INSTITUT FÜR INFORMATIK
UNIVERSITÄT STUTTGART

1974

PRÄDIKATENLOGIK

Vorlesungsmitschrift,

ausgeführt von Bernd Meyer nach einer Vorlesung im SS 1974 von Prof. W. Schwabhäuser mit gleichem Titel.

Der Vorlesung lag u.a. das BI-Taschenbuch von W. Schwabhäuser: Modelltheorie I, 1971, als begleitende Literatur zugrunde, so daß auch dort die Motivation und die Fortführung des Vorlesungsgegenstandes zu finden sind. Die Vorlesungsmitschrift wurde von mir nur zum Teil überlesen, Formulierungen wurden nicht geändert. Der Leser muß davon ausgehen, daß die Beweisdarstellungen ursprünglich für die Zuhörer der Vorlesung gedacht waren, somit mündliche Zwischenschritte nicht oder unvollständig wiedergegeben sind.

Der Anhang umfaßt die Testfragen, die zur Vertiefung der Vorlesung in den Übungen im SS 1974 gestellt wurden.

Seeland.

PRÄDIKATENLOGIK

Vorlesung SS1974, W. Schwabhäuser

<u>empfohlene Literatur:</u>
1. J.R. Shoenfield: "Mathematical Logic" Addison-Wesley, London, 1973.
2. H. Hermes: "Einführung in die mathematische Logik" Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1972.
3. W. Schwabhäuser: "Modelltheorie I" BI Nr. 813a, 1971.

Einführende Bemerkungen:

Mathematische Logik

klass. Logik (Aristoteles) — Metatheorie der Logik

a. (klass.) Logik

<u>Bsp.:</u>
Alle Menschen sind sterblich (Biologie)
Cäsar ist ein Mensch (Geschichte)

Also: Cäsar ist sterblich
} Logik

Aussagenlogik:

Wenn α, so β.
(nun aber) α
(Also) β

Wenn α und β, so α.

Wenn α, so β.
Wenn nicht β, so nicht α. (Kontraposition)

Prädikatenlogik:

Wenn es gibt ein x, so daß für jedes y: Rxy, so für jedes y: es gibt ein x, so daß Rxy.

b. Metatheorie

Theorie	Metatheorie
Gegenstand: beliebige Strukturen.	Gegenstand: Aussagen über Sätze. (Aussageformen) u.a.
Aussagen über Gegenstände (Sätze) in (einer formalisierten) Objektsprache	Metasprache (Umgangssprache)
z.B.: Geometrie Gegenstände: Punkt, Gerade, Ebene. Aussagen über....	z.B. Dualitätstheorem der projektiven Geometrie.

mehrstellige Prädikatenlogik erster Stufe.

1. Die formalisierte Sprache der Prädikatenlogik

Grundzeichen: für die Formalisierung beliebiger Theorien im Rahmen der Prädikatenlogik der ersten Stufe.

1.a. Funktionszeichen aus einer geg. Menge $\mathfrak{F}$ (auch: Operationszeichen, Funktions-Operationssymbole, Funktoren, Funktionsvariablen, Funktionskonstanten etc.).

b. Relationszeichen aus einer geg. Menge $\mathfrak{R}$ (auch: Prädikatenvariablen, Relationskonstanten, Relationenvariablen, etc.)

Jedem $f \in \mathfrak{F}$ und jedem $R \in \mathfrak{R}$ sei eine Stellenzahl zugeordnet: $r(f)$ bzw. $r(R)$ (Stellenzahlfunktion: $r: \mathfrak{F} \cup \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ sei geg.).

2. Die Variablen aus einer geg. (abzählbaren) Menge $\mathfrak{V}$ (Individuenvariablen, Subjektsvariablen).

Bezeichnungen: f,g,... für Elemente aus $\mathfrak{F}$
R,S,.... " " " $\mathfrak{R}$
x,y,... " " " $\mathfrak{V}$

3. Die endlich vielen weiteren.
logische Zeichen: $\dot{=}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$
technische Zeichen: (,)

($\dot{=}$ zur Unterscheidung zum Gleichheitszeichen der Metasprache).

Def.:
Zeichenreihen sind endliche Folgen von Grundzeichen.
(sinnvolle Zeichenreihen):

Def.: Terme (der durch die Menge $\mathfrak{F}, \mathfrak{R}$, r bestimmten formalisierten Sprache):

T1: Die Variablen sind Terme.

T2: Wenn $f \in \mathfrak{F}$ und wenn $\tau_1, \dots, \tau_{r(f)}$ Terme sind, so ist auch $f\tau_1 \dots \tau_{r(f)}$ ein Term.

Satz: Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Term, wenn das auf Grund von T1,T2 der Fall ist. § 33: Handbuch der Logik

Def.: Formeln (Ausdrücke) (der durch $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$, r bestimmten formalisierten Sprache):

F1: Die Zeichenreihen der folgenden Form sind Formeln:

$R\tau_1 \dots \tau_{r(R)}$, wobei $R \in \mathfrak{R}$ und $\tau_1, \dots, \tau_{r(R)}$ Terme
$\sigma \dot{=} \tau$ (Gleichungen), wobei σ, τ Terme sind.
} Primformeln (atomare Formeln)

F2: (a) Wenn α, β Formeln, so auch
$\neg\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$

(b) Wenn α Formel und $x \in \mathfrak{V}$, so sind auch
$\forall x \alpha$, $\exists x \alpha$ Formeln.

Satz: Eine Zeichnreihe ist nur dann eine Formel, wenn dies auf Grund von F1, F2 der Fall ist.

<u>Beispiele:</u> Sei $c, f \in \mathfrak{F}$, $R \in \mathfrak{R}$, $x, y, z \in \mathfrak{V}$

$r(c)=0$; $r(f)=2$; $r(R)=2$.

Dann sind Beispiele für <u>Terme</u>:

x , c (Nullterm) , fyc , $fxfyz$, $f\underbrace{\underbrace{fxy}z}$

und für <u>Formeln:</u> Rcx, $fyy \doteq x$, $\exists yfyy$

$\forall x(Rcx \rightarrow \exists yfyy \doteq x)$, $\forall x\forall y\forall zfxfyz \doteq ffxyz$

(z.B.: $c = 0$, $f = .$, $R = <$: $\forall x\forall y\forall zx.(y.z) \doteq (x.y).z$

$Rcx \overset{\cdot}{\leftrightarrow} 0<x$ etc.)

Beispiele für $\mathfrak{F}, \mathfrak{R}$:

a) $\mathfrak{F} = \{+, .\}$, $\mathfrak{R} = \{<\}$

b) <u>Die klassische Prädikatenlogik:</u>

$\mathfrak{F} = \{ f_k^i | i,k \in \mathbb{N}\}$ i - Stellenzahl(index)

k - zur Durchnummerierung

Unterscheidungsindex

$r(f_k^i) = i$

$\mathfrak{R} = \{A_k^i | i,k \in \mathbb{N}\}$

$\mathfrak{V} = \{v_k | k \in \mathbb{N}\}$ $v_0, v_1, v_2, \ldots$

<u>Bezeichnungen:</u> $\alpha, \beta, \ldots$ <u>Formeln</u>

$\sigma, \tau, \ldots$ <u>Terme</u>

$Tm_L = Tm(\mathfrak{F}, \mathfrak{R}, r)$ = die Menge der <u>Terme</u> (der durch $\mathfrak{F}, \mathfrak{R}, r$ bestimmten Sprache).

$Fml_L = Fml(\mathfrak{F}, \mathfrak{R}, r)$ = die Menge der <u>Formeln</u> (...).

$L = (\mathfrak{F}, \mathfrak{R}, r)$ <u>Sprache</u>, "Sprachrahmen" (language)

auch $Fml(f_1, \ldots, f_k, R_1, \ldots, R_l)$ falls $\mathfrak{F} = \{f_1, \ldots, f_k\}$

entsprechend $Tm(\ldots)$ falls $\mathfrak{R} = \{R_1, \ldots, R_l\}$.

Für die Kommunikation lassen sich nur endlich viele (drucktechnische) Zeichen vereinbaren.

Die Elemente von $\mathfrak{V}$, oft auch von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$ lassen sich auffassen als zusammengesetzt aus endlich vielen 'Hilfszeichen', etwa:

v_k v_7 v71

f^i_k f^{22}_{37} f22/37 'Bezeichnungssystem', abzählbar viele Zeichenverbindungen.

Allgemein: $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$ beliebige Mengen (evtl. auch überabzählbar)

Vor.: $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{V}$ sind paarweise disjunkt und enthalten nicht weitere Grundzeichen unter 3 (s.o.)
S.3.

Zeichenreihe: ≙ Wort über der Menge der Grundzeichen.

≙ endliche Folge von Grundzeichen.

Satz: Jede Zeichenreihe ζ hat eine eindeutig bestimmte Darstellung $\zeta = \upsilon_1 \ldots\ldots \upsilon_m$ mit $m \in \mathbb{N}$, $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m$ Grundzeichen.

präzise

andere Definition: τ ist ein Term :<≡> Es gibt eine endliche Folge $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ von Zeichenreihen, so daß $\zeta_n = \tau$ und für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq n$ gilt:

ζ_ν ist eine Variable (T1)

oder ζ_ν entsteht aus früheren Gliedern der Folge durch Anwendung von T2.

Satz: Hierbei ist jedes ζ_ν ein Term.

Induktionsprinzip (Prinzip für Beweise durch Induktion über den Termaufbau): Um zu zeigen, daß eine Behauptung $\mathfrak{B}(\tau)$ für jeden Term τ gilt, genügt es zu zeigen:

(1) Es gilt $\mathfrak{B}(x)$ für jede Variable x.

(2) Für jedes $f \in \mathfrak{F}$ und beliebige Terme $\tau_1, \ldots, \tau_{r(f)}$ gilt: Wenn $\mathfrak{B}(\tau_1), \ldots, \mathfrak{B}(\tau_{r(f)})$, so auch $\mathfrak{B}(f\tau_1, \ldots, \tau_{r(f)})$.

2. Semantik (für Sprachen im Rahmen der Prädikatenlogik)

Geg.: $L = (\mathfrak{F}, \mathfrak{R}, r)$

Def.: Eine Struktur $\mathfrak{A}$ für L ist festgelegt durch:

1. eine (nicht leere) Menge $A = U_{\mathfrak{A}}$, sie heißt die Trägermenge oder der Individuenbereich (universe) von $\mathfrak{A}$. Ihre Elemente heißen auch Individuen oder Elemente der Struktur .
2. für jdese Funktionszeichen $f \in \mathfrak{F}$ eine r(f)-stellige Funktion $f_{\mathfrak{A}}$ über $U_{\mathfrak{A}}$.
3. für jedes Relationszeichen $R \in \mathfrak{R}$ eine r(R)-stellige Relation $R_{\mathfrak{A}}$ über $U_{\mathfrak{A}}$.

1 Fkt. wird so def.:

$1(x) = 1 \quad \forall x$

Beispiel: $\mathfrak{F} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$; $\mathfrak{R} = \{<\}$

2 2 1 0 0 2 -stellig

↓

(Inverse)

Sprache für angeordnete Körper $L = (\{+, \cdot, -, 0, 1\}, \{<\}, r)$

$\mathfrak{A} = (U_{\mathfrak{A}}; +_{\mathfrak{A}}, \cdot_{\mathfrak{A}}, -_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{A}}, 1_{\mathfrak{A}}; <_{\mathfrak{A}})$

ein angeordneter Körper

allgemein: Struktur $\mathfrak{A} = (U_{\mathfrak{A}}, s_{\mathfrak{A}})$

wobei $s_{\mathfrak{A}}$ - "Struktur"funktion mit Definitionsbereich

$s_{\mathfrak{A}}(f) = f_{\mathfrak{A}}$, $s_{\mathfrak{A}}(R) = R_{\mathfrak{A}}$

Def.: h ist eine Belegung (der Variablen) über $\mathfrak{A}$ (oder auch nur über $U_{\mathfrak{A}}$) :<=> $h: \mathfrak{V} \to U_{\mathfrak{A}}$

Def.: $w_{\mathfrak{A}}(\tau, h) \in U_{\mathfrak{A}}$ der Wert des Terms τ bei der Belegung h über $\mathfrak{A}$ wird rekursiv definiert durch die Wertfunktion

1. $w_{\mathfrak{A}}(x, h) = h(x) \quad (x \in \mathfrak{V})$ $\qquad w_{\mathfrak{A}}: Tm_L \times U_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{V}} \longrightarrow U_{\mathfrak{A}}$.
2. $w_{\mathfrak{A}}(f\tau_1 \ldots \tau_{r(f)}, h) = f_{\mathfrak{A}} w_{\mathfrak{A}}(\tau_1, h) \ldots w_{\mathfrak{A}}(\tau_{r(f)}, h) \quad (f \in \mathfrak{F})$

einstellige Rel.: $x \in R$ gleichbed. Rx

Sei $\{W,F\}$ eine zweielementige Menge, ihre Elemente W ("wahr") und F ("falsch") nennen wir die Wahrheitswerte.

Def.: Der Wahrheitswert der Formel α über $\mathfrak{A}$ bei der Belegung h: $W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h)$.

(induktiv über den Formelaufbau mit $W_{\mathfrak{A}}: \mathrm{Fml}_L \times U_{\mathfrak{A}}^{\mathcal{V}} \rightarrow \{W,F\}$):

1. $$W_{\mathfrak{A}}(R\tau_1,\dots,\tau_{r(R)},h) = \begin{cases} W \text{ falls } R_{\mathfrak{A}} w_{\mathfrak{A}}(\tau_1,h)\dots w_{\mathfrak{A}}(\tau_{r(R)},h) \\ \text{(Die Relation } R_{\mathfrak{A}} \text{ trifft zu auf...)} \\ F \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$W_{\mathfrak{A}}(\sigma \doteq \tau,h) = \begin{cases} W & \text{falls } w_{\mathfrak{A}}(\sigma,h) \doteq w_{\mathfrak{A}}(\tau,h) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

2. $W_{\mathfrak{A}}(\neg\alpha,h) = \mathrm{non}(W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h))$

$W_{\mathfrak{A}}(\alpha\wedge\beta,h) = \mathrm{et}\ (W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h),W_{\mathfrak{A}}(\beta,h))$

$\vee$ = vel (...)

$\rightarrow$ = seq (...)

$\leftrightarrow$ = äq (...)

wobei diese Funktionen durch folgende Wahrheitswerttafeln erklärt sind:

non	
W	F
F	W

et	W	F
W	W	F
F	F	F

vel	W	F
W	W	W
F	W	F

seq	W	F
W	W	F
F	W	W

äq	W	F
W	W	F
F	F	W

3. Sei x ein Element aus der Trägermenge $U_{\mathfrak{A}}$, sei $x \in \mathcal{V}$

dann ist h_x^{x} := die Belegung mit $h_x^{x}(z) = \begin{cases} h(z), & \text{falls } z \neq x \\ x, & \text{falls } Z = x\ . \end{cases}$

Sei $F < W$

$$W_{\mathfrak{A}}(\forall x\alpha,h) = \min_{x\in U_{\mathfrak{A}}} W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h_x^{x})$$

$$W_{\mathfrak{A}}(\exists x\alpha,h) = \max_{x\in U_{\mathfrak{A}}} W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h_x^{x})$$

Def.: Die Belegung h erfüllt in $\mathfrak{A}$ die Formel α

$h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\ \alpha :\Longleftrightarrow W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h) = W.$

Satz:

$h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} R\tau_1 \ldots \tau_{r(R)}$ gdw $R_{\mathfrak{A}} w_{\mathfrak{A}}(\tau_1, h) \ldots w_{\mathfrak{A}}(\tau_{r(R)}, h)$

$h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \sigma \doteq \tau$ gdw $w_{\mathfrak{A}}(\sigma, h) = w_{\mathfrak{A}}(\tau, h)$

$h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \neg\alpha$ gdw nicht $h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha$.

$h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha \wedge \beta$ gdw $h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha$ und $h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \beta$

$\vee$ gdw oder

$\rightarrow$ gdw wenn $h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha$ so auch $h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \beta$

$\leftrightarrow$ gdw ($h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha$ gdw $h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \beta$)

$h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \forall x\alpha$ gdw Für jedes $x \in U_{\mathfrak{A}}$ gilt: $h_x \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha$.

$h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \exists x\alpha$ gdw Es gibt ein $x \in U_{\mathfrak{A}}$: "

Beispiel: $\forall x(Rcx \rightarrow \exists y fyy \doteq x)$; $\alpha = \forall x(0<x \rightarrow \exists y y.y \doteq x)$

a. : $U_{\mathfrak{A}} = \mathbb{R}$, $R_{\mathfrak{A}} = <$, $f_{\mathfrak{A}} = .$, $c_{\mathfrak{A}} = 0$

"Satz": $W_{\mathfrak{A}}(\alpha, h) = W$.

b. $\mathfrak{A}$ beliebig für L.

$h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha$ gdw zu jedem $x \in U_{\mathfrak{A}}$ mit

$R_{\mathfrak{A}} 0_{\mathfrak{A}} x$ gibt es ein $z \in U_{\mathfrak{A}}$ mit $f_{\mathfrak{A}} yy = x$

Def.: α ist in $\mathfrak{A}$ gültig:

$\models_{\mathfrak{A}} \alpha$:<≡> Für jede Belegung h über $\mathfrak{A}$: $\underbrace{W_{\mathfrak{A}}(\alpha, h) = W}_{h \ \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha}$

Beispiel: $\models_{\mathbb{R}} x+(y+z) \doteq (x+y)+z$ (Man benötigt keine Quantoren)

Def.: Sei $\alpha \in \mathrm{Fml}_L$.

α ist logisch gültig (allgemeingültig (eine logische Identität), ein Satz der Logik (Prädikatenlogik der ersten Stufe)):

$\models \alpha$:<≡> α ist gültig in jeder Struktur für L.

Beispiel: $((\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \exists x\alpha) \rightarrow \exists x\beta)$.

Für <u>zweite Stufe</u> mit Mengenvariablen $(X, Y, \ldots \in \mathfrak{V}_M)$:

Belegungen ordnen jeder Mengenvariablen eine Teilmenge von $U_{\mathfrak{A}}$ zu.

$$W_{\mathfrak{A}}(\tau \dot{\in} X, h) = \begin{cases} W, \text{ falls } w_{\mathfrak{A}}(\tau, h) \in h(X) \\ \\ F, \ldots \qquad \notin \end{cases}$$

Für <u>höhere Stufen</u>: Mengen von Mengen etc.
manchmal Relationen statt Mengen.

Nachtrag zu § 1

<u>Satz 1:</u> Für jeden Term τ gilt:

τ ist eine Variable oder es gibt ein $f \in \mathfrak{F}$ und Terme $\tau_1, \ldots, \tau_{r(f)}$, so daß $\tau = f\tau_1 \ldots \tau_{r(f)}$.

(Beweis des Satzes durch Induktion über den Termaufbau).

<u>Satz 2:</u> Ein Term kann nie echtes Anfangsstück eines anderen Termes sein.

<u>Es genügt:</u> Für jeden Term τ gilt: Für jeden Term σ , jede Zeichenreihe ζ gilt: Wenn $\tau\zeta = \sigma$ oder $\sigma\zeta = \tau$, so $\zeta = e$ (leere Zeichenreihe) und damit auch $\sigma = \tau$.

