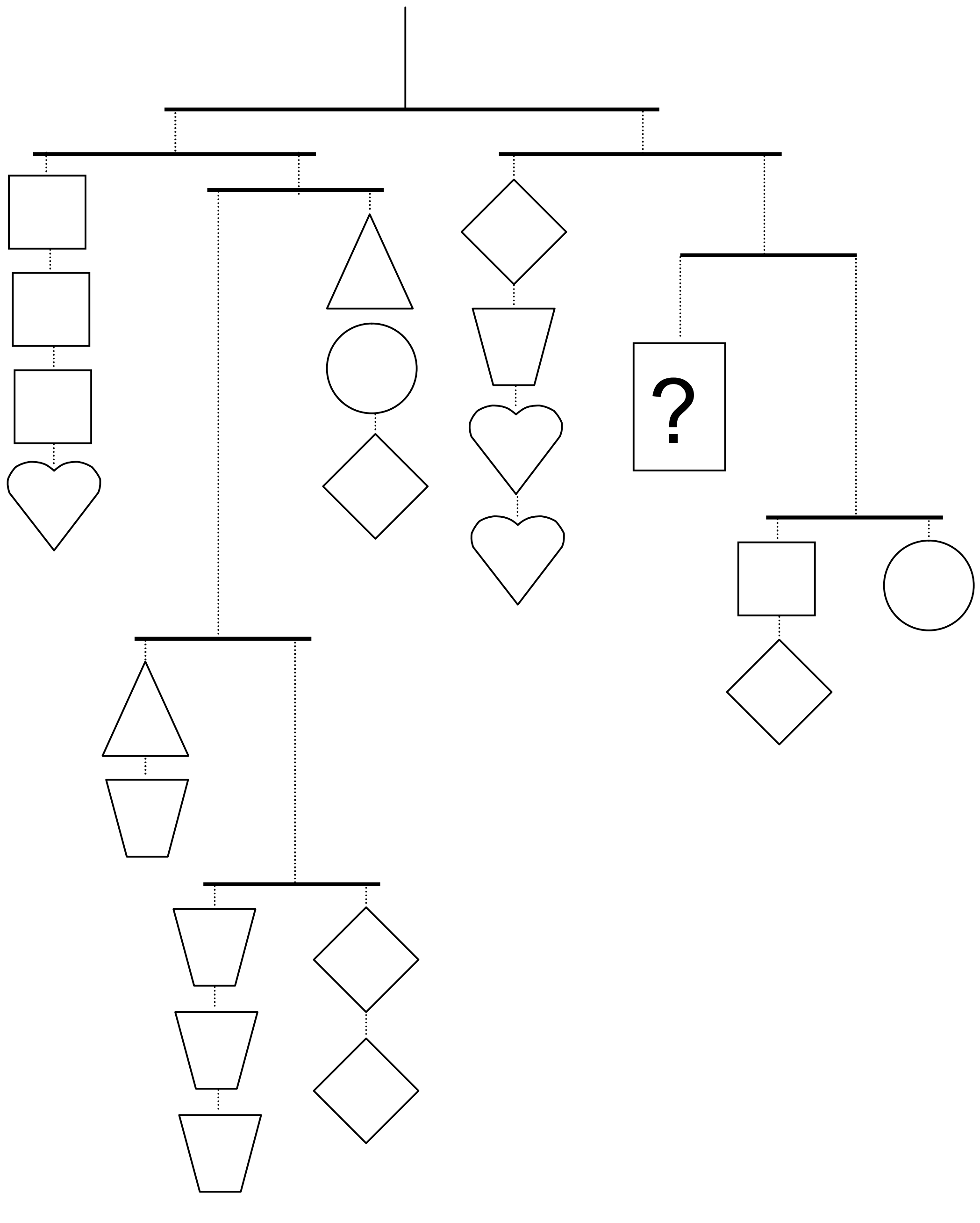
1.1.1 Praktische Bestimmung der Lösungsmenge

Damit man die Lösungsmenge konkret angeben kann, muß man die Anzahl der möglichen Werte für x_6 einsetzen und dann testen, ob die anderen $x_i \in ZF$ sind.
Die Anzahl der zu testen Möglichkeiten ist also:
TA = 10

Daraus - oder durch Probieren - ergibt sich z.B. dann folgende Lösung:
$x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 8$

