Eine Aufgabe aus der Stochastik

cx

5. Juni 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe

Bei einer Lotterie können Sie ein Konto mit einem bestimmten Betrag b (Anfangskapital) eröffnen (z.B. b=1000 Euro).
Jeden Tag wirft der Lotteriebesitzer eine Münze.
Wird bei einem Münzwurf das Wappen geworfen, erhöht der Lotteriebesitzer Ihren aktuellen Kontostand auf das q_1-fache (z.B. q_1=1,5) sonst verringert der Lotteriebesitzer Ihren aktuellen Kontostand auf das q_2-fache (z.B. q_2=0,6).
Nach z.B. n = 10000 Tagen dürfen Sie den gesamten Betrag (Endkapital) auf dem Konto abheben.
Folgendes wird vorausgesetzt:
$q_1 > q_2$ und $q_1 \cdot q_2 < 1$ und $\frac{q_1+q_2}{2} > 1$

Sind Sie bereit bei dieser Lotterie mitzuspielen (Konto eröffnen)?

Machen Sie dazu folgende Untersuchungen:
1) Berechnen Sie den Erwartungswert (Mittelwert) des Endkapitals.
2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn (Endkapital > Anfangskapital)

siehe auch: matheplanet.com
hierklicken

2 Definitionen und Sätze aus der Stochastik

2.1 Voraussetzungen im kompletten Skript

X_i seien die ZVen, die das Ergebnis des i-ten Wurfes einer n-mal geworfenen, fairen Münze angibt.
Die Zufallsvariable $X(n) := \sum_{i=1}^{n} X_i$ zählt wie oft Kopf geworfen wurde.

2.2 Bernoulli-Verteilung

Für die Wahrscheinlichkeit, bei n Würfen (einer fairen Münze) k-mal Kopf zu erwürfeln gilt die Binominalverteilung:
$P(X(n) = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^k \cdot (\frac{1}{2})^{n-k}$, also:
$P(X(n) = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n$

2.3 Satz 1

Wenn $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, dann gilt:
$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq f(n)) = 1$

Beweis:
Man definiert: $A_n := \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$
Sei ein beliebiges $\epsilon > 0$ vorgegeben.
1)
Da für die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung gilt:
$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$, gibt es ein x_0 mit: $1 - \epsilon < \Phi(x_0)$

2)
Nach dem Satz von Moivre-Laplace gilt:
$\lim_{n\to\infty} P(A_n \leq x_0) = \Phi(x_0)$
Also liegt $P(A_n \leq x_0)$ (für grosse n) beliebig nahe an $\Phi(x_0)$ Also gibt es ein n_1, so dass von n_1 an $P(A_n \leq x_0)$ grösser als $1 - \epsilon$ ist. Also gilt:
$1 - \epsilon < P(A_n \leq x_0)$ für alle $n \geq n_1$

3)
Da
$\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, gibt es ein n_2, so dass von n_2 an f(n) grösser ist als x_0. Also gilt:
$x_0 \leq f(n)$ für alle $n \geq n_2$
Wegen der Monotonie der Verteilungsfunktion gilt dann:
$P(A_n \leq x_0) \leq P(A_n \leq f(n))$

4)
Insgesamt gilt dann für alle n grösser max(n_1, n_2): $1 - \epsilon < P(A_n \leq x_0) \leq P(A_n \leq f(n)) \leq 1$ also:
$1 - \epsilon < P(A_n \leq f(n)) \leq 1$

2.4 Satz 2

Für alle $c > \frac{1}{2}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq c) = 1$