<u>Es genügt:</u> Für jeden Term τ gilt:

$\mathfrak{L}(\tau)$ { **Für** jeden Term σ, und beliebige Zeichenreihen ξ, η :
Wenn $\sigma\xi = \tau\eta$, so $\sigma = \tau$ und damit $\xi = \eta$.

somit:
<u>Beweis:</u> <u>Anfangsschritt:</u> $\tau = x$. $(\sigma, \xi, \eta$ beliebig$)$, $\sigma\xi = x\eta$

σ beginnt nicht mit einem Funktionszeichen.
also: σ ist eine Variable (Satz 1), $\sigma = x$, $\xi = \eta$

<u>Induktionsschritt:</u> Sei $\tau = f\tau_1 \ldots \tau_{r(f)}$.
Es gelte $\mathfrak{L}(\tau_1), \ldots, \mathfrak{L}(\tau_{r(f)})$.

$$\sigma\xi = f\tau_1....\tau_{r(f)}\eta \Rightarrow \sigma = f\sigma_1...\sigma_{r(f)} \quad \text{(Satz 1)}$$

$$f\sigma_1...\sigma_{r(f)}\xi = f\tau_1....\tau_{r(f)}\eta$$

$$\Rightarrow \sigma_1...\sigma_{r(f)}\xi = \tau_1....\tau_{r(f)}\eta$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \tau_1 \text{ und } \sigma_2...\sigma_{r(f)}\xi = \tau_2...\tau_{r(f)}\eta$$

(wegen $\mathscr{L}g(\tau_1)$) etc.

$$\Rightarrow \sigma_2 = \tau_2, ..., \sigma_{r(f)} = \tau_{r(f)}, \ \xi = \eta \quad \text{(wegen } \mathscr{L}g(\tau_{r(f)})\text{)}$$

$$\Rightarrow \sigma = \tau.$$

Satz 3: Wenn $f\sigma_1....\sigma_{r(f)} = g\tau_1....\tau_{r(g)}$,
$f,g \in \mathfrak{F}$, σ_ρ, τ_ρ Terme, so
$f=g$, $\sigma_1 = \tau_1$, ..., $\sigma_{r(f)} = \tau_{r(f)}$

Termaufbau (zerlegung in Bestandteile) monotektonisch.

Zum Begriff momotektonisch:

Eine formalisierte Sprache L heißt momotektonisch, wenn sich in L ein Term bzw. eine Formel auf höchstens eine Weise aus einfacheren Termen bzw. einfacheren Formeln aufbauen läßt.

Def.: α ist eine Formel :<=> Es gibt eine endliche Folge $(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ von Zeichenreihen, so daß $\zeta_n = \alpha$ und für jedes ν mit $1 \le \nu \le n$ gilt:

ζ_ν ist eine Primformel (F1)

oder ζ_ν entsteht aus früheren Gliedern der Folge mittels F2.

Satz: Hierbei ist jedes ζ_ν eine Formel.

Es gelten F1, F2 als Sätze über Formeln.
Es gelten T1, T2 als Sätze über Terme.

Induktionsprinzip (für Beweise durch Induktion über den Formelaufbau):

Um zu beweisen, daß eine Behauptung $\mathscr{B}(\alpha)$ für jede Formel α gilt, genügt es zu zeigen:

(1) Es gilt $\mathscr{B}(\alpha)$ für jede Primformel α .

(2) Für beliebige Formeln α, β und jedes $x \in \mathcal{V}$:
Wenn $\mathscr{B}(\alpha)$ und $\mathscr{B}(\beta)$, so gilt auch:
$\mathscr{B}(\neg\alpha)$, $\mathscr{B}(\alpha\wedge\beta)$, $\mathscr{B}(\alpha\vee\beta)$, $\mathscr{B}(\alpha\rightarrow\beta)$, $\mathscr{B}(\alpha\leftrightarrow\beta)$
$\mathscr{B}(\forall x\alpha)$, $\mathscr{B}(\exists x\alpha)$.

Satz 1': Für jede Formel α gilt: α ist Primformel oder
es gibt eine Formel γ mit $\alpha = \neg\gamma$
es gibt Formeln γ , δ mit $\alpha = (\gamma\wedge\delta)$
$\alpha = (\gamma\vee\delta)$
$\alpha = (\gamma\rightarrow\delta)$
$\alpha = (\gamma\leftrightarrow\delta)$
es gibt eine Variable x und eine Formel γ mit: $\alpha = \forall x\gamma$
" " " " x " " " " " : $\alpha = \exists x\gamma$

Satz 2': Eine Formel kann nicht echtes Anfangsstück einer anderen Formel sein.

Beweis analog zu Satz 2 (siehe Übungen).

Satz 3': Die Darstellung einer Formel ist eindeutig.
(es gibt genau eine Folge, so daß ....)

Für Satz 3 und 3' gilt: Term- und Formelaufbau sind monotektonisch.

Entscheidungsverfahren für die Formeleigenschaft (Termeigenschaft):

Es gibt ein Verfahren, mit dem man **von jeder** Zeichenreihe ζ, die der Voraussetzung (*) genügt, feststellen kann, ob sie eine Formel (bzw. ein Term) ist.

Vor.(*): (einschränkend): ζ geg. in der Form $\upsilon_1 \dots \upsilon_n$ (υ_ν Grundzeichen). Für jedes ν:

υ_ν ist $\underbrace{\text{Variable}}$ oder υ_ν ist $\underbrace{\text{Funktionszeichen}}$ mit $\underbrace{r(\upsilon_\nu)}$

(soll feststellbar sein)

oder υ_ν $\underbrace{\text{Relationszeichen}}$ mit $\underbrace{r(\upsilon_\nu)}$

(soll feststellbar sein)

oder $\upsilon_\nu = \doteq\underbrace{, \neg, \quad , \quad , \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \ ,(,}\ ).$

(soll feststellbar sein)

für Terme:

Beispiel: klassische Prädikatenlogik (hier spielen die Stellenindices die Hauptrolle).

effektives Verfahren:

$$\zeta = f^3 f_o^2 v_o v_o f^3 f^o f_1^2 v_o f^1 v_1 v_1 f_o^2 v_1 v_o$$

ξ ist ein Term

$$g(\nu) = -2 -1 \ 1 \ 1 -2 \ 1 -1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 -1 \ 1 \ 1$$

$$s(\nu) = 1 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 4 \ 3 \ 4 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1$$

mit

$$g(\nu) = \begin{cases} 1 \text{ falls } \upsilon_\nu \text{ Variable} \\ -(m-1), \text{ falls } \upsilon_\nu \text{ m-stelliges Funktionszeichen.} \end{cases}$$

$$s(\nu) = \sum_{\iota=\nu}^{n} g(\iota)$$

Satz: ζ ist ein Term gdw gilt: $s(1) = 1$ und für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq n$ ist $s(\nu) \geq 1$

Beweis siehe Übungen.

Für Formeln existiert ein ähnliches Entscheidungsverfahren. Hierzu:

Oft ist in der Prädikatenlogik auch die "polnische Notation" (nach Lukasiewicz) gebräuchlich:

$N\alpha$	statt	$\neg\alpha$
$K\alpha\beta$	"	$(\alpha\wedge\beta)$
$A\alpha\beta$	"	$(\alpha\vee\beta)$
$C\alpha\beta$	"	$(\alpha\to\beta)$
$E\alpha\beta$	"	$(\alpha\leftrightarrow\beta)$

Konvention über das Weglassen von Klammern:
(Abkürzung für Formeln im obigen Sinne)

a. Die Außenklammern werden weggelassen
b. $\leftrightarrow$ trennt stärker als $\to$
c. $\to$ trennt stärker als $\vee$
d. $\vee$ trennt stärker als $\wedge$
e. Punkte als Trennzeichen (z.B. $\to.$, $.\!\to\!.$, $\wedge.$): Ein mit mehr Punkten versehener Junktor trennt stärker als ein mit weniger Punkten versehener
f. Linksklammerung bei $\wedge, \vee$:

$$\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3\wedge\alpha_4\ldots\wedge\alpha_n \quad \text{für} \quad ((\ldots((\alpha_1\wedge\alpha_2)\wedge\alpha_3)\ldots)\wedge\alpha_n)$$

Beispiel: $\alpha \to \beta .\!\to\!. \alpha \to \gamma \to. \alpha \to \beta\wedge\gamma$ für $((\alpha \to \beta)\to((\alpha\to\gamma)\to(\alpha\to(\beta\wedge\gamma))))$

$\alpha \wedge \beta$ Abk. für $(\alpha\wedge\beta)$
$\forall x\alpha\wedge\beta$ Abk. für $(\forall x\alpha)\wedge\beta$

Freie Variablen:

$x \notin Fr(\alpha) \overset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ x ist gebunden $\vee$ x kommt in α nicht vor
x kommt nicht in α vor $\Longrightarrow$ $x \notin Fr(\alpha)$

Def.: Die Menge der freien Variablen von α: $Fr(\alpha)$ wird induktiv definiert:

(1) Wenn α Primformel, so ist $Fr(\alpha)$ die Menge der Variablen, die als Grundzeichen in α vorkommen.

(2) $Fr(\neg\alpha) = Fr(\alpha)$; $Fr(\forall x\alpha) = Fr(\alpha) - \{x\}$.
$Fr(\alpha\wedge\beta) = Fr(\alpha)\cup Fr(\beta)$, $Fr(\exists x\alpha) =$ " .
$\vee$ "
$\to$ "
$\leftrightarrow$ "

Beispiel: $\exists z\, \overset{\downarrow}{x}+\underset{\uparrow}{z}\doteq\overset{\downarrow}{y} \wedge \forall y(1<\underset{\uparrow}{y}\wedge\underset{\uparrow}{y}<\overset{\downarrow}{x}\rightarrow\neg\exists z\underset{\uparrow}{y}.\underset{\uparrow}{z}\doteq\overset{\downarrow}{x})$ ↓ freie Variablen ↑ gebundene Variablen (quantif

"$(x\leq y)$" "x ist Primzahl" (Formalisierung von...)

wenn $x\neq 0 \vee x\neq 1$ ist

der Wirkungsbereich von z in α (da eine Formel nicht echtes Anfangsstück einer anderen Formel sein kann). ?

Def.: α ist eine Aussage :<≡> $Fr(\alpha) = \emptyset$ Aussage; abgeschl. Formel; Sentence

(d.h. α hat keine freien Variablen).

x kommt frei vor in α :<≡> $x \in Fr(\alpha)$

Sei $L = (\mathfrak{F},\mathfrak{R},r)$, sei $|\mathfrak{M}|$ die Mächtigkeit einer Menge $\mathfrak{M}$.

Satz: Wenn $|\mathfrak{F}| = k$, $|\mathfrak{R}| = l$, dann ist $|Tm_L| = \max(\aleph_0,k)$;
$|Fm_L| = \max(\aleph_0,k,l)$

wobei $\aleph_0 :=$ Mächtigkeit der natürlichen Zahlen.
Kardinalzahl
Anzahl

Fortsetzung von § 2

Der Wahrheitswert einer Formel hängt nur davon ab, wie ihre freien Variablen belegt sind und wie die in ihr vorkommenden Funktions- und Relationszeichen interpretiert sind.

Präzisierung:

Koinzidenztheorem: Sei $\alpha \in Fml_L$

Vor.: (1) $U_{\mathfrak{A}_1} = U_{\mathfrak{A}_2}$

(2) $f_{\mathfrak{A}_1} = f_{\mathfrak{A}_2}$ für jedes in α vorkommende f.

(3) $R_{\mathfrak{A}_1} = R_{\mathfrak{A}_2}$ für jedes in α vorkommende R.

(4) $h_1(x) = h_2(x)$ für jedes $x \in Fr(\alpha)$

Beh.: $W_{\mathfrak{A}_1}(\alpha,h_1) = W_{\mathfrak{A}_2}(\alpha,h_2)$

zur Vereinfachung des Beweises:

Lemma für Terme: Vor.: (1) wie oben
(2) " " aber: für jedes in τ vork. f.
(4) " " " : für jede in τ vork. Variable

Beh.: $w_{\mathfrak{A}_1}(\tau,h_1) = w_{\mathfrak{A}_2}(\tau,h_2)$

Beweis induktiv über τ (leicht durchzuführen).

Wo wird Hilfssatz gebraucht (Lemma für Terme)

damit:

Beweis des Koinzidenztheorems:

(induktiv über α) α Primformel

für $\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ sehr einfach

für $\{\forall,\exists\}$: Gelte die Voraussetzung für $\forall x\alpha$; insbesondere (4),

$h_1(z) = h_2(z)$ für jedes $z \in Fr(\forall x\alpha)$. $=$ ~~$Fr(\forall x\alpha)$~~ $Fr(\alpha) - \{x\}$

$h_{1x}^{x}(z) = h_{2x}^{x}(z)$ für jedes $z \in Fr(\alpha)$.

nach Induktionsvoraussetzung:

$$W_{\mathfrak{A}_1}(\alpha, h_{1x}^{x}) = W_{\mathfrak{A}_2}(\alpha, h_{2x}^{x}) \qquad \text{für jedes } x \in U_{\mathfrak{A}_1} (= U_{\mathfrak{A}_2})$$

$$\Rightarrow \min_{x \in U_{\mathfrak{A}_1}} \ldots = \min_{x \in U_{\mathfrak{A}_2}} \ldots$$

entsprechend für $\exists$

$$\Rightarrow W(\underset{\exists}{\forall} x\alpha, h_1) = W(\underset{\exists}{\forall} x\alpha, h_2)$$

entsprechend

Definition: α ist eine wahre Aussage über die Struktur $\mathfrak{A}$

:<≡> α ist eine Aussage und $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$.

α ist eine falsche Aussage über die Struktur $\mathfrak{A}$

:<≡> α ist eine Aussage .... und $\models_{\mathfrak{A}} \neg\alpha$

Das hängt nicht von einer Belegung ab (nach Koinzidenztheorem), da $Fr(\alpha) = \emptyset$.

Satz: (Satz von der Zweiwertigkeit)

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Definition: Sei Σ eine beliebige Menge von Formeln ($\Sigma \subseteq Fml_L$).
Sei $\mathfrak{A}$ Struktur für L. Dann ist

$\mathfrak{A}$ ein Modell von Σ (in L)

$\mathfrak{A} \operatorname{Mod}_L \Sigma$:<≡> Für jedes $\alpha \in \Sigma$ ist $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$.

Beispiel: Σ Menge der Körperaxiome.

siehe links

$\emptyset \models \alpha$ d.h. für jedes $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}$ mod $\emptyset$ ist $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$. Da aber für alle $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A}$ mod $\emptyset$ gilt: $\models \alpha$

belib. $\alpha \in Fml_L$

Definition: Aus Σ folgt α $(\Sigma \models \alpha) :\Leftrightarrow$ α ist gültig in jedem Modell von Σ.

(oder : für jedes $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \mathrm{Mod} \Sigma$ ist $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$)

(z.B. α ist gültig in jedem Körper, jeder Gruppe etc.)

seite 33 Seite 37

Satz: Eine Formel α ist gültig in $\mathfrak{A}$: $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$ gdw $\models_{\mathfrak{A}} \forall x \alpha$

(z.B. $\forall x \forall y \forall z (x+(y+z) \doteq (x+y)+z)$).

$\overset{?}{\models_{\mathfrak{A}}} \forall x \alpha \leftrightarrow \alpha$ auch ohne $\mathfrak{A}$? siehe Rückseite

Beweis: $h \; \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \forall x \alpha$ gdw für jedes $\mathfrak{x} \in U_{\mathfrak{A}}$: $h^{\mathfrak{x}}_{x} \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha$.

(2) Für jedes h " gdw für jedes h, für jedes $\mathfrak{x} \in U_{\mathfrak{A}}$: $h^{\mathfrak{x}}_{x} \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha$

(3) gdw für jedes h: $h \; \mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha$.

($\Leftarrow$): h beliebig; $\mathfrak{x} := h(x)$, $h = h^{\mathfrak{x}}_{x}$

Definition: α^{*} ist eine^{+} GENERALISIERTE von $\alpha :\Leftrightarrow \alpha^{*} = \forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha$,

① wobei $Fr(\alpha) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Satz $\models_{\mathfrak{A}} \alpha^{*}$ gdw $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$

(+: wegen unbestimmter Reihenfolge der x_i).

Definition: Ist Σ eine beliebige Menge von ~~Ausdrücken~~ Formeln (irgendeiner Sprache L), so bedeutet $L(\Sigma) = \mathring{\Sigma}$ die Sprache, die nur mit denjenigen Konstanten aufgebaut ist, die in (Ausdrücken von) Σ vorkommen. $\mathring{\Sigma}$ ist also die Kleinste Sprache, die Σ umfaßt. (L gebildet mit den Funktions- und Relationszeichen, die in Σ vorkommen).

Definition: Die Folgerungsmenge von Σ in der Sprache L bezeichnen wir mit $Cn_L(\Sigma) :\Leftrightarrow \{\alpha \mid \alpha \in Fml_L \text{ und } \Sigma \models \alpha \}$.
Die Folgerungsmenge von Σ $Cn(\Sigma) := Cn_{\mathring{\Sigma}}(\Sigma)$

Satz: Cn_L ist ein HÜLLENOPERATOR auf Fml_L, d.h. für bel. $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma \subseteq Fml_L$:

(i) $\Sigma \subseteq Cn_L(\Sigma)$ ("Extensivität")

(ii) Wenn $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, so $Cn_L(\Sigma_1) \subseteq Cn_L(\Sigma_2)$ ("Monotonie")

(iii) $Cn_L(Cn_L(\Sigma)) \subseteq Cn_L(\Sigma)$ ($\supseteq$ gilt nach(i)) ("Abgeschlossenheit
also Gleichheit)

Dazu genügt zu zeigen (s.S.17):

Satz: $\Sigma \models \forall x \forall y \; x = y$ und $\Sigma \models \neg \forall x \forall y \; x = y$
nicht gültig nicht gültig

Lemma: (i) Wenn $\alpha \in \Sigma$, so $\Sigma \models \alpha$

(ii) Wenn $\mathfrak{A}\,\mathrm{Mod}_L \Sigma_2$ und $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, so $\mathfrak{A}\,\mathrm{Mod}_L \Sigma_1$.

(iii) Wenn $\mathfrak{A}\,\mathrm{Mod}\Sigma$, so $\mathfrak{A}\,\mathrm{Mod}\ Cn_L(\Sigma)$.

$Cn(\Sigma) := Cn_{L(\Sigma)}(\Sigma)$ $Cn_{L(\Sigma_1)}(\Sigma_1) \subseteq Cn_{L(\Sigma_2)}(\Sigma_2)$

analog Sätze für Cn.

$Cn_{L(Cn_{L(\Sigma)}(\Sigma))}(Cn_{L(\Sigma)}(\Sigma)) \subseteq Cn_{L(\Sigma)}(\Sigma)$

Definition: Eine Menge T von Formeln heiße eine THEORIE siehe Rückseite
gdw $Cn(T) = T$.
(Theorie (L,T), L-Satzmenge, T-Sprache der Theorie)

Angabe der Sprache ist jedoch entbehrlich nach folgendem Satz:

Satz: $Cn_L(T) = T$ gdw T ist Theorie und $Fml_L = \mathring{T}$.

Beweis: (→) sehr einfach

(←) z.z.: jedes Funktions- und Relationszeichen kommt vor in $Cn_L(T)$.