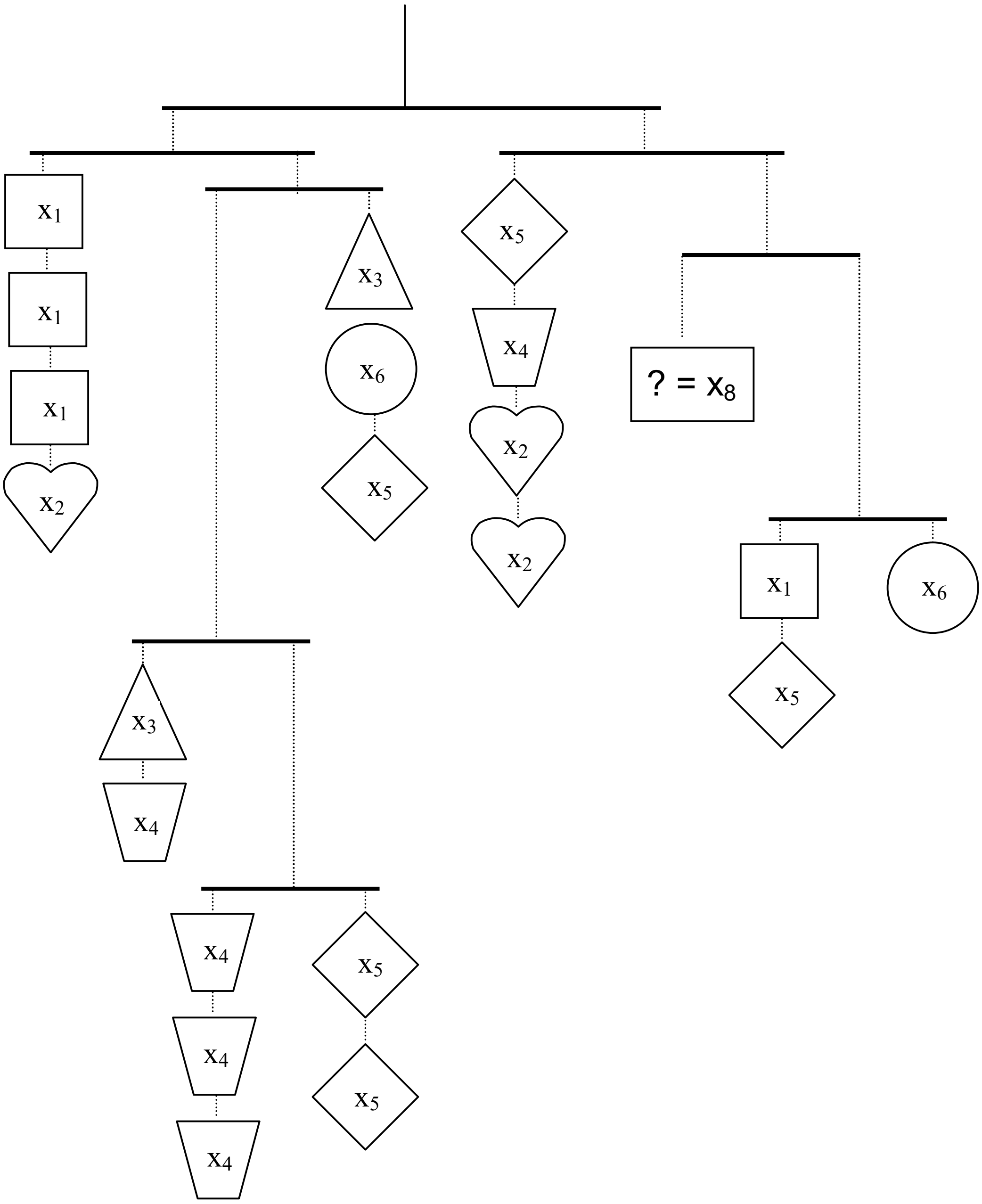
2 Mobile

Aufgabe:
Was muß anstelle des Fragezeichens angehängt werden, damit das Mobile im Gleichgewicht bleibt ? Das Gewicht der Fäden soll vernachlässigt werden, nicht jedoch das der Stäbe. Jeder Stab ist gleich schwer. Kommen Sie mit möglichst wenig Teilen aus.