Beweis:
1) genügt: $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} < c) = 1$
denn aus: $P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} < c) \leq P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq c) \leq 1$ folgt:
$1 = \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} < c) \leq \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq c) \leq 1$ also:
$\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq c) = 1$
2) genügt: $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} < \frac{1}{2} + \epsilon) = 1$ für alle $\epsilon > 0$
denn: für jedes $c > \frac{1}{2}$ existiert ein ϵ mit $\frac{1}{2} + \epsilon \leq c$, also:
$P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq \frac{1}{2} + \epsilon) \leq P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq c) \leq 1$, also: $1 = \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq \frac{1}{2} + \epsilon) \leq \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq c) \leq 1$
also: $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq c) = 1$
3) $M_n := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
Es gilt: $E(M_n) = \frac{n \cdot \frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2}$ und $V(M_n) = \frac{n \cdot \frac{1}{4}}{n^2} = \frac{1}{4n}$
Mit der Ungleichung von Tschebyscheff folgt für alle $\epsilon > 0$ und alle $n > 0$: $P(|M_n - \frac{1}{2}| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = \frac{1}{4\epsilon^2 n}$ Da gilt:
$0 \leq P(|M_n - \frac{1}{2}| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = \frac{1}{4\epsilon^2 n}$ und
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4\epsilon^2 n} = 0$ folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} P(|M_n - \frac{1}{2}| \geq \epsilon) = 0$ (*)

4)
Es gilt:
$P(|M_n - \frac{1}{2}| \geq \epsilon) = P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon) + P(M_n \leq \frac{1}{2} - \epsilon) \geq 0$
Also folgt mit (*):
$\lim\limits_{n\to\infty} (P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon) + P(M_n \leq \frac{1}{2} - \epsilon)) = 0$ (**)
Es gilt:
$0 \leq P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon) \leq P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon) + P(M_n \leq \frac{1}{2} - \epsilon)$
Mit (**) folgt dann:
$\lim\limits_{n\to\infty} P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon) = 0$
Also:
$1 - \lim\limits_{n\to\infty} P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon) = 1$
Also:
$\lim\limits_{n\to\infty} (1 - P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon)) = 1$ (***)

5)
Es gilt:
$P(M_n < \frac{1}{2} + \epsilon) + P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon) = 1$
also:
$P(M_n < \frac{1}{2} + \epsilon) = 1 - P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon)$
also:
$\lim\limits_{n\to\infty} P(M_n < \frac{1}{2} + \epsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - P(M_n \geq \frac{1}{2} + \epsilon))$
also folgt mit (***):
$\lim\limits_{n\to\infty} P(M_n < \frac{1}{2} + \epsilon) = 1$

2.5 Bemerkung

Wenn X_n eine Folge von ZVen ist und $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$, dann gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq f(n)) = 1$

Diese Behauptung ist falsch.
Gegenbeispiel: X_n sei eine ZV, die mit Wahrscheinlichkeit 1 den Wert n annimmt. Weiter sei $f(n) = n - 1$.
Dann ist $P(X_n \leq f(n)) = 0$ für alle n.

2.6 Lemma

$\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{2}) = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Beweis:
Aus Symmetriegründen folgt:
$P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{1}{2}) = P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{1}{2})$
Es gilt (ohne Beweis):
$\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} = \frac{\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}}{2^n}$

3 Lösung der Aufgabe

3.1 Intuitive Vorüberlegungen

1) Wenn man mit dem Betrag b in der Lotterie startet, so hat man der Hälfte der Fälle (fairer Münzwurf vorausgesetzt) einen Betrag von $q_1 b$ auf dem Konto, im anderen Fall $q_2 b$ und damit einen mittleren Wert von $\frac{(q_1 * b + q_2 * b}{2} = \frac{q_1 + q_2}{2} b$

2) Da auf lange Sicht aus gesehen, gleich viele Wappen wie Zahlen fallen, wird bei jedem Münze - Wappen Vorgang der Gewinn $q_1 \cdot q_2 < 1$. Da sich wegen der Unabhängigkeit diese Werte jeweils miteinander multiplizieren, geht der Gewinn auf lange Sicht gegen 0.