$R \in \mathfrak{R}$: $\alpha = Rx_1 \ldots x_{r(R)} \vee \neg Rx_1, \ldots x_{r(R)}$ $(\models \alpha)$

$f \in \mathfrak{F}$: $\alpha = fx_1 \ldots x_{r(f)} \doteq fx_1 \ldots x_{r(f)}$

$(\Rightarrow \alpha \in Cn_L \Rightarrow \models \alpha)$.

Beispiele für Theorien:

1) L, Σ bel.: $T = Cn_L(\Sigma)$ ist Theorie, axiomatisch aufgebaut auf Σ.

Σ heißt ein Axiomensystem für T

z.z.: $Cn_L(T) = T$
$Cn_L(Cn_L(\Sigma)) = Cn_L(\Sigma)$

2) Geg.: bel. Klasse K von Strukturen für L.
Die Theorie dieser Klasse: $Th(K) := \{\alpha \mid \text{Für jedes } \mathfrak{A} \in K \text{ ist } \models_{\mathfrak{A}} \alpha)$
(s. Übungen) ($\Rightarrow$Folgerungsmenge = Th(K)).

3) Spezialfall von 2): Geg. $\mathfrak{A}$ bel.; $K = \{\mathfrak{A}\}$
Theorie dieser Struktur: $Th(\mathfrak{A}) := \{\alpha \mid \models_{\mathfrak{A}} \alpha\}$.

4) Spezialfall von 1): $(\Sigma = \emptyset)$
$Cn_L(\emptyset)$ = Die Menge der Sätze der Logik (Prädikatenlogik der 1. Stufe in der Sprache L.) ($\Rightarrow$ Jede Struktur ist Modell der leeren Menge).

("Satz") $\emptyset \models \alpha$ gdw $\models \alpha$.

Definition: Seien T_1, T_2 Theorien,

T_1 ist Untertheorie von T_2 :<≡> $T_1 \subseteq T_2$.

oder Erweiterung

T1 ist Obertheorie von T_2 :<≡> $T_1 \supseteq T_2$.

Erweiterung: Hinzunahme von Axiomen

endliche Erweiterung: Hinzunahme von endlich vielen Axiomen.

Definition: T_2 ist endliche Erweiterung von T_1 :<≡>

Formelmenge

es ex. eine endliche Ausdrucksmenge Γ: $T_2 = Cn(T_1 \cup \Gamma)$.

kleinste Theorie, die $T_1 \cup \Gamma$ umfaßt

Definition: T_2 ist einfache Erweiterung von T_1 :<≡>

es ex. ein Ausdruck α : $T_2 = Cn(T_1 \cup \{\alpha\})$.

Gleichwertig: $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$

3. Beweisbarkeit (Syntax) für Sprachen im Rahmen der Prädikatenlogik der 1. Stufe

(Beweis: Umformung aufgrund anerkannter Regeln).

Beweisbarkeitsbegriff (festgelegt durch logische Axiome und Schlußregeln)

Es wird gezeigt werden, daß er mit dem Folgerungsbegriff gleichwertig ist

Logische Axiome:

a) Aussagenlogische Axiome: ($\alpha, \beta, \gamma \in Fml_L$)

A1: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ Schema der Prämissenbelastung

A2: $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow\!\cdot\ \alpha \rightarrow \beta$ Prämissenverschmelzung

A3: $\alpha \rightarrow \beta \cdot\!\rightarrow\!\cdot\ \beta \rightarrow \gamma \rightarrow\!\cdot\ \alpha \rightarrow \gamma$ Kettenschluß

A4: $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow\!\cdot\ \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ Kontraposition

A5: $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

A6: $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

A7: $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$

Formale, formalisierte Beweise:
Umformen auf Grund anerkannter Regeln (an Syntax gerichtet)

A 8: $\alpha \wedge \beta \to \beta$

A 9: $\alpha \to \beta \ \cdot\!\to\!\cdot\ \alpha \to \gamma \ \to\!\cdot\ \alpha \to \beta \wedge \gamma$

A10: $\alpha \to \alpha \vee \beta$

A11: $\beta \to \alpha \vee \beta$

A12: $\alpha \to \gamma \ \cdot\!\to\!\cdot\ \beta \to \gamma \ \to\!\cdot\ \alpha \vee \beta \to \gamma$

A13: $\alpha \leftrightarrow \beta \ \to\!\cdot\ \alpha \to \beta$

A14: $\alpha \leftrightarrow \beta \ \to\!\cdot\ \beta \to \alpha$

A15: $\alpha \to \beta \ \cdot\!\to\!\cdot\ \beta \to \alpha \ \to\!\cdot\ \alpha \leftrightarrow \beta$

b. Identitätstheoretische Axiome

($x, y, x_\rho \in \mathcal{V}$, bel.)

I 1: $x \doteq x$,

I 2: $x \doteq y \to fx_1 \ldots x_{\rho-1} x x_{\rho+1} \ldots x_{r(f)} = fx_1 \ldots x_{\rho-1} y x_{\rho+1} \ldots x_{r(f)}$
für alle $f \in \mathfrak{F}$, $1 \leq \rho \leq r(f)$,

I 3: $x \doteq y \to\!\cdot Rx_1 \ldots x_{\rho-1} x x_{\rho+1} \ldots x_{r(R)} \to Rx_1 \ldots x_{\rho-1} y x_{\rho+1} \ldots x_{r(R)}$
für alle $R \in \mathfrak{R}$, $1 \leq \rho \leq r(R)$,

I 4: $x \doteq y \to\!\cdot\ x \doteq z \to y \doteq z$.

Ax_L := Die Menge der (dieser) logischen Axiome in der Sprache L.

Satz: Für jedes $\alpha \in Ax_L$ ist $\models \alpha$ (α logisch gültig)
(Korrektheit der logischen Axiome).

Zum Beweis: Bsp. A 1.

z.z.: $W_{\mathfrak{A}}(\alpha \to (\beta \to \alpha),h) = W$ für jedes passende $\mathfrak{A}$,h.

1. Mit Wahrheitswerttabelle

2. (kürzer)

Annahme: $W_{\mathfrak{A}}(\underset{\textcircled{W}}{\alpha} \to \underset{F}{(\underset{W}{\beta} \to \underset{\textcircled{F}}{\alpha})},h) = F$ für gewisses $\mathfrak{A}$,h.

Schlußregeln: Die Schlußregeln sind Regeln, nach denen man in formalen Beweisen von Formeln $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ einer gewissen Form zu einer weiteren Formel δ übergehen kann.

Allgemeine Form der Schlußregeln:

$$\frac{\gamma_1,\dots,\gamma_n}{\delta}$$

für den hier betrachteten Beweisbarkeitsbegriff werden die folgenden Schlussregeln verwendet

Siehe Rückseite

1. Abtr $$\frac{\alpha \to \beta,\ \alpha}{\beta}$$ (Abtrennung, modus ponens)

2. Gv $$\frac{\alpha \to \beta}{\forall x\alpha \to \beta}$$ (vordere Generalisierung)

3. Ph $$\frac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \exists x\beta}$$ (hintere Partikularisierung)

4. Gh $$\frac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x\beta}$$ (hintere Generalisierung, falls $x \notin Fr(\alpha)$)

5. Pv $$\frac{\alpha \to \beta}{\exists x\alpha \to \beta}$$ (vordere Partikularisierung, falls $x \notin Fr(\beta)$)

6. Sb $$\frac{\alpha}{\beta}$$ falls $Subst_x^\tau \alpha\beta$ (Termeinsetzung, Substitution).

β entsteht aus α dadurch, daß für die Variable x der Term τ substituiert wird.

Die Präzisierung des Substitutionsbegriffs wird später nachgetragen. (s.S.22)

Beispiel für Sb: $\alpha = \neg x \doteq 0 \to \exists y\ x.y \doteq 1$

$\tau = z+7$

$\Rightarrow\ \beta = \neg z+7 \doteq 0 \to \exists y\ (z+7).y \doteq 1$.

$\models_R \alpha$

<u>Satz:</u> (von der Korrektheit der Schlußregeln)

Wenn δ aus $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ durch Anwendung einer Schlußregel entsteht und $\models_{\mathfrak{A}}\gamma_1,\dots,\models_{\mathfrak{A}}\gamma_n$ so ist auch $\models_{\mathfrak{A}}\delta$

<u>Beweise:</u> 1. <u>Abtr</u> Sei $\models_{\mathfrak{A}}\alpha\to\beta$, $\models_{\mathfrak{A}}\alpha$. z.z.: $\models_{\mathfrak{A}}\beta$

Sei h bel. über $\mathfrak{A}$

$W_{\mathfrak{A}}(\alpha\to\beta,h) = W$ $\qquad$ $W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h) = W$

$= \mathrm{seq}\,(W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h),W_{\mathfrak{A}}(\beta,h))$

$\Rightarrow W_{\mathfrak{A}}(\beta,h) = W \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}}\beta$

	W	F
W	Ⓦ	F

2. <u>Ph</u> Sei $\models_{\mathfrak{A}}\alpha\to\beta$. z.z.: $\models_{\mathfrak{A}}\alpha\to\exists x\beta$.

h $\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\alpha\to\beta$ $\qquad$ Sei h $\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\alpha$ z.z. h $\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\exists x\beta$.

d.h. Es gibt $x\in U_{\mathfrak{A}}$ mit $h^{x}_{x}\,\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\beta$

h $\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\beta$ $\qquad$ $x = h(x)$

3. <u>Gh</u> Sei $\models_{\mathfrak{A}}\alpha\to\beta$, $x\notin Fr(\alpha)$, z.z. $\models_{\mathfrak{A}}\alpha\to\forall x\beta$

Sei h bel. : z.z. h $\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\alpha\to\forall x\beta$

<u>Sei h $\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\alpha$</u> z.z. h $\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\forall x\beta$

Sei $x\in U_{\mathfrak{A}}$ bel. z.z. $h^{x}_{x}\,\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\beta$

— wegen $x\notin Fr(\alpha)$ (nach Koinz.th.)

Jede Bel. erfüllt also auch

$h^{x}_{x}\,\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\alpha\to\beta$ $\qquad$ $h^{x}_{x}\,\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\alpha$

$h^{x}_{x}\,\mathrm{Erf}_{\mathfrak{A}}\,\beta$

Zur Präzisierung des Substitutionsbegriffs:

Siehe S. 20

weitere Beispiele für Sb: $\alpha = \neg x \doteq 0 \to \exists y\; x \cdot y = 1$

2. $\mathrm{Subst}_{y}^{\tau}\alpha\beta$ gdw $\beta=\alpha$ (Da die Substitutionsregel korrekt werden soll, wird gefordert, daß eine Substitution nur für freie Variable erfolgt).

$^{1-y}/_{x}$

3. x, $\tau = 1-y$ $\quad \neg 1-y \doteq 0 \to \exists y(1-y).y \doteq 1$ nicht gültig in $\mathbb{R}$ da y schon in α vorkommt.

$\alpha \equiv \neg x \doteq 0 \to \exists y\, x.y = 1$

Grund: y aus τ wird durch $\exists y$ aus α gebunden (Variablenkonfusion). Substitution nicht ausführbar

Diesen anschaulichen Vorstellungen trägt die folgende Definition Rechnung:

Definition: Für Terme σ wird der daraus durch Substitution von τ für x enstehende Term $\mathrm{sub}_{x}^{\tau}\sigma$ induktiv definiert durch

$$\mathrm{sub}_{x}^{\tau}z = \begin{cases} \tau, & \text{falls } z=x \\ z, & \text{falls } z\neq x \end{cases}$$

$\mathrm{sub}_{x}^{\tau} z\, z$, wenn $z \neq x$
$\mathrm{sub}_{x}^{\tau} z\, \tau$, wenn $z = x$

$$\mathrm{sub}_{x}^{\tau}f\sigma_1\ldots\sigma_{r(f)} = f\mathrm{sub}_{x}^{\tau}\sigma_1\ldots\mathrm{sub}_{x}^{\tau}\sigma_{r(f)}.$$

Für Formeln werden folgende Regeln verwendet:

Regeln für $\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}$

a. Es ist $\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}\alpha\beta$, falls
$\alpha = R\sigma_1\ldots\sigma_{r(R)}$ und $\beta = R\mathrm{sub}_{x}^{\tau}\sigma_1\ldots\mathrm{sub}_{x}^{\tau}\sigma_{r(R)}$
oder
$\alpha = \sigma_1 \doteq \sigma_2$ und $\beta = \mathrm{sub}_{x}^{\tau}\sigma_1 \doteq \mathrm{sub}_{x}^{\tau}\sigma_2$

b. Wenn $\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}\alpha\beta$, so $\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}\neg\alpha\neg\beta$

c. Wenn $\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}\alpha\beta$ und $\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}\alpha'\beta'$, so
$\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}(\alpha\wedge\alpha')(\beta\wedge\beta')$ (analog für $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$)

d. Wenn $x\notin \mathrm{Fr}(\forall z\alpha)$, so $\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}\forall z\alpha\forall z\alpha$ (analog für $\exists$).
$\Rightarrow x \notin \mathrm{Fr}(\alpha)$

e. Wenn $x\in \mathrm{Fr}(\forall z\alpha)$, z nicht in τ und $\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}\alpha\beta$,
so $\mathrm{Subst}_{x}^{\tau}\forall z\alpha\forall z\beta$ (analog für $\exists$)

d. kann auch weggelassen werden, da e ~~auch~~ den Fall: z kommt in τ vor nicht behandelt.

z kommt in τ vor $\Rightarrow \mathrm{Subst}_{x}^{\tau}\forall z\alpha\ \forall z\alpha$

$\mathrm{Subst}^{\tau}_{x}\alpha\beta$ gdw das auf Grund von a) bis e) der Fall ist.

d.h., man definiert $\mathrm{Subst}^{\tau}_{x}$ als die kleinste zweistellige Relation zwischen Formeln mit den Eigenschaften a) bis e).

päzisere Charakterisierung:

$1 \leq \mu, \nu < \kappa$

$\mathrm{Subst}^{\tau}_{x}\alpha\beta$ gdw es gibt eine endliche Folge $((\alpha_1,\beta_1)\dots(\alpha_k,\beta_k$ von Paaren von Formeln, so daß $\alpha_k=\alpha$, $\beta_k=\beta$ und für jedes κ mit $1\leq\kappa\leq k$ gilt: Das Paar $(\alpha_\kappa,\beta_\kappa)$ ist von der in a) oder d) angegebenen Form oder es gibt Indizes μ,ν mit $1\leq\mu,\nu<\kappa$, so daß $(\alpha_\kappa,\beta_\kappa)$ aus (α_μ,β_μ) und eventuell (α_ν,β_ν) durch Anwendung einer der Regeln b),c) oder e) hervorgeht.

Satz: Für bel. x, τ, α, β ist nachprüfbar, ob $\mathrm{Subst}^{\tau}_{x}\alpha\beta$

Satz: Zu jedem α gibt es höchstens eine Formel β mit $\mathrm{Subst}^{\tau}_{x}\alpha\beta$
für gegebene x, τ

Bezeichnung: $\beta = \alpha^{x}/_{\tau}$ oder $\mathrm{Sub}^{\tau}_{x}\alpha$

Satz: Wenn $x \notin \mathrm{Fr}(\alpha)$, so $\alpha^{x}/_{\tau} = \alpha$

Satz 4 Falls y nicht in α, so existiert ein β mit $\mathrm{Subst}^{y}_{x}\alpha\beta$ und $\mathrm{Subst}^{x}_{y}\beta\alpha$.

Satz: ÜBERFÜHRUNGSTHEOREM

Wenn $\mathrm{Subst}^{\tau}_{x}\alpha\beta$ und $w_{\mathfrak{A}}(\tau,h) = t$, so $W_{\mathfrak{A}}(\beta,h) = W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h^{t}_{x})$.

Beweis: Durch Induktion über den Aufbau von σ ergibt sich zunächst:

vergleiche Hermes

Lemma (für Terme): Wenn $w_{\mathfrak{A}}(\tau,h)=t$, so $w_{\mathfrak{A}}(\mathrm{sub}^{\tau}_{x}\sigma,h) = w_{\mathfrak{A}}(\sigma,h^{t}_{x})$

Gleichwertig: $\mathrm{Subst}^{\tau}_{x}$ ist die kleinste 2-stellige Relation zwischen Formeln mit den Eigenschaften a) bis e)

Satz: (für Sprachen mit Bezeichnungssystem):
Für bel. geg. x, τ, α, β ist nachprüfbar, ob $\mathrm{Subst}^{\tau}_{x}\alpha\beta$

gegenbeispiel:

$\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, \cdot)$ $\alpha \equiv (-1)^n = 1$, $\beta \equiv (-1)^{2m}$

$\text{subst}_n^{2m}\, \alpha\beta \quad \models_{\mathfrak{A}} \beta \quad \not\Longrightarrow \quad \models_{\mathfrak{A}} \alpha$

$W_{\mathfrak{A}}(\alpha, h) = W$ für alle Belegungen

$\Longrightarrow W_{\mathfrak{A}}(\alpha, h^{\tau}_{x}) = W$

Satz: (Korrektheit der Termeinsetzung)

Wenn $\text{Subst}^{\tau}_{x}\alpha\beta$ und $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$, $\overset{\not\Leftarrow}{\text{so}}$ $\models_{\mathfrak{A}} \beta$.

Umkehrung gilt nicht

Siehe oben Gegenbeispiel

Beweis: Sei h eine bel. Belegung über $\mathfrak{A}$. $t := w_{\mathfrak{A}}(\tau, h)$

nach dem Überführungstheorem:

$W_{\mathfrak{A}}(\beta, h) = W_{\mathfrak{A}}(\alpha, h^{t}_{x}) = W$ (wegen $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$).

Damit ist der Satz über die Korrektheit der Schlußregeln bewiesen.
Die Termeinsetzungsrelation ist entscheidbar.

Für Sprachen mit Bezeichnungssystem gilt außerdem. Die Termeinsetzungsrelation ist entscheidbar, d.h. für bel. α, β ist nachprüfbar ob β aus α durch Termeinsetzung entsteht.

Die übrigen Schlußregeln (Relationen) sind trivialerweise erfüllt.

Definition: Aus Σ ist α (in der Sprache L) beweisbar (ableitbar, herleitbar):

$\Sigma \vdash_L \alpha$ (kurz: $\Sigma \vdash \alpha$) :<≡> Es gibt eine endliche Folge $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ von Formeln von L (aus Fml_L) so daß $\alpha_k = \alpha$ und für jedes κ mit $1 \leq \kappa \leq k$ gilt: α_κ ist ein logisches Axiom oder ein Element von Σ oder α_κ entsteht aus früheren Gliedern der Folge durch Anwendung einer Schlußregel.

Eine solche Folge heißt formaler Beweis von α oder eine Beweisfolge für α aus Σ .

α ist logisch beweisbar $\vdash \alpha$:<≡> $\emptyset \vdash \alpha$.

für Sprachen mit Bezeichnungssystem gilt:

Beweise sind nachprüfbar, falls Σ entscheidbar (rekursiv).

Beweisbarkeit ist i. allgemeinen nicht nachprüfbar.

Satz. Es gilt nicht $\vdash \alpha \longrightarrow \alpha^{\tau}/_{x}$

<u>Satz:</u> (Korrektheit des Beweisbarkeitsbegriffs):

S24 S.16

Wenn $\Sigma \vdash \alpha$, so $\Sigma \models \alpha$.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathfrak{A}$ bel. Modell von Σ . Z.z. $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$
Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ Beweis für α aus Σ .
Dann ist $\models_{\mathfrak{A}} \alpha_\kappa$ $(\kappa = 1, \dots, k)$ (ind. über k). kappa

<u>Satz:</u> GÖDELSCHER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ

Vollständigkeit des Beweisbarkeitsbegriffs
Vollständigkeit des Prädikatenkalküls erster Stufe
(Gödel 1930):

Wenn $\Sigma \models \alpha$, so $\Sigma \vdash \alpha$.