2.1 Lösung durch Gausschen Algorithmus

Das Gewicht eines jeden Stabes sei x_7



Das ergibt das folgende Gleichungssystem:

$3\ x_1 + x_2 = 2\ x_3 + 4\ x_4 + 3\ x_5 + x_6 + 3\ x_7$
$x_3 + x_5 + x_6 = x_3 + 4\ x_4 + 2\ x_5 + 2\ x_7$
$x_3 + x_4 = 3\ x_4 + 2\ x_5 + x_7$
$2\ x_5 = 3\ x_4$
$2\ x_2 + x_4 + x_5 = x_1 + x_5 + x_6 + x_8 + 2\ x_7$
$x_8 = x_1 + x_5 + x_6 + x_7$
$x_6 = x_1 + x_5$
$3\ x_1 + x_2 + 2\ x_3 + 4\ x_4 + 3\ x_5 + x_6 + 4\ x_7 = x_1 + 2\ x_2 + x_4 + 2\ x_5 + x_6 + 3\ x_7 + x_8$

Zusammengefasst ist dies:

$3\ x_1 + x_2 - 2\ x_3 - 4\ x_4 - 3\ x_5 - x_6 - 3\ x_7 = 0$
$- 4\ x_4 - x_5 + x_6 - 2\ x_7 = 0$
$x_3 - 2\ x_4 - 2\ x_5 - x_7 = 0$
$-3\ x_4 + 2\ x_5 = 0$
$-x_1 + 2\ x_2 + x_4 - x_6 - 2\ x_7 - x_8 = 0$
$-x_1 - x_5 - x_6 - x_7 + x_8 = 0$
$-x_1 - x_5 + x_6 = 0$
$2\ x_1 - x_2 + 2\ x_3 + 3\ x_4 + x_5 + x_7 - x_8 = 0$

Damit ergibt sich die folgende Matrix:

3	1	-2	-4	-3	-1	-3	0	0
0	0	0	-4	-1	1	-2	0	0
0	0	1	-2	-2	0	-1	0	0
0	0	0	-3	2	0	0	0	0
-1	2	0	1	0	-1	-2	-1	0
-1	0	0	0	-1	-1	-1	1	0
-1	0	0	0	-1	1	0	0	0
2	-1	2	3	1	0	1	-1	0

Also:

1	0	0	0	0	0	0	-10/27	0
0	1	0	0	0	0	0	-25/27	0
0	0	1	0	0	0	0	-11/27	0
0	0	0	1	0	0	0	-2/27	0
0	0	0	0	1	0	0	-1/9	0
0	0	0	0	0	1	0	-13/27	0
0	0	0	0	0	0	1	-1/27	0

Damit ergeben sich die Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = x_8 \cdot \begin{pmatrix} 10/27 \\ 25/27 \\ 11/27 \\ 2/27 \\ 1/9 \\ 13/27 \\ 1/27 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_7 , $x_8 \in ZF = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

2.1.1 Praktische Bestimmung der Lösungsmenge

Damit man die Lösungsmenge konkret angeben kann, muß man die Anzahl der möglichen Werte für x_8 einsetzen und dann testen, ob die anderen $x_i \in ZF$ sind.
Die Anzahl der zu testen Möglichkeiten ist also:
TA = 10

Daraus ergibt sich z.B. dann folgende Lösung:
$x_1 = 10$, $x_2 = 25$, $x_3 = 11$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$, $x_6 = 13$, $x_7 = 1$, $x_8 = 27$

3 Zauberquadrat

Aufgabe:
Wie muß man die Zahlen 1 bis 9 auf die 9 Zellen der folgenden Tabelle verteilen, daß die Summe in den Spalten, Zeilen und Diagonalen gleich groß ist ?

3.1 Lösung durch Probieren

2	7	6
9	5	1
4	3	8

3.2 Mathematische Lösung

Summe in den Diagonalen, bzw. Spalten bzw. Zeilen: x_{10}

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

Das ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= x_{10}\\
x_4 + x_5 + x_6 &= x_{10}\\
x_7 + x_8 + x_9 &= x_{10}\\
x_1 + x_4 + x_7 &= x_{10}\\
x_2 + x_5 + x_8 &= x_{10}\\
x_3 + x_6 + x_9 &= x_{10}\\
x_1 + x_5 + x_9 &= x_{10}\\
x_3 + x_5 + x_7 &= x_{10}\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &= 45
\end{aligned}
$$

umgeformt:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - x_{10} &= 0\\
x_4 + x_5 + x_6 - x_{10} &= 0\\
x_7 + x_8 + x_9 - x_{10} &= 0\\
x_1 + x_4 + x_7 - x_{10} &= 0\\
x_2 + x_5 + x_8 - x_{10} &= 0\\
x_3 + x_6 + x_9 - x_{10} &= 0\\
x_1 + x_5 + x_9 - x_{10} &= 0\\
x_3 + x_5 + x_7 - x_{10} &= 0\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &= 45
\end{aligned}
$$

oder in Matritzenform (Gausscher Algorithmus)