3.2 Berechnung Endkapital

Wird bei insgesamt n Würfen k-mal Kopf geworfen, so ist das Endkapital unabhängig von der Reihenfolge der Münzwürfe. Das Endkapital beträgt:
$q_1^k \cdot q_2^{n-k}$

3.3 Bedingung für Gewinn

Um zu gewinnen (d.h. das Endkapital ist größer als das Anfangskapital) sucht man das kleinste k (mit k_{min} bezeichnet) für das gilt:
$q_1^k \cdot q_2^{n-k} > 1$
umgeformt:
$q_1^k \cdot q_2^{n-k} > 1 \iff q_1^k \cdot q_2^n \cdot \frac{1}{q_2^k} > 1 \iff \frac{q_1^k}{q_2^k} \cdot q_2^n > 1 \iff (\frac{q_1}{q_2})^k \cdot q_2^n > 1 \iff (\frac{q_1}{q_2})^k > (\frac{1}{q_2})^n$
$\iff ln(\frac{q_1}{q_2})^k > ln(\frac{1}{q_2})^n \iff k \cdot ln(\frac{q_1}{q_2}) > n \cdot ln(\frac{1}{q_2})$ <=(da $q_1 > q_2$)=> $k > n \cdot \frac{ln(\frac{1}{q_2})}{ln(\frac{q_1}{q_2})}$
$\iff k > n \frac{ln\ 1 - ln\ q_2}{ln\ q_1 - ln\ q_2} \iff k > n \frac{-ln\ q_2}{ln\ q_1 - ln\ q_2}$
$\iff k > n \frac{ln\ q_2}{ln\ q_2 - ln\ q_1}$
also:
$k_{min} > n \frac{ln\ q_2}{ln\ q_2 - ln\ q_1}$

3.4 Erwartungswert

$E(X(n)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} q_1^k \cdot q_2^{n-k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q_1^k \cdot q_2^{n-k} = \frac{(q_1+q_2)^n}{2^n} = (\frac{q_1+q_2}{2})^n$

3.5 Wahrscheinlichkeit für Gewinn

Behauptung:
Wenn $q_1 > q_2$ und $q_1 \cdot q_2 < 1$ dann folgt
$\lim_{n\to\infty} P\left(X(n) \geq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2) - \ln(q_1)}\right) = 0$

1. Beweis:
1) Unterbehauptung1: $\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} > \frac{1}{2} \iff q_1 q_2 < 1$
Unterbeweis1:
$\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} > \frac{1}{2} \iff \frac{\ln(q_2)}{\ln(\frac{q_2}{q_1})} > \frac{1}{2}$ <=(da $q_1 > q_2$)=> $\ln q_2 < \frac{1}{2}\ln(\frac{q_2}{q_1}) \iff 2\ln q_2 < \ln(\frac{q_2}{q_1}) \iff$
$\ln q_2^2 < \ln(\frac{q_2}{q_1}) \iff q_2^2 < \frac{q_2}{q_1} \iff q_2 < \frac{1}{q_1} \iff q_1 q_2 < 1$

2) Unterbehauptung2:
$\lim_{n\to\infty} P(X(n) = n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 0$
Unterbeweis2:
Da an der Stelle $\frac{n}{2}$ der Funktionswert $P(X(n))$ maximal wird gilt:
$0 \leq P(X(n) = n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) \leq P(X(n) = \frac{n}{2}) = \binom{n}{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^n}$
Da aber gilt:
$lim_{n\to\infty} P(X(n) = \frac{n}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2n!}{(n!)^2} = 0$ folgt:
$\lim_{n\to\infty} P(X(n) = n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 0$ qed
3)
Es gilt:
$P\left(X(n) \geq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}\right) = P(X(n) = n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) + P(X(n) > n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) =$
$P(X(n) = n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) + 1 - P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) =$
$P(X(n) = n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) + 1 - P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)})$
Da $\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} > \frac{1}{2}$ folgt dann mit Satz 2:
$\lim_{n\to\infty} P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = \lim_{n\to\infty} P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 1$ (*)
und damit:
$1 - \lim_{n\to\infty} P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 0$
Also folgt dann mit Unterbehauptung2 und (*):
$\lim_{n\to\infty} P\left(X(n) \geq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}\right) =$
$= \lim_{n\to\infty} P(X(n) = n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) + 1 - \lim_{n\to\infty} P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 0$