(Umkehrung des Satzes von der Korrektheit des Beweisbarkeitsbegriffs s.o.)

Der Beweis des Satzes erfolgt später (s.S.45 ff)

Es gibt keinen entsprechenden Beweisbarkeitsbegriff für höhere Stufen mit nachprüfbaren Beweisen, entscheidbaren Axiomen und Schlußregeln.

<u>Vorbereitungen:</u>

<u>Definition:</u> Die Menge der aus Σ (in L) beweisbaren Formeln

$$Bw_L(\Sigma) := \{\alpha \mid \Sigma \vdash_L \alpha\} .$$

<u>Satz:</u> Bw_L ist ein Hüllenoperator.

4 Ableitungen in der Prädikatenlogik (formale Beweise)

(Nebenresultat: Zusammenstellung von Sätzen der Prädikatenlogik($\vdash \alpha$)).

A1 $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
A2 $\alpha \to (\alpha \to \beta) \to\cdot\ \alpha \to \beta$
A3 $\alpha \to \beta \ \cdot\!\to\!\cdot\ \beta \to \gamma \to\cdot\ \alpha \to \gamma$

Abtr $\dfrac{\alpha \to \beta,\ \alpha}{\beta}$

<u>Sätze:</u> Die logischen Axiome sind beweisbar.

Aus den Schlußregeln ergeben sich entsprechende Sätze:

$$\frac{\text{wenn}\quad \Sigma\vdash\alpha\to\beta \qquad \text{und } \Sigma\vdash\alpha}{\text{so}\quad \Sigma\vdash\beta}$$

$$\frac{\text{wenn}\quad \Sigma\vdash\alpha\to\beta \qquad \text{und } x \notin Fr(\beta)}{\text{so}\quad \Sigma\vdash \forall x\alpha\to\beta}$$

...

Aus Axiomen mit →, ... ergeben sich entsprechende Sätze mittels Abtr. (metasprachl. Abtrennung; hat mit modus ponens in der Objektsprache nichts zu tun wie in die natürliche Sprache
z.B.

Satz: Wenn $\Sigma\vdash\alpha$, so $\Sigma\vdash\beta\to\alpha$

Beweis:
$$\begin{array}{ll} \Sigma\vdash\alpha\to(\beta\to\alpha) & \text{(A1)} \\ \Sigma\vdash\alpha & \\ \hline \Sigma\vdash\beta\to\alpha & \end{array}$$

Abgekürzte Schreibweise:

$$\frac{\alpha}{\beta\to\alpha}$$
(Regel A1 (kurz RA1))
("abgeleitete Schlußregel")

Aus A3: $\dfrac{\text{Wenn}\quad \Sigma\vdash\alpha\to\beta}{\text{so}\quad \Sigma\vdash\beta\to\gamma\to\cdot\,\alpha\to\gamma}$ abgekürzt: $\dfrac{\alpha\to\beta}{\beta\to\gamma\to\cdot\,\alpha\to\gamma}$ (RA3)

durch nochmalige Abtrennung v. RA3

$$\frac{\alpha\to\beta\ ,\ \beta\to\gamma}{\alpha\to\gamma}$$ auch $$\begin{array}{c} \alpha\to\beta \\ \beta\to\gamma \\ \hline \alpha\to\gamma \end{array}$$

(R'A3)
Regel vom Kettenschluß.

Erreicht: Abl. aus A1 bis A3 mittels Abtr.
A1 --
A2 --
A3

Satz:(S1): $\vdash\alpha\to\alpha$ (Selbstimplikation)

Beweis:
$$\begin{array}{lll} \text{A1 mit} & \alpha=\beta : & \alpha\to(\alpha\to\alpha) \\ \text{A2 \quad "} & \text{"} \quad : & \alpha\to(\alpha\to\alpha)\to\cdot\,\alpha\to\alpha \\ \hline \text{} & \text{Abtr} & \alpha\to\alpha \end{array}$$

Bez. Prinzip:

R An für Regel, entstanden durch einmalige Abtrennung aus An / Sn
R Sn
R' An — zweimalige
R' Sn

Satz (S4): $\vdash\alpha \to (\beta \to \gamma) \to\cdot\ \beta \to (\alpha \to \gamma)$ Satz der Prämissenvertauschung (Lukasiewicz)

Beweis: günstige Form von A3:

$$\vdash\underline{\alpha \to (\beta \to \gamma)}\ \cdot\!\to\!\cdot\ \underbrace{(\beta \to \gamma) \to \gamma}\ \to\cdot\ \underline{\alpha \to \gamma} \qquad (A3)$$

$$\overline{\alpha \to (\beta \to \gamma)}\ \cdot\!\to\!\cdot\ \quad \beta \quad \to\cdot\ \overline{\alpha \to \gamma} \qquad \text{(gewünscht)}$$

genügt z.z.:

(S3) $\vdash\beta \to\cdot (\beta \to \gamma) \to \gamma$ (1) und (2) Regel R1: $\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \to (\beta \to \gamma)\\ \delta \to \beta\end{array}}{\alpha \to (\delta \to \gamma)}$ (R1)

zu (2): Aus $\delta \to \beta$ nach RA3: $\beta \to \gamma \to\cdot\ \delta \to \gamma$

Aus $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ und ∴ nach R'A3

$\Rightarrow$ $\alpha \to (\delta \to \gamma)$

zu (1): Es ist $\vdash\beta \to\cdot\ (\beta \to \gamma) \to \beta$ (A1)

Siehe links oben ?

es genügt: (S2) $\vdash(\beta \to \gamma) \to \beta \to\cdot\ (\beta \to \gamma) \to \gamma$ (nach R'A3)

Es ist $\vdash(\beta \to \gamma) \to \beta\ \cdot\!\to\!\cdot\ \underline{\beta \to \gamma \to\cdot\ (\beta \to \gamma) \to \gamma}$ (A3)

$\vdash\underline{\beta \to \gamma \to\cdot\ (\beta \to \gamma) \to \gamma}\ \cdot\!\to\!\cdot\ (\beta \to \gamma) \to \gamma$ (A2)

$\Rightarrow$ nach R'A3: $\vdash(\beta \to \gamma) \to \beta \to\cdot\ (\beta \to \gamma) \to \gamma$

? damit nach A3 (S5) $\vdash\beta\to\gamma .\to. \alpha\to\beta .\to. \alpha\to\gamma$

Regel (RS4) $\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$ (RS5) $\dfrac{\beta \to \gamma}{\alpha \to \beta \to\cdot\ \alpha \to \gamma}$

? (S5) Damit nach A3: $\vdash\beta \to \gamma\ \cdot\!\to\!\cdot\ \alpha \to \beta\ \cdot\!\to\ \alpha \to \gamma$ (invertierter Kettenschluß)

(S6) $\vdash\underline{\alpha \to (\beta \to \gamma)}\ \cdot\!\to\!\cdot\ \alpha \to \beta \to\cdot\ \alpha \to \gamma$ (Fregescher Kettenschluß)

Bew.: Es genügt: $\vdash\overline{\beta \to (\alpha \to \gamma)}\ \cdot\!\to\!\cdot\ \alpha \to \beta \to\cdot\ \underline{\alpha \to \gamma}$ (S4 und R'A3)

Es ist $\vdash\underline{\beta \to (\alpha \to \gamma)\ \cdot\!\to\!\cdot\ \alpha \to \beta \to\cdot\ \overline{\alpha \to (\alpha \to \gamma)}}$ (S5)

? nach RS5 (zweimal):

$\vdash\underline{\beta \to (\alpha \to \gamma)\ \cdot\!\to\!\cdot\ \alpha \to \beta\ \cdot\!\to \alpha \to (\alpha \to \gamma)}\ \cdot\!\to\!\cdot\cdot\ \beta \to (\alpha \to \gamma) \to\cdot\ \alpha \to \beta \to\cdot\ \alpha \to \gamma$

Abtr. $\vdash$ ....

$\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))$

Anmerkung: Aus A1, S6 ergeben sich mit Abtr auch A1 bis A3. (gleichwertiges Axiomensystem, ohne Beweis).

Satz (S7): $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta \wedge \alpha$

Bew.: $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$ (A8)

$\vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$ (A7)

Regel R'A9
$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \alpha \to \gamma\end{array}}{\alpha \to \beta \wedge \gamma}$$

nach R'A9 $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta \wedge \alpha$

Satz (S8): $\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha$

Bew.: $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta \wedge \alpha$ (R'A15)

$\vdash \beta \wedge \alpha \to \alpha \wedge \beta$

nach R'A15 $\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha$

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \beta \to \alpha\end{array}}{\alpha \leftrightarrow \beta}$$

<u>Satz (S9):</u> $\vdash \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

<u>Satz (S10):</u> $\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

1. Bew.: Es ist $\vdash \underbrace{\alpha \to \beta \vee \alpha}_{\text{A11 Abtr}} \bullet\!\to\!\bullet \underbrace{\beta \to \beta \vee \alpha}_{\text{A10 Abtr}} \to\bullet\ \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$ (A12)

2. Bew.: R'A12: $\begin{array}{c} \alpha \to \gamma \\ \beta \to \gamma \\ \hline \alpha \vee \beta \to \gamma \end{array}$ also genügt $\left\{ \begin{array}{ll} \vdash \alpha \to \beta \vee \alpha & (A11) \\ \vdash \beta \to \beta \vee \alpha & (A10) \end{array} \right.$

<u>Satz (S11):</u> $\vdash \alpha \vee \beta \leftrightarrow \beta \vee \alpha$ (Bew. mit R'A15 s.o.)

<u>Satz (S12):</u> $\vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ (s. Üb.)

insbesondere $\vdash \qquad \to$

$\vdash \qquad \leftarrow$

<u>Satz (S13):</u> $\vdash \alpha \to\bullet\ \beta \to \alpha \wedge \beta$ (s. Üb.)

<u>Satz (S14):</u> $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma) \to\bullet\ \alpha \wedge \beta \to \gamma$ Prämissenverbindung

<u>Bew.:</u> Wegen A7 $\alpha \wedge \beta \to \alpha$ und A8 $\alpha \wedge \beta \to \beta$ $\Big\}$ genügt (R2): $\begin{array}{l} \vdash \delta \to \alpha \\ \vdash \delta \to \beta \\ \hline \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma) \to\bullet\ \delta \to \gamma \end{array}$

zu R2: Erste Vor. ($\vdash \delta \to \alpha$) und RA3:

$\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma) \to\bullet\ \delta \to (\beta \to \gamma)$

$\vdash \delta \to (\beta \to \gamma) \to\bullet\ \beta \to (\delta \to \gamma)$ (S4)

Zweite Vor. ($\vdash \delta \to \beta$) und RA3:

$\vdash \beta \to (\delta \to \gamma) \to\bullet\ \delta \to (\delta \to \gamma)$

$\vdash \delta \to (\delta \to \gamma) \to\bullet\ \delta \to \gamma$ (A2)

$\Rightarrow$ $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma) \to\bullet\ \delta \to \gamma$ (R'A3 mehrmals)

<u>Satz (S15):</u> $\vdash \alpha \wedge \beta \to \gamma \to\bullet\ \alpha \to (\beta \to \gamma)$ Prämissenzerlegung

(Umkehrung von Satz S14)

<u>Bew.:</u> Nach RS4 genügt: $\vdash \alpha \bullet\!\to\!\bullet\ \alpha \wedge \beta \to \gamma \to\bullet\ \beta \to \gamma$

Es ist: $\vdash \beta \to \alpha \wedge \beta \bullet\!\to\!\bullet\ \alpha \wedge \beta \to \gamma \to\bullet\ \beta \to \gamma$ (A3)

$\vdash \alpha \to\bullet\ \beta \to \alpha \wedge \beta$ (S13) R'A3 anw.

<u>Regel</u>

$\dfrac{\alpha,\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$ denn $\alpha,\ \beta,\ \underbrace{\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)}_{\text{Satz S13}},\ \beta \to \alpha \wedge \beta,\ \alpha \wedge \beta$

Definition: α ist mit β <u>(syntaktisch) äquivalent</u> in bezug auf Σ :

$$\alpha \text{Äq}_{\Sigma} \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

syntaktisch

α ist mit β <u>logisch äquivalent</u>

$$\alpha \text{Äq} \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

α ist mit β <u>semantisch äquivalent</u> in bezug auf Σ

$$\alpha \text{Äqsm}_{\Sigma} \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad \Sigma \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$$

α impliziert β :

$$\alpha \text{Imp} \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

Satz (S16): $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \text{ Äq } \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ (aus S14, S15)

Satz (S17): $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \text{ Äq } (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

<u>Bew.:</u> ($\leftarrow$) einfach

$\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ (A9)

$\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \vee \gamma$

$\alpha \wedge \gamma \rightarrow \alpha$ mit R'A15

$\alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta \vee \gamma$

($\rightarrow$) genügt (nach S 16, RS4):

$\vdash \beta \vee \gamma \rightarrow\cdot\ \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

genügt(nach R'A12)

$$\left.\begin{array}{l} \vdash \beta \rightarrow\cdot\ \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \\ \vdash \gamma \rightarrow\cdot\ \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \end{array}\right\} \text{(einfach)}$$

siehe links

Satz (S18): $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \text{ Äq } (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

<u>Bew.:</u> ($\rightarrow$) einfach

($\leftarrow$) (nach S17) $\vdash (\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma) \rightarrow (\alpha\vee\beta)\wedge\alpha\vee(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma$

(nach R'A3 und R'A12) genügt siehe links

(1) $\vdash (\alpha\vee\beta)\wedge\alpha \rightarrow \alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$

(2) $\vdash (\alpha\vee\beta)\wedge\gamma \rightarrow \alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$

zu (2) genügt: $\vdash \alpha\vee\beta \rightarrow\cdot\ \gamma \rightarrow \alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$ (Prämissenvertauschung)

nach R'A12 genügt: $\left.\begin{array}{l} \vdash \alpha \rightarrow\cdot\ \gamma \rightarrow \alpha\vee(\beta\wedge\gamma) \\ \vdash \beta \rightarrow\cdot\ \gamma \rightarrow \alpha\vee(\beta\wedge\gamma) \end{array}\right\}$ einfach

(A10) $\vdash \alpha \rightarrow \alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$

(A1) $\vdash \alpha\vee(\beta\wedge\gamma) \rightarrow\cdot\ \gamma \rightarrow\cdot\ \alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$

R'A3 $\vdash \alpha \rightarrow\cdot\ \gamma \rightarrow \alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$

$\vdash \beta\wedge\gamma \rightarrow\cdot\ \alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$ A11

$\beta \rightarrow\cdot\ \gamma \rightarrow \alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$ Prämissenvert.

<u>Satz (S19):</u> $\alpha \wedge \alpha$ Äq α

<u>Satz (S20):</u> $\alpha \vee \alpha$ Äq α

<u>Satz (S21):</u> $\alpha \leftrightarrow \beta$ Äq $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

<u>Satz:</u> $Äq_{\Sigma}$ ist eine Äquivalenzrelation (damit auch Äq $(\Sigma=\emptyset)$).

<u>Bew.:</u> (R) $\Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha$ (nach S1, R'A15)

(T) z.z.: Wenn $\Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ ① und $\Sigma \vdash \beta \leftrightarrow \gamma$ ②, so $\Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$ ③

① $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ (A13) ② $\Sigma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ (A13) $\Rightarrow$ ③ $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ R'A3

(A14) Σ $\leftarrow$ $\leftarrow$ $\leftarrow$

(S) mit S 21, S8 und (T) sogar:

<u>Satz (S22):</u> $\alpha \leftrightarrow \beta$ Äq $\beta \leftrightarrow \alpha$

<u>Sätze für Negation:</u>

(A4): $\vdash \alpha \rightarrow \neg\beta \rightarrow\cdot\ \neg\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$

<u>Satz (S23):</u> $\vdash \alpha \rightarrow \neg\beta \rightarrow\cdot\ \beta \rightarrow \neg\alpha$ (nach R1) [illegible]

<u>Satz (S24):</u> $\vdash \neg\alpha \rightarrow \beta \rightarrow\cdot\ \neg\beta \rightarrow \alpha$ Kontrapositionssätze +(A4)

<u>Satz (S25):</u> $\vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\beta \rightarrow\cdot\ \beta \rightarrow \alpha$

A4

Anmerkung: Aus A1, A2, A3, (S25) ergeben sich mit Abtr A4 bis A6 (und umgekehrt). Anm.: A1 bis A6

<u>Satz (S26):</u> $\neg\neg\alpha$ Äq α

<u>Satz (S27):</u> $\neg(\alpha \wedge \beta)$ Äq $\neg\alpha \vee \neg\beta$ de Morgansche Regeln

<u>Satz (S28):</u> $\neg(\alpha \vee \beta)$ Äq $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ (früher: Petrus Hispanus)

$a \vee b \rightarrow c$ äq $(a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$

$a \rightarrow (b \rightarrow c)$ äq $(a \wedge b) \rightarrow c$

$(a \rightarrow b) \rightarrow c$ äq $(\neg a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$

$a \leftrightarrow b$ äq $(b \wedge a) \vee (\neg b \wedge \neg a)$

$(a \leftrightarrow b) \rightarrow c$ äq $(b \wedge a \rightarrow c \;\wedge\; (\neg b \wedge \neg a \rightarrow c)$

$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c$ äq $a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)$

nach R'A12 genügt

Bew. zu (S27): (←) $\vdash \neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$ und $\vdash \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$

nach RA4 genügt $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ $\quad\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$

(→) (nach RS 24) genügt: $\vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \alpha \wedge \beta$

nach R'A9 genügt $\left\{\begin{array}{l}\vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \alpha \\ \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \beta\end{array}\right.$ Uebersetzung

dazu genügt: $\left\{\begin{array}{ll}\vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta & \text{(A10)} \\ \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta & \text{(A11)}\end{array}\right.$

Bew. zu (S28) ähnlich.