1	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	-1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	-1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	-1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	-1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	45

also:

1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	10
0	**1**	0	0	0	0	0	1	0	0	10
0	0	**1**	0	0	0	0	-1	-1	0	-5
0	0	0	**1**	0	0	0	-1	-2	0	-10
0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	5
0	0	0	0	0	**1**	0	1	2	0	20
0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	0	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Damit ergeben sich die Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \\ -10 \\ 5 \\ 20 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + x_8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in ZF0 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) \mid x_1 = 10-x_9 \wedge x_2 = 10-x_8 \wedge x_3 = -5+x_8+x_9$
$\wedge x_4 = -10+x_8+2x_9 \wedge x_5 = 5 \wedge x_6 = 20-x_8-2x_9$
$\wedge x_7 = 15-x_8-x_9 \wedge x_{10} = 15 \wedge x_8 \in ZF0 \wedge x_9 \in ZF0 \}$

3.2.1 Praktische Bestimmung der Lösungsmenge

Damit man die Lösungsmenge konkret angeben kann, muß man die Anzahl der möglichen Werte für x_8 , x_9 einsetzen und dann testen, ob die anderen $x_i \in$ ZF0 sind.
Die Anzahl der zu testen Möglichkeiten ist also:
$TA = 9^2$

Daraus - oder durch Probieren - ergibt sich durch Probieren z.B. dann folgende Lösung:
$x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 6$, $x_4 = 9$, $x_5 = 5$, $x_6 = 1$, $x_7 = 4$, $x_8 = 3$, $x_9 = 8$

3.3 Lösung durch Brute Force

Eine andere Lösung bekommt man, indem man alle möglichen Werte für die Variablen x_i einsetzt und dann testet, ob diese den Bedingungen genügen.
Die Anzahl aller zu testenden Möglichkeiten ist also:
$TA = 9^9$

Bemerkung:
Es läßt sich relativ leicht selbst ein Programm (mit verschachtelten Schleifen) schreiben, das alle Möglichkeiten testet.

3.4 Vergleich Brute Force - Gauss

Gauss $TA = 9^2$
Brute Force $TA = 9^9$

3.5 Ausbau der Aufgabe

Wie muß man die Zahlen 1 bis 16 auf die 16 Zellen der folgenden Tabelle verteilen, daß die Summe in den Spalten, Zeilen und Diagonalen gleich groß ist ?

1) Wie sieht der Vergleich der Lösungen Brute Force - Gauss aus ?
2) Lässt sich die Brute Force Methode mit den heutigen Computern in vertretbarer Zeit überhaupt lösen ?
3) Was passiert, wenn man das Zauberquadrat noch grösser macht ?

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}

4 Send More Money

Im folgenden Zahlenrätsel sollen die Buchstaben durch Ziffern ersetzt werden (gleiche Buchstaben – gleichen Ziffern und verschiedene Buchstaben – verschiedene Ziffern).
Eine Ziffer ist Element der Menge ZF = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.
Ein Übertrag (bei der Addition) ist Element der Menge UE = {0,1}.

```
  S  E  N  D
+ M  O  R  E
  u3 u2 u1
---------
M  O  N  E  Y
```

Welche Möglichkeiten gibt es diese Aufgabe zu lösen ?

4.1 Lösungsmöglichkeiten

4.1.1 "geschicktes" Probieren.

Dies ist für diejenigen geeignet, die gerne Denksportaufgaben lösen.

4.1.2 Gausscher Algorithmus

In der Aufgabe kommen die 8 Unbekannten S, E, N, D, M, O, R, Y vor.
Mit diesen kann man ein lineares Gleichungssystem aufstellen, das sich nach dem Gausschen Algorithmus lösen lässt.
Dies ist für diejenigen geeignet, die gerne Mathematikaufgaben lösen.