3' Alternativbeweis zu 3:
Fall1: $\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) \notin \mathbb{N}$:
$P\left(X(n) \geq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}\right) = 1 - P(X(n) < n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 1 - P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)})$

Da $\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} > \frac{1}{2}$ folgt dann mit Satz 2:
$\lim_{n\to\infty} P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = \lim_{n\to\infty} P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 1$ (*)
und damit:
$1 - \lim_{n\to\infty} P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 0$
also:
$\lim_{n\to\infty} P\left(X(n) \geq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}\right) = 0$

Fall2: $\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) \in \mathbb{N}$
Unterbehauptung:
$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - \frac{1}{n}) = 1$
Unterbeweis:
Da $\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} > \frac{1}{2}$, gilt:
Für alle $\epsilon > 0$ und $\epsilon < \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - \frac{1}{2}$ existiert ein N, so daß für alle $n > N$ gilt:
$P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{1}{2} + \epsilon) \leq P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - \frac{1}{n}) \leq 1$

Mit Satz2 folgt dann:
$1 = \lim_{n\to\infty} P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{1}{2} + \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - \frac{1}{n}) \leq 1$
also:
$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - \frac{1}{n}) = 1$ qed

Es gilt:
$P\left(X(n) \geq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}\right) = 1 - P(X(n) < n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 1 - P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) - 1$
$= 1 - P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) - \frac{1}{n}$
also mit Unterbehauptung:
$\lim_{n\to\infty} P\left(X(n) \geq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\frac{X(n)}{n} \leq \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) - \frac{1}{n} = 0$

2.Beweis (mit Satz1):
zeige:
$\lim_{n\to\infty} P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = 1$ (**)

Es gilt:
$P(X(n) \leq n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)}) = P(\frac{X_n - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n}\frac{1}{2}} \leq \frac{n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n}\frac{1}{2}}) = P(\frac{X_n - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n}\frac{1}{2}} \leq \frac{n}{\sqrt{n}} \cdot 2 \cdot (\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - \frac{1}{2})$
$= P(\frac{X_n - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n}\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n} \cdot 2 \cdot (\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - \frac{1}{2})$

Da $\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} > \frac{1}{2}$ folgt: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot 2 \cdot (\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - \frac{1}{2}) = \infty$

Also gilt mit Satz 1:
$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_n - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n}\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n} \cdot 2 \cdot (\frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} - \frac{1}{2}) = 1$
und damit folgt (**)

3.6 Beispiel

n=10000
p=0,5
$q_1 = 1,5$
$q_2 = 0,6$

1) Berechnung des minimalen k_{min}, ab dem Gewinn gemacht wird:
$k_{min} = n \cdot \frac{\ln(q_2)}{\ln(q_2)-\ln(q_1)} = 10000 \cdot \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,6)-\ln(1,5)} \approx 5575$

2) Der Gewinn für k= 5575:
$P(X_n > k_{min}) = 1 - P(X_n \leq k_{min}) = 1 - P(\frac{X_n-\mu}{\sigma} \leq \frac{k_{min}-\mu}{\sigma}) = 1 - P(\frac{X_n-np}{\sqrt{np^2}} \leq \frac{k_{min}-np}{\sqrt{np^2}}) =$
$1 - P(\frac{X_{10000}-5000}{50} \leq \frac{5575-5000}{50}) = 1 - P(\frac{X_{10000}-5000}{50} \leq 11,5) \approx 1 - \Phi(11,5) \approx 0$