Satz (S29): $\vdash \neg\alpha \rightarrow\cdot\ \underbrace{\alpha \rightarrow \beta}_{R}$

$\vdash \underbrace{\neg\alpha \rightarrow: (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)}_{(A1)} \rightarrow: \underbrace{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)}_{(S.25)} \rightarrow: \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Bew.: genügt $\vdash \neg\alpha \rightarrow\cdot\ \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ (A1)

Satz (S30): $\vdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$

$\vdash \neg\alpha \rightarrow\cdot\ \alpha \rightarrow \beta \rightarrow: \neg\alpha \wedge \alpha \rightarrow \beta$ (S.14)

Satz (S31): $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (Satz vom ausgeschl. Widerspruch)

Bew.: aus S30 durch Kontraposition

$\vdash \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ $\qquad\beta$ wählen mit $\vdash \neg\beta$ (A1)

z.B. $\beta = \neg(\gamma \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma))$

$\vdash (\gamma \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma))$

$\vdash \neg\neg(\gamma \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma))$ denn $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \neg\neg\alpha}$

Satz (S32): $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)

Satz (S33): $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ Äq $\alpha \wedge \neg\beta$

Bew.: (→) genügt: $\vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$

$\vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta$

genügt $\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (S29)

$\vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (A1)

(←) Nach S16 genügt: $\vdash \alpha \rightarrow\cdot\ \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

nach Kontrap. und Kettenschluß genügt:

$\vdash \alpha \rightarrow\cdot\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ (S3)

$\dfrac{\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \rightarrow: \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)}{\vdash \alpha \rightarrow: \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)}$

? ?? Satz S33) ~~$(\alpha \rightarrow \beta)$ äq $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$~~

$a \rightarrow b$ äq $\neg a \vee b$

Satz (S34): $\neg\alpha \rightarrow \alpha$ Äq α

$\vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\alpha$ (S19)

$\vdash \neg\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow: \neg(\neg\alpha \rightarrow \alpha)$

RA3 $\vdash \neg\alpha \rightarrow: \neg(\neg\alpha \rightarrow \alpha)$

Kontrap. $\vdash \neg\alpha \rightarrow \neg(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow: (\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

Sätze über Quantoren:

I. Generalisierung und Partikularisierung

Satz (S35): $\vdash \forall x\alpha \to \alpha$

Bew.: $\vdash \alpha \to \alpha$ (S1)

$\vdash \forall x\alpha \to \alpha$ (Gv)

aber: die Umkehrung gilt i.allg. nicht! (nicht $\vdash \alpha \to \forall x\alpha$)

Bsp.: nicht $\models_{\mathfrak{A}} Rx \to \forall x Rx$, mit $U_{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$, $R_{\mathfrak{A}}x$ gdw x gerade. (d.h., es genügt z.z., daß es für ein x nicht gilt).

aber:

Satz: Wenn $\Sigma \vdash \alpha$, so $\Sigma \vdash \forall x\alpha$

Bew.: Sei $\Sigma \vdash \alpha$, β wählen mit $\Sigma \vdash \beta$, $x \notin Fr(\beta)$ (z.B. $\beta = \delta \to \delta$(S1), x nicht in δ).

$\Sigma \vdash \beta \to \alpha$ (RA1)

$\Sigma \vdash \beta \to \forall x\alpha$ (Gh)

$\Sigma \vdash \forall x\alpha$ (Abtr)

Satz: $\Sigma \vdash \alpha$ gdw $\Sigma \vdash \forall x\alpha$.

S. 16

Satz: Vor.: $\overset{\times}{\alpha}$ ist eine Generalisierte von α

Beh.: $\Sigma \vdash \alpha$ gdw $\Sigma \vdash \overset{\times}{\alpha}$.

$\vdash \alpha \to \alpha$

$\vdash \alpha \to \forall x\alpha$

Satz (S36): $\vdash \alpha \to \exists x\alpha$ (aus S1 mit Ph)

aber: die Umkehrung gilt i.a. nicht ! (nicht $\vdash \exists x\alpha \to \alpha$)

Bsp.: wie oben mit h(x)=1 .

Satz (S37): Wenn $x \notin Fr(\alpha)$, so $\left.\begin{array}{l}\forall x\alpha \text{ Äq } \alpha \\ \exists x\alpha \text{ Äq } \alpha\end{array}\right\}$ (aus $\alpha \to \alpha$ mit Gh, Pv)

II. Quantorenvertauschung

Satz (S38): $\forall x \forall y \alpha$ Äq $\forall y \forall x \alpha$

2 1 4 3 (Nummerierung für unten)

Bew.: (→)

$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$ (S1)

$\vdash \forall y \alpha \rightarrow \alpha$ (Gv)

$\vdash \forall x \forall y \alpha \rightarrow \alpha$ (Gv)

$\vdash \forall x \forall y \alpha \rightarrow \forall x \alpha$ (Gh)

$\vdash \forall x \forall y \alpha \rightarrow \forall y \forall x \alpha$ (Gh)

(←) analog

Satz (S39): $\exists x \exists y \alpha$ Äq $\exists y \exists x \alpha$

4 3

Bew.: (→) 4 3 2 1 (mit Ph)

(←) analog

Satz (S40): $\vdash \exists x \forall y \alpha \rightarrow \forall y \exists x \alpha$

Bew.: 4 1 3 2

aber: Die Umkehrung gilt i. allg. nicht!

Bsp.: nicht $\models_{\mathfrak{A}} \forall y \exists x Rxy \rightarrow \exists x \forall y Rxy$

mit $U_{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$, $R_{\mathfrak{A}}xy$ gdw $x > y$

III. Verneinungstechnik

Satz (S41): $\neg \forall x \alpha$ Äq $\exists x \neg \alpha$

Satz (S42): $\neg \exists x \alpha$ Äq $\forall x \neg \alpha$

Bew. zu S41: (→)

genügt: $\vdash \neg \exists x \neg \alpha \rightarrow \forall x \alpha$ (Kontrap.)

genügt: $\vdash \ldots\ldots \rightarrow \alpha$ (Gh)

genügt: $\vdash \neg \alpha \rightarrow \exists x \neg \alpha$ (Kontrap.) (S36)

(←) und S42 ähnlich.

Satz: $\vdash \forall x\alpha \wedge \alpha \to \beta \longrightarrow \exists x\beta$

IV. Quantorenverteilung

$\vdash \forall x(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \forall x\alpha \wedge \forall x\beta$

Satz (S43): $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ Äq $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta$

Bew.: $(\rightarrow)$ genügt: $\forall x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \forall x\alpha$

$\forall x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \forall x\beta$

$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$

$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$

1. Gv, 2. Gh

$(\leftarrow)$ genügt: $\vdash \forall x\alpha \wedge \forall x\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$ (gh)

genügt: $\vdash \forall x\alpha \wedge \forall x\beta \rightarrow \alpha$

$\vdash \forall x\alpha \wedge \forall x\beta \rightarrow \beta$

$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

$\vdash \forall x\alpha \rightarrow \alpha$ (Gv)

$\vdash \forall x\alpha \wedge \forall x\beta \rightarrow \forall x\alpha$

$\vdash \forall x\alpha \wedge \forall x\beta \rightarrow \alpha$ (S?)

[illegible]

Regel: $\dfrac{\vdash \alpha \rightarrow \beta}{\vdash \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta}$

Satz (S44): $\exists x(\alpha \vee \beta)$ Äq $\exists x\alpha \vee \exists x\beta$ (Übung)

Satz (S45): $\vdash \exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$

aber: Die Umkehrung gilt i.a. nicht!

$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$

$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \exists x\alpha$

$\vdash \exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x\alpha$ (Pv)

② $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

$\vdash \alpha \rightarrow \exists x\alpha$ (Ph)

$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \exists x\alpha$

$\vdash \exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x\alpha$ (Pv)

Bew. S45: genügt: $\vdash \ldots \rightarrow \exists x\alpha$

$\vdash \ldots \rightarrow \exists x\beta$

2 1

Bsp.: für Umkehrung: nicht $\vDash_{\mathfrak{A}} \exists xPx \wedge \exists xQx \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$

mit $U_{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$, $P_{\mathfrak{A}}x$ gdw x ist gerade

$Q_{\mathfrak{A}}x$ gdw x ist ungerade

Satz (S46): $\vdash \forall x\alpha \vee \forall x\beta \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$

Bew.: genügt: $\vdash \forall x\alpha \rightarrow \ldots$

$\vdash \forall x\beta \rightarrow \ldots$

1 2

$\vdash \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$

$\vdash \forall x\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ (Gv)

$\vdash \forall x\alpha \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$ (Gh)

aber: Die Umkehrung gilt i.allg. nicht.

Satz (S47): $\vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow\cdot\ \forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta$

Bew.: $\vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow\cdot\ \alpha \rightarrow \beta$ (Prämissenvertauschung)

nach RS4: $\vdash \alpha \rightarrow\cdot\ \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

$\vdash \forall x\alpha \rightarrow\cdot\ \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ (Gv)

$\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow\cdot\ \alpha \rightarrow \beta$

$\vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow\cdot\ \alpha \rightarrow \beta$ (Gv)

$\vdash \alpha \rightarrow\cdot\ \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

$\vdash \forall x\alpha \rightarrow\cdot\ \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ (Gv)

RS4,S16: $\vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \forall x\alpha \underset{\forall x}{\rightarrow} \beta$ (Gh)

S16: $\vdash \ldots \rightarrow\cdot \ldots \rightarrow \ldots$

$\vdash \forall x\alpha \wedge \alpha \rightarrow \beta \longrightarrow\cdot\ \forall x\beta$?

$\exists x\alpha \wedge \alpha \rightarrow \beta \longrightarrow\cdot\ \exists x\beta$

Quantoren Quantoren

Satz: $\exists x \forall y\ \alpha$ impl. $\forall y \exists x\ \alpha$

Quantoren-Kette Quantoren-Kette

<u>Satz (S48):</u> $\vdash \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta\ ) \rightarrow\!\cdot\ \forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta$

<u>Bew.:</u> genügt $\begin{cases} \vdash \qquad\qquad \rightarrow \\ \vdash \qquad\qquad \leftarrow \end{cases}$

<u>Satz (S49):</u> $\vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow\!\cdot\ \exists x\alpha \rightarrow \exists x\beta$

<u>Satz (S50):</u> $\vdash \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow\!\cdot\ \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta$

$x \notin Fr(\alpha)$ s. S.16

V. <u>Sätze der Quantorenverschiebung</u>

gilt auch: $\forall x\ \alpha$ äq α

siehe Satz 37 Seite 33

<u>Satz:</u> Wenn $x \notin Fr(\alpha)$, so	Wenn $x \notin Fr(\beta)$, so
(S51) $\forall x(\alpha\wedge\beta)$ Äq $\alpha \wedge \forall x\beta$	(S57) $\forall x(\alpha\wedge\beta)$ Äq $\forall x\alpha \wedge \beta$
(S52) $\exists x(\alpha\wedge\beta)$ Äq $\alpha \wedge \exists x\beta$	(S58) $\exists x(\alpha\wedge\beta)$ Äq $\exists x\alpha \wedge \beta$
(S53) $\forall x(\alpha\vee\beta)$ Äq $\alpha \vee \forall x\beta$	(S59) $\forall x(\alpha\vee\beta)$ Äq $\forall x\alpha \vee \beta$
(S54) $\exists x(\alpha\vee\beta)$ Äq $\alpha \vee \exists x\beta$	(S60) $\exists x(\alpha\vee\beta)$ Äq $\exists x\alpha \vee \beta$
(S55) $\forall x(\alpha\rightarrow\beta)$ Äq $\alpha \rightarrow \forall x\beta$	(S61) $\forall x(\alpha\rightarrow\beta)$ Äq $\exists x\alpha \rightarrow \beta$
(S56) $\exists x(\alpha\rightarrow\beta)$ Äq $\alpha \rightarrow \exists x\beta$	(S62) $\exists x(\alpha\rightarrow\beta)$ Äq $\forall x\alpha \rightarrow \beta$

<u>**Hinweis** zu S53:</u> (→) $\alpha \vee \beta$ Äq $\neg\alpha \rightarrow \beta$ (S33a) genügt: $\vdash \forall x(\alpha\vee\beta) \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \forall x\beta$

Hinweis zu S 56 $\alpha \rightarrow \beta$ Äq $\neg\alpha \vee \beta$ (S33b)

<u>Bew. zu S61:</u> (→)
$\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow\!\cdot\ \alpha \rightarrow \beta$ (S1)
$\vdash \forall x(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow\!\cdot\ \alpha \rightarrow \beta$ (Gv)
$\vdash \alpha \rightarrow\!\cdot\ \forall x(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \beta$ (Präm.vert., RS4)
$\vdash \exists x\alpha \rightarrow\!\cdot\ \forall x(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \beta$ (Pv)
$\vdash \forall x(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow\!\cdot\ \exists x\alpha \rightarrow \beta$ (RS4)

(←) genügt $\vdash \exists x\alpha \rightarrow \beta \rightarrow\!\cdot\ \alpha \rightarrow \beta$ (RA3)
genügt (RA3): $\vdash \alpha \rightarrow \exists x\alpha$ (S36)

<u>Sätze über $\doteq$:</u>

<u>Satz (S63):</u> $\vdash x\doteq y \rightarrow y\doteq x$

I1: $x\doteq x$
I4: $x\doteq y \rightarrow\!\cdot\ x\doteq z \rightarrow y\doteq z$

<u>Bew.:</u> $\vdash x\doteq y \rightarrow\!\cdot\ x\doteq x \rightarrow y\doteq x$ (I4)
$\vdash x\doteq x \rightarrow\!\cdot\ x\doteq y \rightarrow y\doteq x$ (Präm.vert., RS4)
Abtr (nach I1)

Satz (S64): $\vdash x \doteq y \rightarrow\!\cdot\; y \doteq z \rightarrow x \doteq z$

$\vdash x \doteq y \wedge y \doteq z \longrightarrow x \doteq z$

Bew.: nach S63 genügt $\vdash y \doteq x \rightarrow\!\cdot\; y \doteq z \rightarrow x \doteq z$ (I4)

$\vdash x \doteq y \longrightarrow y \doteq x$

Satz (S65): $\vdash x \doteq y \rightarrow\!\cdot\; z \doteq x \rightarrow z \doteq y$

Bew.: mit Präm.vert. (RS4), zyklische Vertauschung zu S64

Spezialfall zu S.64

$$\begin{matrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z & x & y \end{matrix}$$

Satz: LEIBNIZSCHES ERSETZBARKEITSTHEOREM

$\vdash \sigma \doteq \tau \rightarrow\!\cdot\; \alpha^{x}/_{\sigma} \leftrightarrow \alpha^{x}/_{\tau}$, falls beide Substitutionen ausführbar.

Bew. (induktiv über Formelaufbau)

genügt $\vdash \sigma \doteq \tau \rightarrow \alpha^{x}/_{\sigma} \rightarrow \alpha^{x}/_{\tau}$

Bew $\vdash \tau \doteq \sigma \rightarrow \alpha^{x}/_{\tau} \rightarrow \alpha^{x}/_{\sigma}$

$\vdash \sigma \doteq \tau \rightarrow \tau \doteq \sigma$ (S63)+(I4)

$\vdash \sigma \doteq \tau \rightarrow (\alpha^{x}/_{\tau} \rightarrow \alpha^{x}/_{\sigma})$

Lemma: Leibnizsches Ersetzbarkeitstheorem für Terme

$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow \quad \mathrm{sub}_x^{\sigma_1}\tau \doteq \mathrm{sub}_x^{\sigma_2}\tau$

Beweis des L.E. für Terme: (induktiv über τ)

1. Variable: $\tau = x$ ✓ (S1)

   $\tau = z \neq x$ ✓ (I_1,RA1)

$\vdash z \doteq z \rightarrow (\sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow z \doteq z)$ (RA1)

$\vdash z \doteq z$ (I1)

$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow z \doteq z$ (Abt.)

2. $\tau = f\tau_1 \ldots \tau_{r(f)}$

$$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow \bigwedge_{\rho=1}^{r(f)} \underbrace{\mathrm{sub}_x^{\sigma_1}\tau_\rho}_{\tau'_\rho} \doteq \underbrace{\mathrm{sub}_x^{\sigma_2}\tau_\rho}_{\tau''_\rho} \qquad \text{(Ind. Vor.)}$$

Siehe links

Def.: Allgemeine Konjunktionen Allgemeine Disjunktionen

$\bigwedge_{\nu=m}^{n} \alpha_\nu$ auch $\alpha_m \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ $\qquad \bigvee_{\nu=m}^{n} \alpha_\nu : \alpha_m \vee \ldots \vee \alpha_n$ (m<n)

wird induktiv definiert über n:

$$\bigwedge_{\nu=m}^{m} \alpha_\nu = \alpha_m \qquad \bigvee_{\nu=m}^{m} \alpha_\nu = \alpha_m$$

$$\bigwedge_{\nu=m}^{n+1} \alpha_\nu = \bigwedge_{\nu=m}^{n} \alpha_\nu \wedge \alpha_{n+1} \qquad \bigvee_{\nu=m}^{n+1} \alpha_\nu = \bigvee_{\nu=m}^{n} \alpha_\nu \vee \alpha_{n+1}$$

m<n

Fortsetzung Beweis:

$$\left.\begin{array}{llll}\vdash & \bigwedge_{\rho=1}^{r(f)} \tau'_\rho \doteq \tau''_\rho & \rightarrow & f\tau'_1\tau'_2\ldots\tau'_{r(f)} \doteq f\tau''_1\tau'_2\ldots\tau'_{r(f)} \\ \vdash & \ldots & \rightarrow & f\tau''_1\tau'_2\ldots\tau'_{r(f)} \doteq f\tau''_1\tau''_2\tau'_3\ldots\tau'_{r(f)} \\ \vdash & \ldots & \rightarrow & f\tau''_1\ldots\tau''_{r(f)-1}\tau'_{r(f)} \doteq f\tau''_1\ldots\tau''_{r(f)}\end{array}\right\}(*)$$

$$\Rightarrow \vdash \bigwedge \ldots \rightarrow \bigwedge \qquad [(*): I_2 \text{ mit Substitutionsregel (Sb)}$$

und Transitivität

?

nach Transitivität der Gleichheit

$$\vdash \ldots \rightarrow f\underbrace{\tau'_1\ldots}_{sub_x^{\sigma_1}\tau}\tau'_{r(f)} = f\underbrace{\tau''_1\ldots}_{sub_x^{\sigma_2}\tau}\tau''_{r(f)}$$

$$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow sub_x^{\sigma_1}\tau \doteq sub_x^{\sigma_2}\tau$$

$$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow \bigwedge sub_x^{\sigma_1}\tau_i \doteq sub_x^{\sigma_2}\tau_i$$

$$\vdash \bigwedge sub_x^{\sigma_1}\tau_i \doteq sub_x^{\sigma_2}\tau \rightarrow sub_x^{\sigma_1}\tau \doteq sub_x^{\sigma_2}\tau$$

$$(RA3)\ \vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow sub_x^{\sigma_1}\tau \doteq sub_x^{\sigma_2}\tau$$

Beweis des L.E. für Formeln (induktiv über α):

1. $\alpha = R\tau_1\ldots\tau_{r(R)}$

$$\alpha^x/_{\sigma_\nu} = R\ \underbrace{sub_x^{\sigma_\nu}\tau_1}_{\tau'_1}\ \ldots\ \underbrace{sub_x^{\sigma_\nu}\tau_{r(R)}}_{\tau'_{r(R)}} \qquad \text{für } \nu = 1$$

$$\tau''_1 \qquad \tau''_{r(R)} \qquad \text{für } \nu = 2$$

$$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow \bigwedge_{\rho=1}^{r(R)} \tau'_\rho \doteq \tau''_\rho$$

$$\vdash \bigwedge_{\rho=1}^{r(R)} \tau'_\rho \doteq \tau''_\rho \rightarrow R\tau'_1\tau'_2\ldots\tau'_{r(R)} \rightarrow R\tau''_1\tau''_2\ldots\tau''_{r(R)}$$

$$\left.\begin{array}{llll}(RA3)\ \vdash & \ldots & \rightarrow\cdot & R\tau'_1\tau'_2\ldots\tau'_{r(R)} \rightarrow R\tau''_1\tau'_2\ldots\tau'_{r(R)} \\ \vdash & \ldots & \rightarrow\cdot & R\tau''_1\tau''_2\ldots\tau''_{r(R)-1}\tau'_{r(R)} \rightarrow R\tau''_1\ldots\tau''_{r(R)}\end{array}\right\}(*) \leftarrow ?$$

[(*) I_3 mit (Sb)

$$\Rightarrow \vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow\cdot\ \alpha^x/_{\sigma_1} \rightarrow \alpha^x/_{\sigma_2} \Rightarrow \vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow\cdot\ \alpha^x/_{\sigma_1} \leftrightarrow \alpha^x/_{\sigma_2}$$

analog $\leftarrow \vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow \alpha^x/_{\sigma_2} \rightarrow \alpha^x/_{\sigma_1}$

Beh.: aus $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ und $\vdash \alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$ folgt $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$

Bew.: siehe links unten

Bew.:

$$\vdash \sigma_2 \doteq \sigma_1 \rightarrow \alpha^x/_{\sigma_2} \rightarrow \alpha^x/_{\sigma_1}$$

$$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow \sigma_2 \doteq \sigma_1$$

$$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \rightarrow \alpha^x/_{\sigma_2} \rightarrow \alpha^x/_{\sigma_1}$$

2. $\alpha = \tau_1 \doteq \tau_2$ analog wie bei einem 2 stelligen Relationszeichen

.
.
.