Setze:
$x1 = S$, $x2=E$, $x3=N$, $x4=D$, $x5=M$, $x6=O$, $x7=R$, $x8=Y$
und für die Überträge:
$x9=u1$, $x10=u2$, $x11=u3$
Es gilt:
$x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8 \in ZF$
$x9, x10, x11 \in UE$

```
x4 + x2        = x8 + 10x9
x3 + x7 + x9   = x2 + 10x10
x2 + x6 + x10  = x3 + 10x11
x1 + x5 + x11  = x6 + 10x5
-------------------------------------
 x2 + x4   - x8 - 10x9        = 0
-x2 + x3   + x7 + x9  - 10x10 = 0
 x2 - x3   + x6 + x10 - 10x11 = 0
 x1 - 9x5 - x6 + x11          = 0
-------------------------------------
0  1  0  1  0  0  0 -1 -10   0   0  0
0 -1  1  0  0  0  1  0   1 -10   0  0
0  1 -1  0  0  1  0  0   0   1 -10  0
1  0  0  0 -9 -1  0  0   0   0   1  0
-------------------------------------
1  0  0  0   -9 0  1  0   1  -9  -9  0
0  1  0  1    0 0  0 -1 -10   0   0  0
0  0  1  1    0 0  1 -1  -9 -10   0  0
0  0  0  0    0 1  1  0   1  -9 -10  0
-------------------------------------
```

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = -x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_5 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - x_8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} - x_{10} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix} - x_{11} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_7 , x_8 \in ZF = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$x_9 , x_{10} , x_{11} \in UE = \{0,1\}$

4.1.2.1 Praktische Bestimmung der Lösungsmenge

Damit man die Lösungsmenge konkret angeben kann, muß man die Anzahl der möglichen Werte für $x_4 , x_5 , x_7 , x_8 \in ZF$ und $x_9 , x_{10} , x_{11} \in UE$ einsetzen und dann testen, ob die $x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \in ZF$ sind.
Die Anzahl der zu testen Möglichkeiten ist also:
$TA = 10^4 \cdot\ 2^3 = 8 \cdot 10^4$

Daraus - oder durch Probieren - ergibt sich durch Probieren z.B. dann folgende Lösung:
$x_1 = 9,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6,\ x_4 = 7,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0,\ x_7 = 8,\ x_8 = 7$

```
  9 5 6 7
+ 1 0 8 5
---------
1 0 6 5 7
```

4.1.3 Brute Force - Methode (Probieren aller Möglichkeiten)

Bei den 8 verschiedenen Buchstaben S, E, N, D, M, O, R, Y gibt es
$N = 10^8 = 100\,000\,000$ Möglichkeiten.
Da ein Mensch nicht so alt wird, alle Möglichkeiten auszutesten, lässt man diese einen Rechenknecht (Computer) mittels eines Programms durch rohe Rechengewalt (brute force) machen.
Dies ist für diejenigen geeignet, die gerne programmieren.

Man setzt alle möglichen Werte für die Variablen ein und prüft dann, ob diese den Bedingungen genügen.
Bei den 8 verschiedenen Buchstaben S, E, N, D, M, O, R, Y gibt es
$N = 10^8 = 100\,000\,000$ Möglichkeiten.
Da ein Mensch nicht so alt wird, alle Möglichkeiten auszutesten, lässt man diese einen Rechenknecht (Computer) mittels eines Programms durch rohe Rechengewalt (brute force) machen.
Dies ist für diejenigen geeignet, die gerne programmieren.

4.1.3.1 Zeitliche Abschätzung der Rechenzeit

Man berechnet die **Mindestzeit**, die der schnellste heute sich auf dem Markt befindliche Computer benötigt. Wenn diese schon entsprechend groß ist (z.B. 100 Jahre), kann man die Aufgabe **praktisch** nicht mit der Brute Force - Methode lösen und man muss diesen Lösungsansatz verwerfen.

4.1.3.1.1 Optimale Annahmen

1) CPU-Takt: 10 GHz
D.h. die CPU benötigt für einen Takt die Zeit:
$T = 1/10^{10}$ Sekunden $= 10^{-10}$ s

2) Die CPU arbeitet jeweils in **einem** Prozessortakt eine Möglichkeit ab.
Dies kann auf keinen Fall unterboten werden. Damit ist die Rechenzeit t_M, die für eine Möglichkeit benötigt wird:
$t_M = 10^{-10}$ s

Damit lässt sich die Mindestrechenzeit berechnen:

4.1.3.1.2 Berechnung der Mindestrechenzeit

t_{min} = Anzahl aller Möglichkeiten · Rechenzeit pro Möglichkeit
$= N \cdot t_M = 10^8 \cdot 10^{-10}$ s $= 0{,}01$ s.

Das Ergebnis bestätigt uns, diesen Lösungsansatz weiter zu verfolgen !

4.1.3.1.3 Parallelisierbarkeit

Ist das Problem parallelisierbar, d.h. wie kann man die Lösung dieser Aufgabe auf mehrere Prozessoren verteilen, so dass diese parallel und gleichzeitig arbeiten ?

Lösung:
Man kann z.B. das Programm abändern und aus dem einen Programm 10 verschiedene Programme machen, in der Art, dass beim Programm0 S = 0 gesetzt wird, beim Programm1

S = 1, ... und beim Programm9 S = 9 gesetzt wird. Dann kann jedes dieser einzelnen Programme parallel und gleichzeitig auf 10 verschiedenen Computern ablaufen.

4.1.3.1.4 Maximale Anzahl von Möglichkeiten

Wie groß wird die maximale Anzahl der Möglichkeiten, bei Aufgaben dieser Form (Buchstaben werden durch Ziffern ersetzt) ?

Lösung:
Da maximal 10 verschiedene Ziffern in dieser Art von Aufgaben vorkommen, können auch nur maximal 10 verschiedene Unbekannte (Variablen) vorkommen. D.h. die maximale Anzahl der Möglichkeiten ist:
$N = 10^{10}$ Möglichkeiten.
und
$t_{min} = N \cdot t_M = 10^{10} \cdot 10^{-10}$ s = 1 s.

4.2 Vergleich Brute Force - Gauss

Gauss TA = $8 \cdot 10^4$
Brute Force TA = 10^8

5 Weitere Zahlenrätsel

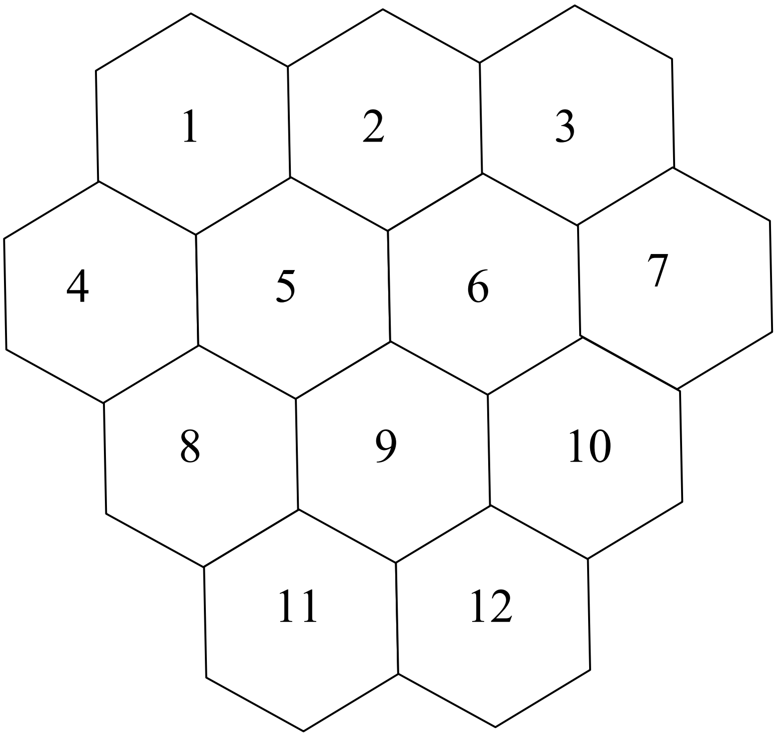
```
  R I E S E        E I N S
+ G A U S S      + E I N S
-----------      ---------
E U K L I D        Z W E I
```

Zeige:

D R E I + D R E I $\neq$ S E C H S

6 Magische Sechsecke

1) Siehe "Spektrum der Wissenschaft" August 2012
Die Zahlen 1 bis 12 sollen (jeweils nur einmal) auf diese 12 Sechsecke verteilt werden.
Gibt es für dieses Sechseck eine magische Belegung, d.h. gibt es eine Belegung, bei der jeweils die Summe der Zeilen, die Summe der rechten Diagonalen und die Summe der linken Diagonalen gleich groß sind ?
Wenn ja, welche ?



Die hier angegebene Belegung ist nicht magisch, denn es gilt **nicht**:
1 + 2 + 3 = 4 + 5 + 6 + 7 = 8 + 9 + 10 = 11 + 12 =
1 + 4 = 2 + 5 + 8 = 3 + 6 + 9 + 11 = 7 + 10 + 12 =
4 + 8 + 11 = 1 + 5 + 9 + 12 = 2 + 6 + 10 = 3 + 7