2. Induktionsschritt: Gelte Satz für α
z.z. er gilt für $\neg\alpha$

es genügt $\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \to\cdot\ \underbrace{(\neg\alpha)^{x}/\sigma_1}_{\neg(\underbrace{\alpha^{x}/\sigma_1}_{\alpha'})} \to \underbrace{(\neg\alpha)^{x}/\sigma_2}_{\neg(\underbrace{\alpha^{x}/\sigma_2}_{\alpha''})}$,

nach Ind. Vor.: $\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \to\cdot\ \alpha' \leftrightarrow \alpha''$

genügt: $\vdash \alpha' \leftrightarrow \alpha'' \to\cdot\ \neg\alpha' \leftrightarrow \neg\alpha''$ (S66)
$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \to \neg\alpha' \leftrightarrow \neg\alpha''$ (R'∧3)

<u>Satz (S66):</u> $\vdash \alpha' \leftrightarrow \alpha'' \to\cdot\ \neg\alpha' \leftrightarrow \neg\alpha''$ (*)

$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \to\cdot\ \alpha' \leftrightarrow \alpha''$ $\mathcal{Y}(\alpha)$
$\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \to\cdot\ \beta' \leftrightarrow \beta''$ $\mathcal{Y}(\beta)$
(R'∧3) $\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \to\cdot\ \alpha' \leftrightarrow \alpha'' \wedge \beta' \leftrightarrow \beta''$

für $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$, mit Hilfe von

$$\left.\begin{array}{llll}
\underline{\text{Satz (S67):}} & \vdash (\alpha'\leftrightarrow\alpha'')\wedge(\beta'\leftrightarrow\beta'') \to\cdot & \alpha'\wedge\beta' \leftrightarrow & \alpha''\wedge\beta'' \\
\underline{\text{Satz (S68):}} & \qquad\qquad \wedge & \vee & \vee \\
\underline{\text{Satz (S69):}} & \qquad\qquad \wedge & \to & \to \\
\underline{\text{Satz (S70):}} & \qquad\qquad \wedge & \leftarrow & \leftarrow
\end{array}\right\} (*)$$

(*) Verzahnungssätze

<u>Für $\forall z\alpha$</u> Fall 1: $x \notin Fr(\forall z\alpha)$

$(\forall z\alpha)^{x}/\sigma_\nu = \forall z\alpha \quad \vdash \ \ldots \to\cdot\ \underset{\exists}{\forall z\alpha} \leftrightarrow \underset{\exists}{\forall z\alpha}$

Fall 2: $x \in Fr(\forall z\alpha)$, z nicht in σ_1, σ_2

nach Ind.Vor.: $\vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2 \to\cdot\ \overbrace{\alpha^{x}/\sigma_1}^{\alpha'} \leftrightarrow \overbrace{\alpha^{x}/\sigma_2}^{\alpha''}$

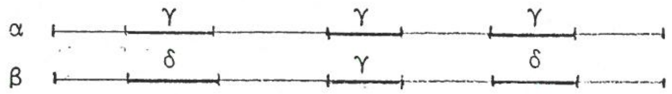
(S48) $\forall z(\alpha' \leftrightarrow \alpha'') \to, \forall z\alpha' \to \forall z\alpha''$ $\qquad \vdash \ \ldots \to\cdot\ \forall z(\alpha' \leftrightarrow \alpha'')$ (Gh)

(S50) $\forall z(\alpha' \to \alpha'') \to, \exists z\alpha' \to \exists z\alpha''$ $\qquad \vdash \ \ldots \quad \exists \qquad \exists$ (S50)

$\vdash \ \ldots \to\cdot\ \underset{\exists}{(\forall z\alpha)}^{x}/\sigma_1 \leftrightarrow \underset{\exists}{(\forall z\alpha)}^{x}/\sigma_2$

aber: i.allg. gilt nicht $\vdash \alpha' \leftrightarrow \alpha'' \rightarrow\cdot\ \forall z\alpha' \leftrightarrow \forall z\alpha''$

Definition: α geht dadurch, daß (an beliebigen Stellen) die Teilformel γ durch δ ersetzt wird, in β über: $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\alpha\beta$



induktive Charakterisierung:

(1) a. $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\gamma\delta$

b. $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\alpha\alpha$ für jede Formel α

(2) Wenn $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\alpha\beta$ und $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\alpha'\beta'$, so $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\neg\alpha\neg\beta$

, so $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}(\alpha\underset{\substack{\vee\\ \rightarrow\\ \leftrightarrow}}{\wedge}\alpha')(\beta\underset{\substack{\vee\\ \rightarrow\\ \leftrightarrow}}{\wedge}\beta')$

, so $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\underset{\exists}{\forall}x\alpha\underset{\exists}{\forall}x\beta$

(3) $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\alpha\beta$ nur dann, wenn dies auf Grund von (1) oder (2) der Fall ist

Satz: ERSETZBARKEITSTHEOREM FÜR ÄQUIVALENTE AUSDRÜCKE

Wenn $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\alpha\beta$ und $\gamma\ddot{A}q_{\Sigma}\delta$, so $\alpha\ddot{A}q_{\Sigma}\beta$.

i.allg. gilt nicht: wenn $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\alpha\beta$, so $\vdash \gamma \leftrightarrow \delta \rightarrow\cdot\ \alpha \leftrightarrow \beta$

aber es gilt folgende Verschärfung des Ersetzbarkeitstheorems, so $\vdash \underbrace{(\gamma\leftrightarrow\delta)}_{\text{Generalisierte}}{}^{*} \rightarrow\cdot\ \alpha \leftrightarrow \beta$

warum Verschärfung?, siehe Satz Seite 33

damit auch: Wenn $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\alpha\beta$, so $\Sigma \vdash \ldots$

$\models \ldots$

$\models_{V2} \ldots$

$\Sigma \models \ldots$

Satz (Folgerung): Wenn $\mathrm{Ers}^{\delta}_{\gamma}\alpha\beta$ und $\gamma\ \ddot{A}qsm\ \delta$, so $\alpha\ \ddot{A}qsm_{\Sigma}\ \beta$

Beweis der Verschärfung induktiv entsprechend der Def von Ers_{γ}^{δ}

Beweis: (s. Def. von Ers.)

zu (1): $\vdash (\gamma \leftrightarrow \delta)^{*} \rightarrow\!\cdot\; \gamma \leftrightarrow \delta$ (S1, Gv)

$\vdash (\gamma \leftrightarrow \delta)^{*} \rightarrow\!\cdot\; \alpha \leftrightarrow \alpha$ (S1, RA1, R'A15)

zu (2): $\vdash (\gamma \leftrightarrow \delta)^{*} \rightarrow\!\cdot\; (\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha' \leftrightarrow \beta')$

$\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha' \leftrightarrow \beta') \rightarrow\!\cdot\; (\alpha \overset{\vee}{\underset{\rightarrow}{\wedge}} \alpha') \leftrightarrow (\beta \overset{\vee}{\underset{\rightarrow}{\wedge}} \beta')$ . . (S.66-70)

$\vdash (\gamma \leftrightarrow \delta)^{*} \rightarrow\!.\; (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$\vdash \quad \ldots \quad \rightarrow \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta)$ (Gh) hier geht Vorr Generalisiert $(\gamma\leftrightarrow\delta)^{*}$ ein

$\vdash \quad \ldots \quad \rightarrow\!\cdot\; \underset{\exists}{\forall} x\alpha \leftrightarrow \underset{\exists}{\forall} x\beta$ (S48) (S50)

Satz: GEBUNDENE UMBENENNUNG

Siehe links Wenn y nicht in α, so $\underset{\exists}{\forall} x\alpha$ Äq $\underset{\exists}{\forall} y\alpha^{x}/y$

α^{x}/y existiert siehe S.23

Beweis: $(\rightarrow)$

$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

$\vdash \forall x\alpha \rightarrow \alpha$

$\vdash (\forall x\alpha \longrightarrow \alpha)^{x}/y$ d.h. $\vdash \forall x\alpha \rightarrow \alpha^{x}/y$

$\Rightarrow \vdash \forall x\alpha \rightarrow \forall y\alpha^{x}/y$ (Gh)

$(\leftarrow)$ analog

(es ist $(\alpha^{x}/y)^{y}/x = \alpha$) siehe Satz 4 S.23

Definition: α ist eine pränexe Normalform (pränexe Formel)

:<=> es gibt ein π, α', so daß α' eine quantorenfreie Formel, π ein Präfix, d.h. eine aus Zeichenreihen der Form $\forall x$, $\exists x$ $(x \in V)$ zusammengesetzte Zeichenreihe, und $\alpha = \pi\alpha'$ ist.

Bsp.: $\alpha = \underbrace{\forall x \exists y}_{\pi}(\underbrace{\neg x \doteq 0 \rightarrow x.y \doteq 1}_{\alpha'})$

π ist das Präfix und α' der Kern (engl. matrix) der pränexen Formel α. (π kann auch leer sein).

① Satz: Zu jeder Formel α gibt es eine logisch äquivalente pränexe Normalform. ohne zusätzliche freie Variable

Bew.: (Effektive Konstruktion für Sprachen mit Bezeichnungssystem)

Beweis durch log. äquivalente Umformungen auf Grund des Ersetzbarkeitstheorems

a. $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$ ausschalten mittels $\alpha \leftrightarrow \beta$ Äq $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

und $\alpha \rightarrow \beta$ Äq $\neg\alpha \vee \beta$ (S33b) und mit Hilfe des Erstehbarkeitstheorems

b. Quantoren nach vorn ziehen mittels Verneinungstechnik, gebundener Umbenennung und den Äquivalenzen:

$\alpha \wedge \forall x\beta$ Äq $\forall x(\alpha\wedge\beta)$ falls $x \notin Fr(\alpha)$
$\wedge\ \exists$ Äq $\exists\ \wedge$
$\vee\ \forall$ Äq $\forall\ \vee$
$\vee\ \exists$ Äq $\exists\ \vee$ (Quantorenverschiebung)
analog für den Bestandteil β analog

<u>Beispiel:</u> "a,b teilerfremd" (in $\mathbb{N}$)

$\neg\exists u(\neg u\doteq 1 \wedge u|a \wedge u|b)$ (mit $u|v =_{def} \exists x\ u.x\doteq v$)

Äq $\forall u(u\doteq 1 \vee \neg u/a \vee \neg u/b)$
Äq $\forall u(u\doteq 1 \vee \forall x\neg u.x\doteq a \vee \underbrace{\forall x\neg u.x\doteq b})$
Äq ... $\forall y\neg u.y\doteq b$ gebundene Umbenennung
Äq $\forall u\forall x\forall y(u\doteq 1 \vee \neg u.x\doteq a \vee \neg u.y=b)$

<u>noch zu beweisen:</u> Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab.

Ausführung zu b.

Die <u>aussagenlogische Belastung</u> eines Quantors := Die Anzahl der Junktoren in polnischer Notation, die vor dem betreffenden Quantor stehen. (Diese wird bei jedem Schritt um mindestens Eins vermindert q.e.d.) Siehe Rückseite

In unserer Schreibweise kann dies mittels der Anzahl der aufgehenden Klammern und Negationszeichen gezeigt werden.
Für unsere Formeldefinition kann man die Anzahl der aufgehenden Klammern und der Neg.zeichen verw.

<u>Satz:</u> DEDUKTIONSTHEOREM

Wenn η Aussage und $\Sigma \cup \{\eta\} \vdash \alpha$, so $\Sigma\vdash \eta\rightarrow\alpha$.

(d.h. in η kommen keine freien Variablen vor (da die Quantoren Schwierigkeiten machen, muß man voraussetzen, daß η Aussage). Die Vorraussetzung: "η ist Aussage" ist nicht entbehrlich

<u>Beweis:</u> Sei $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ eine Beweisfolge für α aus $\Sigma \cup \{\eta\}$ in L.

Beh: (sogar stärker): Für jedes κ mit $1\leq\kappa\leq k$ ist $\Sigma\vdash \eta\rightarrow\alpha_\kappa$
Beweis durch Induktion über κ .

Forts. Beweis:

1. α_κ log.Ax. (d.h. $\in Ax_L$) oder in $\Sigma \cup \{\eta\}$;

1a) $\alpha_\kappa \in Ax_L \cup \Sigma$ d.h. $\Sigma \vdash \alpha_\kappa$ also $\Sigma \vdash \eta \rightarrow \alpha_\kappa$ (RA1)

1b) $\alpha_\kappa = \eta$ also $\vdash \eta \rightarrow \alpha_\kappa$ (S1) also $\Sigma \vdash \eta \rightarrow \alpha_\kappa$

2. a. α_κ durch Schlußregeln siehe Rückseite

Abtr: $\alpha_\mu = \alpha_\nu \rightarrow \alpha_\kappa$ $(\mu, \nu < \kappa)$

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\kappa} \qquad \frac{\Sigma \vdash \eta \rightarrow (\alpha_\nu \rightarrow \alpha_\kappa) \qquad \Sigma \vdash \eta \rightarrow \alpha_\nu}{\text{z.z.: } \Sigma \vdash \eta \rightarrow \alpha_\kappa \text{ (nach R'S6)}}$$

(S6) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \cdot\!\rightarrow\!\cdot\ \alpha \rightarrow \beta \ \rightarrow\!\cdot\ \alpha \rightarrow \gamma$ (Freg.Kett.schlu

b. Für die Quantifizierungsregeln:

Sei $\Sigma \vdash \eta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

z.z. für Gv: $\Sigma \vdash \eta \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \beta)$

Pv: $\Sigma \vdash \eta \rightarrow (\exists x \alpha \rightarrow \beta)$, $x \notin Fr(\beta)$

mit RS4

Ph: $\Sigma \vdash \eta \rightarrow (\alpha \rightarrow \exists x \beta)$

Gh: $\Sigma \vdash \eta \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$, falls $x \notin Fr(\alpha)$

mit S16 ...

c. Für Termeinsetzungsregel:

Sb: Sei $\Sigma \vdash \eta \rightarrow \alpha$

z.z.: $\Sigma \vdash \eta \rightarrow \alpha^x/\tau$ (falls Subst ausführbar)

$$(\eta \rightarrow \alpha)^x/\tau = \eta^x/\tau \rightarrow \alpha^x/\tau = \eta \ \Rightarrow \vdash (\eta \rightarrow \alpha)^x/\tau$$

Zur Wiederholung v. S.33 : $\Sigma \vdash \alpha$ gdw $\Sigma \vdash \alpha^*$, wobei α^* Generalisierte v. α

Satz: Zu jeder Formel $\gamma \in \Sigma$ sei γ^* eine Generalisierte von γ.

$\Sigma^* = \{\gamma^* \mid \gamma \in \Sigma\}$ (Σ^* ist dann eine Menge von Aussagen)

Dann ist

$$\Sigma \vdash \alpha \quad \text{gdw} \quad \Sigma^* \vdash \alpha$$

Beweis: $\Sigma^* \subseteq Bw_L(\Sigma)$ (nach obigem Satz)

$\Sigma \subseteq Bw_L(\Sigma^*)$ 〃 〃 〃

$\Rightarrow$ $Bw_L(\Sigma) = Bw_L(\Sigma^*)$ (1), da Bw_L Hüllenoperator nämlich

$$Bw_L(\Sigma^*) \overset{\text{Monotonie}}{\subseteq} Bw_L Bw_L(\Sigma) \overset{\text{Abgeschl.}}{\subseteq} Bw_L(\Sigma)$$

$$\ldots(\Sigma) \qquad \ldots \quad (\Sigma^*) \qquad \ldots(\Sigma^*)$$

$\Rightarrow$ (1).

Satz: Dsgl. für $\models$ (mit Cn_L) Bew. analog mit Cn_L

Definition: Sei $\Sigma \subseteq Fml_L$

Σ ist (syntaktisch) widerspruchsvoll (wv) in L:

$wv_L \Sigma$:<≡> jedes $\alpha \in Fml_L$ ist aus Σ beweisbar.

($Bw_L(\Sigma) = Fml_L$; für jedes $\alpha \in Fml_L$ ist $\Sigma \vdash \alpha$)

Σ ist (syntaktisch) widerspruchsfrei (wfr) in L:

$wfr_L \Sigma$:<≡> nicht $wv_L \Sigma$.

($Bw_L(\Sigma) \neq Fml_L$)

Satz : Für jedes $\alpha \in Fml_L$ gilt: $wv_L \Sigma$ gdw $\Sigma \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$

Beweis: (→) klar

(←) $\vdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \vdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta \quad (S30)\\ \Sigma \vdash \alpha \wedge \neg\alpha\end{array}}{\text{Abtr } \Sigma \vdash \beta}$$

Satz: ENDLICHKEITSSATZ FÜR DIE BEWEISBARKEIT

Wenn $\Sigma \vdash \alpha$, so existiert eine endliche Teilmenge Σ' von Σ mit $\Sigma' \vdash \alpha$.

Beweis: Beweisfolge betrachten, Elemente von Σ daraus zusammenfassen zu Σ'

ENDLICHKEITSSATZ FÜR SYNTAKTISCHE WIDERSPRUCHFREIH.

Eine Formelmenge ist wfr gdw jede endliche Teilmenge von Σ wfr ist.

Beweis: (→) klar

(←) Ann.: $wv\Sigma$ – $\Sigma \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$

– $\Sigma' \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$ Endl. Satz für Beweisbarkeit

also $wv \Sigma'$ ↯

5. Beweis des Vollständigkeitsatzes

Satz: Wenn wfr Σ und α Aussage, so ist wfr $\Sigma\cup\{\alpha\}$ oder wfr $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$.

Beweis: Ann.: wv $\Sigma\cup\{\alpha\}$, wv $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$, $\beta\in \mathrm{Fml}_L$ bel.

$\Sigma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ $\qquad$ $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta$

$\equiv>$ $\underline{\Sigma\vdash\alpha\to\beta}$ $\qquad$ $\underline{\Sigma\vdash\neg\alpha\to\beta}$ $\qquad$ (aus Deduktionsth.)

$\equiv>$ $\Sigma\vdash\alpha\vee\neg\alpha\to\beta$

$\underline{\Sigma\vdash\alpha\vee\neg\alpha}$ $\qquad$ (Abtr)

$\Sigma\vdash\beta$ $\qquad$ $\equiv>$ wv Σ Wid. zur Vor.

Lemma: Wenn α Aussage, so $\Sigma\vdash\alpha$ gdw wv $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$

Beweis: $(\to)$ $\Sigma\vdash\alpha$ aus größeren Menge folgt erst recht:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\alpha\\ \Sigma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\neg\alpha\end{array}\right\}\ \Sigma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\alpha\wedge\neg\alpha.\quad \text{Wid.}$$

$(\leftarrow)$ $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\alpha$ nach Deduktionstheorem folgt

$\Sigma\vdash\neg\alpha\to\alpha$

$(\neg\alpha\to\alpha$ Äq $\alpha)$ $\equiv>$ $\Sigma\vdash\alpha$

Vollständigkeitssatz: z.z.: Wenn $\Sigma\models\alpha$, so $\Sigma\vdash\alpha$.

genügt: Für jedes $\Sigma\subseteq \mathrm{Aus}_L, \alpha\in \mathrm{Aus}_L$: Wenn $\Sigma\models\alpha$, so $\Sigma\vdash\alpha$

(Aus_L: Menge der Aussagen von L) S. 16 Def von Generalisierte
S. 14 Def von Aussage

Siehe links dies genügt wegen: $\Sigma\vdash\alpha$ gdw $\Sigma\vdash\alpha^*$, $\Sigma\vdash\alpha$ gdw $\Sigma^*\vdash\alpha$

ebenso: $\models$ $\qquad$ $\models$ $\qquad$ $\models$ $\qquad$ $\models$

genügt: (indirekt) $\underbrace{\text{Wenn nicht } \Sigma\vdash\alpha}$, so $\underbrace{\text{nicht } \Sigma\models\alpha}$.

wfr $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$ ← Siehe Lemma $\qquad$ es ex. ein Modell $\mathfrak{A}$ von Σ mit

$\underbrace{\text{nicht } \models_{\mathfrak{A}}\alpha}$

$\underbrace{\Rightarrow\ \models_{\mathfrak{A}}\neg\alpha}$ $\qquad$ da $\alpha\in \mathrm{Aus}_L$

$\mathfrak{A}$ ist Modell von $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$

genügt: Wenn wfr $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$, so ex. $\mathfrak{A}$ ist Modell von $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$.

genügt: Satz: Jede widerspruchsfreie Menge von Aussagen besitzt ein Modell.

Dieser Satz ist (wie die obigen) gleichwertig mit dem Vollständigkeitssatz!

Eine Beweismöglichkeit: Zerlegung in 2 Teile:

Teil I: Jede (widerspruchsfreie) Menge von quantorenfreien Aussagen besitzt ein Modell.

Teil II: Rückführung des Allgemeinen Satzes auf Teil I. (Jede syntaktisch widerspruchsfreie Menge von Aussagen besitzt ein Modell).

?

L enthält eine Individuen-Konstante voraussetzen siehe S. 49 oder

Anmerkung: Quantorenfreie Aussagen ex. gdw. ex. Primformeln, die Aussagen sind ≡> ex. variablenfreie Primformeln gdw ex. variablenfreie Terme (≡> nullstellige Funktionszeichen) oder nullstellige Relationszeichen.

Beweis zu I: Sei Σ wfr Menge von quantorenfreien Aussagen von L. Sei Π die Menge der atomaren Aussagen (Aussagen, die gleichzeitig Primformeln sind) von L. Elemente von Π durchnummerieren mit Ordinalzahlen <ξ für eine geeignete Ordinalzahl ξ .

Anmerkung: $\underbrace{1,2,3,\ldots,\omega}_{\mathbb{N}},\omega+1,\underbrace{\ldots,\overset{\omega\cdot 2}{2\cancel{\omega}},2\omega+1,\ldots}_{\text{alle abzählbar}},\omega.\omega,\ldots,\omega^{\omega},\ldots$

ω kleinste transfinite Ordinalzahl.

Auswahlaxiom <≡> Wohlordnungssatz (jede Menge läßt sich wohlordnen).
Jede Ordinalzahl entspricht einer wohlgeordneten Menge <≡> isomorph.

$\Pi = \{\alpha_{\kappa} | \kappa < \xi\}$ Für abzählbare Mengen kann $\xi = \omega$ gesetzt werden (dann hat man ℕ).

hat man nat. Zahlen als Indizes K, Auswahlaxiom entbehrlich

Ord(M,<) = Klasse aller zu (M,<) isomorpher, gleichmächtiger wohlgeordneter Mengen

<u>Def.</u> von Aussagen β_κ induktiv:

$$\beta_\kappa := \begin{cases} \alpha_\kappa & \text{falls } \underbrace{\Sigma\cup\{\beta_\iota \mid \iota<\kappa\}}_{\Sigma_\kappa}\cup\{\alpha_\kappa\}\text{wfr} \\ \neg\alpha_\kappa & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\Sigma_\kappa := \Sigma\cup\{\beta_\iota \mid \iota<\kappa\}$

<u>Beh.1.:</u> Für $\kappa\le\xi$ ist Σ_κ wfr.

<u>Bew.:</u> (induktiv über κ)

Ind.Vor.: Beh.1.gilt für alle $\iota<\kappa$

Ind.Beh.: Beh.1. gilt für κ .

Fall 0: $\kappa=0$, $\Sigma_0=\Sigma$ nach Vor.

Fall 1: κ hat einen Vorgänger $\kappa=\kappa'+1$

$$\Rrightarrow \Sigma_\kappa = \Sigma\cup\{\beta_\iota \mid \iota\le\kappa'\} = \underbrace{\underbrace{\Sigma\cup\{\beta_\iota \mid \iota<\kappa'\}}_{\Sigma_{\kappa'}}\cup\underbrace{\{\beta_{\kappa'}\}}_{\begin{matrix}\{\alpha_{\kappa'}\}\\ \{\neg\alpha_{\kappa'}\}\end{matrix}}}_{\text{wfr}}$$

wid. frei nach Ind.Vor.

Σ_κ wid.frei nach Def.

wid. frei nach Satz S.45

Fall 2: κ hat keinen Vorgänger (κ ist Limeszahl)

Nach Endlichkeitssatz für Σ_κ: Sei Σ'(kl) endliche Teilmenge von Σ_κ.

Genügt z.z.: wfr Σ'.

Sei υ maximal mit $\beta_\upsilon\in\Sigma'$. $\kappa'=\upsilon+1<\kappa$

$\Rrightarrow$ $\Sigma'\subseteq\Sigma\cup\{\beta_\iota \mid \iota<\kappa'\}=\Sigma_{\kappa'}$ $\Rrightarrow$ Σ' wfr. nach Ind.vor

---

Def: $B := \{\beta_\iota \mid \iota<\xi\}$ (B= groß β)

$\Gamma := \Sigma\cup\{\beta_\iota \mid \iota<\xi\} = \Sigma\cup B$

Dann ist Γ wfr, da $\Gamma=\Sigma_\xi$.

<u>Beh. 2:</u> Für jede atomare Aussage α ist $\alpha\in B$ oder $\neg\alpha\in B$.

(wegen $\alpha=\alpha_\kappa$ für ein gewisses κ , $\beta=\begin{cases}\alpha_\kappa\\ \neg\alpha_\kappa\dots\end{cases}$)

<u>Beh. 3:</u> Wenn α atomare Aussage ist und $\Gamma\vdash\alpha$, so $\alpha\in B$.

<u>Bew.:</u> Wäre $\alpha\notin B$, so wäre $\neg\alpha\in B$ also $\Gamma\vdash\neg\alpha$ $\Rrightarrow$ Γ wv.

Im weiteren Verlauf des Beweises konstruiert man ein Modell für $\Gamma = \Sigma \cup B$ (Nicht nur für Σ).

<u>Definition:</u> Relation $\sim$ zwischen variablenfreien Termen:
$\sigma \sim \tau \;:\Longleftrightarrow\; \Gamma \vdash \sigma \doteq \tau$

<u>Vorüberlegung:</u> Wenn $\mathfrak{A}$ Modell von Γ, so:
Wenn $\sigma \sim \tau$, so $\models_{\mathfrak{A}} \sigma \doteq \tau$, d.h. σ, τ haben denselben Wert.
Wenn $\sigma \not\sim \tau$, so $\neg \sigma \doteq \tau \in B \subseteq \Gamma$, also $\models_{\mathfrak{A}} \neg \sigma \doteq \tau$, d.h. σ und τ haben verschiedene Werte.
Bijektion zwischen Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ und gewissen Elementen von $\mathfrak{A}$. Ein solches $\mathfrak{A}$ ist gesucht. Methode: Äquivalenzklassen als Elemente verwenden.

<u>Beh. 4:</u> $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

<u>Beweis:</u> (R) $\sigma \sim \sigma$ $\quad \Gamma \vdash \sigma \doteq \sigma$ $\quad$ klar

(S) Wenn $\sigma \sim \tau$, so $\tau \sim \sigma$:
denn aus $\Gamma \vdash \sigma \doteq \tau$ folgt $\Gamma \vdash \tau \doteq \sigma$.

(T) Wenn $\Gamma \vdash \sigma_1 \doteq \sigma_2$, $\Gamma \vdash \sigma_2 \doteq \sigma_3$, so $\Gamma \vdash \sigma_1 \doteq \sigma_3$
($\sigma_1 \sim \sigma_2$ und $\sigma_2 \sim \sigma_3$, so $\sigma_1 \sim \sigma_3$)

<u>Beh. 5:</u> (i) Wenn $\sigma_1 \sim \tau_1, \ldots, \sigma_{r(f)} \sim \tau_{r(f)}$, so
$f\sigma_1 \ldots \sigma_{r(f)} \sim f\tau_1 \ldots \tau_{r(f)}$ $\quad (f \in \mathfrak{F})$
($\sim$ ist sogar Konkruenzrelation).

(ii) Wenn $\sigma_1 \sim \tau_1, \ldots, \sigma_{r(R)} \sim \tau_{r(R)}$ und $\Gamma \vdash R\sigma_1 \ldots \sigma_{r(R)}$, so ist $\Gamma \vdash R\tau_1 \ldots \tau_{r(R)}$ $\quad (R \in \mathfrak{R})$

<u>Beweis:</u> (i) $\Gamma \vdash \sigma_\rho \doteq \tau_\rho$ $\quad (\rho = 1, \ldots, r(f))$
z.z. $\Gamma \vdash f\sigma_1 \ldots \sigma_{r(f)} \doteq f\tau_1 \ldots \tau_{r(f)}$
(mit I1 bis I4).
1. Schritt des Leibnizschen Ersetzbarkeitstheorems S. 37

(ii) Sei $\Gamma \vdash \sigma_\rho \doteq \tau_\rho$ $\quad (\rho = 1, \ldots, r(R)$

genügt z.z. $\Gamma \vdash R\sigma_1 \ldots \sigma_{r(R)} \rightarrow R\tau_1 \ldots \tau_{r(R)}$
$\Gamma \vdash \ldots$ $\qquad$ (Abtr)

das ergibt sich aus dem L.E für Formeln
(vgl. 1. Schritt im Beweis)

muß vorausgesetzt werden, daß L mind. eine Individuenkonstante enthält, denn variablenfreie Term ist aus Individuenkonstanten aufgebaut. Enthält L keine Individuenkonstante, dann $U_{\mathfrak{A}} = \emptyset$ ↯ zur Def der Struktur

Äquivalenzklasse, die σ enthält: $\bar{\sigma} := \{\tau \mid \tau \sim \sigma\}$

?

Die Struktur $\mathfrak{A}$ wird definiert durch: 1) $U_{\mathfrak{A}} := \{\bar{\sigma} \mid \sigma$ variablenfreier Term$\}$

2) Für jedes Funktionszeichen f soll gelten

$$f_{\mathfrak{A}}\bar{\sigma}_1 \ldots \bar{\sigma}_{r(f)} := \overline{f\sigma_1 \ldots \sigma_{r(f)}}$$

3) Für jedes Relationszeichen R soll gelten

$$R_{\mathfrak{A}}\bar{\sigma}_1 \ldots \bar{\sigma}_{r(R)} \text{ gdw } \Gamma \vdash R\sigma_1 \ldots \sigma_{r(R)},$$

z.z.: die beiden Definitionen$^{2),3)}$ sind unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

Für die Funktionszeichen gilt dies nach Beh. 5(i)

Für die Relationszeichen gilt dies nach Beh. 5(ii).

<u>Beh.(*):</u> $\mathfrak{A}$ ist ein Modell von Γ (und damit auch von Σ).

<u>Beh. 6:</u> Für variablenfreies σ und beliebigen Belegungen h über $\mathfrak{A}$ ist $w_{\mathfrak{A}}(\sigma,h) = \bar{\sigma}$.

<u>Bew.:</u> (induktiv über den Termaufbau).

für nullstellige Funktionszeichen f:

~~$w_{\mathfrak{A}}(f,h) = f_{\mathfrak{A}} = \bar{f}$~~

allgemein:

$$w_{\mathfrak{A}}(f\sigma_1 \ldots \sigma_{r(f)},h) = f_{\mathfrak{A}}\bar{\sigma}_1 \ldots \bar{\sigma}_{r(f)} = \overline{f\sigma_1 \ldots \sigma_{r(f)}}\ .$$

<u>Beh. 7:</u> Für jede quantorenfreie Aussage α und jede Belegung h über $\mathfrak{A}$ gilt:

$$W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h) = \begin{cases} W \text{ gdw } B\vdash\alpha & \text{gdw } \Gamma\vdash\alpha \\ F \text{ gdw } B\vdash\neg\alpha \end{cases}$$

(≡> Für jede quantorenfreie Aussage α gilt $B\vdash\alpha$ oder $B\vdash\neg\alpha$).

<u>Beweis:</u> (induktiv über den Formelaufbau)

1. α ist atomar. $\alpha = \begin{cases} R\sigma_1 \ldots \sigma_{r(R)} \\ \sigma \doteq \tau \end{cases}$

verwendet wird:
α atomare Aussage : $\boxed{B \vdash \alpha \quad \text{gdw} \quad \Gamma \vdash \alpha}$

Bew ① $B \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$

② $B \nvdash \alpha \Rightarrow \neg\alpha \in B \Rightarrow B \vdash \neg\alpha$
$\Rightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha$. wäre $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma$ wv. ↯
$\Rightarrow \Gamma \nvdash \alpha$

Siehe Rückseite

Fall 1: $\alpha\in B \quad \Rightarrow$

$$\Gamma\vdash\alpha: \begin{cases} R\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_{r(R)}, & W_{\mathfrak{A}}(R\sigma_1\ldots\sigma_{r(R)},h)=W \\ \sigma\sim\tau, \quad \bar\sigma=\bar\tau, & W_{\mathfrak{A}}(\sigma\doteq\tau,h) = W. \end{cases}$$

Fall 2: $\alpha\notin B \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha\in B \quad \Rightarrow$

$$\Gamma\nvdash\alpha \begin{cases} \text{nicht } R\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_{r(R)}, & W_{\mathfrak{A}}(\ldots,h)=F \\ \bar\sigma\neq\bar\tau, & W_{\mathfrak{A}}(\sigma\doteq\tau,h) = F. \end{cases}$$

2. Wegen Quantorenfreiheit und Äquivalenzen

siehe Rückseite ① genügt: z.z. für $\neg$, $\wedge$.

Gelte Beh. für α,β

$$\neg: \quad W_{\mathfrak{A}}(\neg\alpha,h) = \mathrm{non}(W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h)) = \begin{cases} F \text{ gdw } B\vdash\alpha \text{ gdw } B\vdash\neg\underbrace{\neg\alpha} \\ W \text{ '' } B\vdash\neg\alpha \text{ '' } B\vdash\underbrace{\neg\alpha} \end{cases}$$

$$\wedge: \quad W_{\mathfrak{A}}(\alpha\wedge\beta,h) = \mathrm{et}(W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h),W_{\mathfrak{A}}(\beta,h))$$

$$\begin{cases} W \text{ gdw } W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h) = W \text{ und } W_{\mathfrak{A}}(\beta,h) = W \ldots \\ F \text{ gdw } \quad \text{''} \quad = F \text{ oder } \quad \text{''} \quad = F \ldots \end{cases}$$

$\ldots$ gdw $B\vdash\alpha$ und $B\vdash\beta$ gdw $B\vdash\alpha\wedge\beta$

Siehe links $\ldots$ gdw $\underbrace{B\vdash\neg\alpha \text{ oder } B\vdash\neg\beta}_{\text{L.S.}}$ gdw $\underbrace{B\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)}_{\text{R.S.}}$

gelte L.S. nicht dann $B\vdash\alpha$ und $B\vdash\beta$ (nach Ind. Vor.) $\Rightarrow$ $B\vdash\alpha\wedge\beta$ (Widerspruch).

zu Beh.(*): Sei $\alpha\in\Gamma$.

Ann.: $W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h) = F$, dann $B\vdash\neg\alpha$ nach Lemma 1

$\Rightarrow$ $\Gamma\vdash\neg\alpha$

$\Rightarrow$ Γ wv (Widerspruch)

$\Rightarrow$ $W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h) = W$ für jedes Element von Γ.

Damit ist Teil I bewiesen.

Das so konstruierte Modell heiße das Termmodell von Σ (i.b.a. die vorgegebene Nummerierung von Π)

Beisp.: $\neg(Rc\wedge Sc)\in\Sigma$ (Wimmer 19[illegible])

Beweis zu Teil II:

Genügt für wfr Mengen Σ von pränexen Aussagen. S 49

Hilfskonstruktion: Sei Φ eine beliebige Menge von Pränexen Aussagen. Sei $L = L(\Phi) = \mathring{\Phi}$ die kleinste Sprache mit $\Phi\subseteq \mathrm{Aus}_L$ (mit Funktions- und Relationszeichen, die in Φ vorkommen)

Für jedes $\eta\in\Phi$ gilt genau einer der folgenden Fälle:

a. η ist von der Form $\forall x\alpha$ (η ist eine "Allheitsaussage"),
b. η ist von der Form $\exists x\alpha$ (η ist eine "Existenzaussage"),
c. η ist quantorenfrei.

Für jede in Φ vorkommende Existenzaussage η eine neue (in L nicht vorhandene) (Individuen-)Konstante c_η hinzunehmen.
(d.h. ein nullstelliges Funktionszeichen).
Damit erhält man eine Sprache L^*.

$\Phi^*\subseteq Aus_{L^*}$ entstehe aus Φ durch Hinzunahme von:

c_η alle verschieden

a. Zu jeder Allheitsaussage $\forall x\alpha$ von Φ sämtliche Aussagen der Form α^x/τ, wobei τ ein variablenfreier Term der Sprache L ist.
b. Zu jeder Existenzaussage $\exists x\alpha$ von Φ die Aussage α^x/c_η .

also:

c_η alle verschieden

präzise **Definition:** $\Phi^\forall := \{\alpha^x/_\tau \mid \forall x\alpha\in\Phi$ und τ variablenfreier Term mit Funktionszeichen von $\Phi\}$.

$\Phi^\exists := \{\alpha^x/c_\eta \mid \eta=\exists x\alpha\in\Phi\}$.

$\Phi^* := \Phi\cup\Phi^\forall\cup\Phi^\exists$.

Behauptung 1: Φ^* ist eine Menge von pränexen Aussagen.

Behauptung 2: $|\Phi^*| \leq |Fml_{L^*}| \leq \max(|\Phi|,\aleph_0)$

Bew.: 1. Φ endlich $\Rightarrow \mathfrak{F}\cup\mathfrak{R}$ endliche Menge
auch : $\mathfrak{F}^*\cup\mathfrak{R}$ endl. Menge
$\Rightarrow |\Phi^*| \leq |Fml_{L^*}| \leqq \aleph_0$

2. Φ unendlich: $|\mathfrak{F}\cup\mathfrak{R}| \leq \aleph_0|\Phi| \leq |\Phi|$
$|\mathfrak{F}^*| \leq |\Phi|$
$\Rightarrow |\Phi^*|\leq|Fml_{L^*}| = |\Phi|$

Behauptung 3: Wenn Φ syntaktisch wfr in L, so ist Φ^* syntaktisch wfr in L^*.

wenn $wfr_L\,\Phi$, so $wfr_{L^*}\,\Phi^*$

α^x/τ existiert da τ variablenfrei

Hierzu zunächst zwei Lemmata:

<u>Lemma a.:</u> Wenn $\Gamma \cup \{\underbrace{\alpha^{x}/\tau}_{\text{nicht notw. Vorr: } \in \Phi^{\forall}}\} \vdash_{L'} \delta$, so $\Gamma \cup \{\underbrace{\forall x \alpha}_{\text{nicht notw. Vorr: } \in \Phi}\} \vdash_{L'} \delta$. $(L \subseteq L' \subseteq L^{*})$

gilt allg. für beliebiges L', Γ

<u>Bew.:</u> $\vdash \forall x\alpha \to \alpha$

$\vdash \forall x\alpha \to \alpha^{x}/\tau$

$\Gamma \cup \{\forall x\alpha\} \vdash \forall x\alpha$

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\forall x\alpha\} \vdash \alpha^{x}/\tau$

$\mathrm{Bw}_{L'}(\Gamma \cup \{\alpha^{x}/\tau\}) \subseteq \mathrm{Bw}_{L'}(\Gamma \cup \{\forall x\alpha\})$

Bw_{L}:= Menge der beweisbaren Formeln.

<u>Lemma b.:</u> Wenn $\Gamma \cup \{\alpha^{x}/c\} \vdash_{L'} \delta$ (wobei α^{x}/c Aussage) und c nicht in $\Gamma \cup \{\delta, \alpha\}$ (c nullstelliges Funktionszeichen), so ist $\Gamma \cup \{\exists x\alpha\} \vdash_{L''} \delta$, wobei L" aus L' durch Weglassen von c ensteht.

<u>Bew.:</u> (nach Deduktionstheorem) S. 42

$\Gamma \vdash_{L'} \alpha^{x}/c \to \delta$. Sei $(\beta_1, \dots, \beta_r)$ eine Beweisfolge für diese Formel aus Γ in L'. In dieser Beweisfolge überall c durch eine neue Variable y ersetzen (formal sieht dies aus wie "Subst" S. 22 α^{c}/y). Dadurch ensteht eine Beweisfolge für

die sind [illegible]

$\Gamma \vdash_{L''} \alpha^{x}/y \to \delta$. ③

$\Rightarrow \Gamma \vdash_{L''} \exists y \alpha^{x}/y \to \delta$ (v.Part.)

$\Rightarrow \Gamma \vdash_{L''} \exists x\alpha \to \delta$ (Geb.Umb.) S. 41

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\exists x\alpha\} \vdash \delta$ (Abtr) q.e.d.

<u>Beweis zu Beh.3:</u> Ann. Φ^{*} sei wv in L^{*}. $wv_{L^*}\ \Phi^*$

$\Rightarrow \Phi^{*} \vdash_{L^*} \underbrace{\gamma \wedge \neg\gamma}_{\delta}$ mit $\gamma \in \mathrm{Fml}_{L}$.

(Endlichkeitssatz für die Beweisbarkeit). S. 44

Siehe ① $\Rightarrow \Phi \cup \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s\} \vdash_{L'} \delta$, wobei

$\varepsilon_{\sigma} \in \Phi^{\forall} \cup \Phi^{\exists}$, L' mit nur endlich vielen Konstanten c_{η}.

Siehe ② mit Lemmata a.,b.:

$\Rightarrow \Phi \vdash_{L} \delta \Rightarrow \Phi$ wv

<u>Beh.</u>: diejenigen c_i, die in $\{\varepsilon_1, .. \varepsilon_s\}$ auftreten und diejenigen c_i, die in L' auftreten können disjunkt sein.

z.B: $\underbrace{\{c_1 = c_2, Rxy\}}_{\Gamma} \vdash_{L=\{c\}} c \equiv c$

$c_1 \in L(\Gamma)$ aber $c_1 \notin L$ und $c \in L$ aber $c \notin L(\Gamma)$

<u>Beweis für Teil II:</u> o.b.d.A: Kommen in Σ wenigstens ein Existenzquantor oder eine IndividuenKonstante vor (sonst z.B. $\exists x\, x \doteq x$)

↓

sonst wäre Struktur $U_{\mathfrak{A}}$ (unten) $= \emptyset$

$L(\Sigma')$ enthält dann keine ~~[illegible]~~ Individuenkonst.

① Sei Σ wfr Menge von (o.B.d.A. pränexen) Aussagen.

$\Sigma_0 := \Sigma$

$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k^{\star}$ (nach Hilfskonstruktion)

$\bar{\Sigma} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k$

$\Sigma, \Sigma^{*}, \Sigma^{**}, \Sigma^{***}, \ldots\ldots$

Dann ist jedes Σ_k wfr (durch Induktion über k, Beh. 3 jedesmal anwenden).

Nach dem Endlichkeitssatz für die Widerspruchsfreiheit folgt:

$\bar{\Sigma}$ ist wfr. (jede endl. Teilmenge enthalten in einem Σ_k).

Mit Beh. 2 (induktiv): $|\Sigma_k| \le \overset{|Fml_{L(\Sigma_k)}|}{\le} \max(|\Sigma|, \aleph_0)$.

also auch $|\bar{\Sigma}| \le \underset{|Fml_{L(\bar{\Sigma})}|}{\le} \max(|\Sigma|, \aleph_0)$.

Sei nun $\Sigma' :=$ die Menge der quantorenfreien Aussagen in $\bar{\Sigma}$.

($\Sigma' := \{\alpha \mid \alpha \in \bar{\Sigma}$ und α quantorenfrei).

Sei $\mathfrak{A}$ das wie in Teil I konstruierte Modell von Σ' (o.B.d.A. in der Sprache $L(\Sigma')$

o.b.d.A wird bei Zusatzbetrachtung S.53 verw.

<u>Behauptung 4:</u> $\mathfrak{A}$ ist Modell von $\bar{\Sigma}$.

<u>Bew.:</u> (.)

es genügt zu zeigen für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(*) jede Aussage η in $\bar{\Sigma}$ mit n Quantifizierungen (im Präfix) ist in $\mathfrak{A}$ gültig.

(induktiv über n):

n=0: klar ($\eta \in \Sigma'$)

Gelte (*) für n und sei η eine beliebige Aussage aus $\bar{\Sigma}$ mit n+1 Quantifizierungen, z.z: $\models_{\mathfrak{A}} \eta$

<u>Fall 1:</u> $\eta = \forall x \alpha$. α pränexer **Formel** mit n Quantifizierungen.

Sei $x \in U_{\mathfrak{A}}$ bel. z.z.: $W_{\mathfrak{A}}(\alpha, h_x^x) = W$.

$x = \bar{\sigma}$ für ein gewisses σ.

η und die Konstanten (und Funktionszeichen) von σ kommen in einem gewissen Σ_k vor. Damit:

$\underbrace{\alpha^x/\sigma}_{\text{n Quantoren}} \in \Sigma_k^{\star} = \Sigma_{k+1} \subseteq \bar{\Sigma}$.

$\Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \alpha^x/\sigma$. nach Induktionsvor.

S.51 Def. ϕ^*

$\forall x\, \alpha \in \Sigma_k$

$\alpha^x/\sigma \in \bar{\Sigma}_{k+1}$

$\sigma_i \in \Sigma_i$

$\sigma_j \in \Sigma_j$

nach Beh.6 von Teil I : $w_{\mathfrak{A}}(\sigma,h) = \bar{\sigma}$

S.23

mit Überführungstheorem: $W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h^{x}_{x}) = W_{\mathfrak{A}}(\alpha^{x}/\sigma,h) = W$

q.e.d.

Fall 2: $\eta=\exists x\alpha$

(wie vorher) z.z.:

Es gibt ein $x \in U_{\mathfrak{A}}$ mit $W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h^{x}_{x}) = W$

Sieh [illegible]

η ist in einem Σ_k. ⇒ $\underbrace{\alpha^{x}/c_{\eta}}_{n \text{ Quantoren}} \in \Sigma^{*}_{k} = \Sigma_{k+1}$

genügt: Für $x=\bar{c}_{\eta}$ ist $W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h^{x}_{x}) = W$

($\bar{c}_{\eta}$ Äquivalenzklasse von c_{η}).

$\models_{\mathfrak{A}} \alpha^{x}/c_{\eta}$, $w_{\mathfrak{A}}(c_{\eta},h) = \bar{c}_{\eta}$

mit Überführungstheorem:

$W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h^{x}_{x}) = W_{\mathfrak{A}}(\alpha^{x}/c_{\eta},h) = W$ q.e.d.

S.53

Damit ist der Vollständigkeitssatz bewiesen !!!

$|\bar{\Sigma}| \leq Fml_{L(\bar{\Sigma})} \leq max(|\Sigma|,\aleph_0)$

Zusatzbetrachtung: $|U_{\mathfrak{A}}| \leq |Tm_{L(\Sigma')}| \leq max(|\Sigma|,\aleph_0)$ ①

Zusatz: (SATZ VON LÖWENHEIM, 1915):

Jede Syntaktisch wfr ~~Menge~~ Σ von Aussagen besitzt ein Modell $\mathfrak{A}$ mit der Mächtigkeit $\leq max(|\Sigma|,\aleph_0)$.

Für abzählbare Sprachen .. ein höchstens abzählbares Modell

Folgerungen aus dem Vollständigkeitssatz:

② Satz: wfr Σ gdw $\underbrace{\Sigma \text{ ein Modell besitzt}}$.

Σ ist semantisch wfr.: $\xleftrightarrow{def}$ Σ besitzt ein Modell

Das gilt nach dem Koinzidenztheorem für jede Sprache L' mit $\Sigma \subseteq Fml_{L'}$, also ergibt sich

③ Satz: Wenn Σ wfr in L, so auch in jeder Sprache L' mit $\Sigma \subseteq Fml_{L'}$.

Satz: ENDLICHKEITSSATZ FÜR MODELLE (engl. COMPACTNESS THEOREM):

Σ besitzt ein Modell gdw jede endliche Teilmenge von Σ ein Modell besitzt.

Satz: ENDLICHKEITSSATZ FÜR DAS FOLGERN:

Wenn $\Sigma \models \alpha$, so existiert eine endliche Teilmenge Σ' von Σ mit $\Sigma' \models \alpha$.

① $\Sigma \vdash \alpha$ dann existiert endl. Teilmenge Σ' von Σ mit $\Sigma' \vdash \alpha$

② Σ wfr gdw jede endl. Teilmenge von Σ' ist wfr

Anmerkung: Der Vollständigkeitssatz gilt auch für Teilkalküle mit folg. Beweisbarkeitsbegriffen

- für die Prädikatenlogik ohne Identität ($\doteq$)

  $\vdash$ analoger Begriff ohne I1 bis I4 und ohne $\doteq$ in den logischen Axiomen.

  Bew.: analog, nur ist die Äquivalenzklassenbildung entbehrlich, man nimmt variablenfreie Terme als Elemente von $U_{\mathfrak{A}}$ selbst.

- für Prädikatenlogik ohne Funktionszeichen

  analog

- für Aussagenlogik

  Aussagenvariablen:= nullstellige Relationszeichen

  $r(R) = 0$: $W_{\mathfrak{A}}(R,h) = R_{\mathfrak{A}} = \underbrace{s_{\mathfrak{A}}}(R) = \begin{cases} W \\ F \end{cases}$

  aussagenlogische Belegung

  Formeln: mit $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ aus Aussagenvariablen gebildet.
  i.a.: abzählbar viele Aussagenvariablen vorausgesetzt.

  Vollständigkeitssatz mit $\vdash$: A1 bis A15, Abtr (als einzige Schlußregel).

Weitere Folgerungen aus Zusatz:

Satz: SATZ VON LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI

Vor.: Σ besitzt ein unendliches Modell oder Modelle beliebig großer endlicher Mächtigkeit (d.h. zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein Modell mit Mächtigkeit $\geq k$).

Beh.: Zu jeder Kardinalzahl $\mathfrak{m} \geq |Fml_{L(\Sigma)}| \overset{S.14}{=} \max(\aleph_0, |\mathfrak{F}|, |\mathfrak{R}|)$ gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$ von Σ mit $|\mathfrak{A}| = \mathfrak{m}$. Individuen Konst.
Dabei sei def. $|\mathfrak{A}| := |U_{\mathfrak{A}}|$ Mächtigkeit der Struktur $\mathfrak{A}$

Beweis: Sprache erweitert durch Hinzunahme von $\mathfrak{m}$ Konstanten (Menge $\mathfrak{C}$ mit $|\mathfrak{C}| = \mathfrak{m}$).
In dieser Sprache bilden wir
$\Sigma^* := \Sigma \cup \{\neg c \doteq d \mid c, d \in \mathfrak{C}, c \neq d\}$.

Beh.(*): Σ^* ist wfr

dazu genügt: z.z. Jede endliche Teilmenge Σ' von Σ^* ist wfr.

In Σ' liegen nur endlich viele der Ungleichungen $\neg c \doteq d$. (etwa für nur k Konstanten). (?) wo wird $|\mathfrak{A}| \geq k$ verwendet? zeige $W_{\mathfrak{A}}(\neg c \doteq d, h) = w$

$\mathfrak{A}'$ Modell von Σ mit $|\mathfrak{A}'| \geq k$. daraus Modell von Σ' $\mathfrak{A}' \cup \{c_{\mathfrak{A}}\}$

Nach Zusatz $\Rightarrow$ Σ^* hat ein Modell $\mathfrak{A}^*$ mit der Mächtigkeit

$|\mathfrak{A}^*| \leq \max(\aleph_0, |\overset{c_{\mathfrak{A}^*}}{\mathfrak{F}} \cup \mathfrak{L}|, |\mathfrak{R}|) = \mathfrak{m}$. $|\mathfrak{A}^*| = m$. Zusätzliche nullst. Op. $c_{\mathfrak{A}^*}$ weglassen. $\mathfrak{A}$ Mod Σ. $|\mathfrak{A}| = m$

(?)

$:= U_{\mathfrak{A}^*}$

Sei $\mathfrak{A}^*$ derart: $|\mathfrak{A}^*| \geq \mathfrak{m}$, da $\mathfrak{A}^*$ Mod$\{\neg c \doteq d | \ldots\}$

(?)

$\Rightarrow |\mathfrak{A}^*| = \mathfrak{m}$.

Zusätzliche nullstellige Funktionen $c_{\mathfrak{A}}$ weglassen:

$\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ Mod Σ, $|\mathfrak{A}| = \mathfrak{m}$

Korollar: Vor.: $|Fml_{L(\Sigma)}| \leq \mathfrak{m} < \mathfrak{n}$

Beh.1: Wenn Σ ein Modell der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ besitzt, so auch eines der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$. (Löw-Sko-Tar abwärts).

Beh.2: Wenn Σ ein Modell der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ besitzt, so auch eines der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$. (Löw-Sko-Tar aufwärts).

Folgerungen: Wenn $\mathfrak{A}$ eine unendliche Strukur ist, so kann $\mathfrak{A}$ nicht bis auf Isomorphie charakterisiert werden durch ein Axiomensystem im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe.

Ann.: doch, Ax.syst. Σ . Σ besitzt auch Modelle anderer Mächtigkeit (nach Löw-Sko-Tar).
$\Rightarrow$ nicht isomorph zu $\mathfrak{A}$.

Eigentümliche Folgerung: für Mengenlehre, die im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe axiomatisiert ist.

Formalisiert in einer Sprache $L(\epsilon)$ (abzählbar) mit nur einer Sorte von Variablen (für Klassen) und der zweistelligen Relationskonstanten ϵ als einzige eigentliche Konstante.

Ann.: das Axiomensystem $\Sigma_m \subset L(\epsilon)$ dieser Mengenlehre sei wfr.

?? $\Rightarrow$ es gibt ein abzählbares Modell $\mathfrak{M}$ von Σ_M. Aus den

$x \in A$ 2 versch. Sorte von Variablen

Behauptung:

$\max(\chi_0, |\mathcal{F} \cup \Sigma|, |\mathcal{R}|) = \mathfrak{m}$

Beweis:

$\max(\chi_0, |\mathcal{F} \cup \Sigma|, |\mathcal{R}|) \leq \max(\chi_0, |\mathcal{F}|, |\Sigma|, |\mathcal{R}|)$

$\leq \max(\underbrace{\max(\chi_0, |\mathcal{F}|, |\mathcal{R}|)}_{\leq \mathfrak{m}}, \underbrace{|\Sigma|}_{= \mathfrak{m}}) \leq \mathfrak{m}$

gilt wenn $\mathcal{F}$ oder Σ mindestens Mächtigkeit χ_0 hat

Verwendet wird: $|\mathcal{F} \cup \Sigma| \leq \max(|\mathcal{F}|, |\Sigma|)$

② gilt dies allgemein?

$\Rightarrow \mathfrak{m} \overset{\text{Def}}{=} |\Sigma| \leq \cancel{\max} |\Sigma \cup \mathcal{F}|$

$\leq \max(\chi_0, |\mathcal{F} \cup \Sigma|, |\mathcal{R}|)$ $\square$

$\mathfrak{M}^*| \leq \max(|\Sigma^*|, \chi_0) \leq (\mathrm{Fml}_{L^*(\text{[illegible]})}, \chi_0)$

$\leq \max(\chi_0, |\mathcal{F} \cup \Sigma|, |\mathcal{R}|, \chi_0) = \max(\chi_0, |\mathcal{F} \cup \Sigma|, |\mathcal{R}|)$

um Satz von
owenheim/Skolem

Beisp.: $1, .., k \in U_{\mathfrak{A}'}$
$x_1, .., x_k \in U_{\mathfrak{A}'}$

$(c_1)_{\mathfrak{A}'} = \mathfrak{M}\ x_1$

$(c_2)_{\mathfrak{A}'} = \mathfrak{B}\ x_2$

$\vdots$

$= \mathfrak{A}\ x_k$

Zu S. 56 Zeige: $|\mathfrak{A}^*| \geq m$.

Betrachte die Menge ~~[illegible]~~ $M := \{ c_{\mathfrak{A}^*} \mid c \in C \} \subseteq U_{\mathfrak{A}^*}$

diese hat Mächtigkeit m

$|M| = m$, $M \subseteq U_{\mathfrak{A}^*}$, also $|U_{\mathfrak{A}^*}| \geq m$.
$|\mathfrak{A}^*| \geq m$.

$$\alpha_i(\tau_1, .., \tau_k)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \not\Downarrow$$

$$\exists x_1 \dots \exists x_k\, \alpha_i(x_1, .., x_k) \qquad \forall x_1\ \forall x_k \alpha_i$$

Axiomen von Σ_M läßt sich beweisen, dass es eine überabzählbare Menge gibt. Dieser Satz ist auch in $\mathfrak{M}$ gültig. d.h. es gibt in $\mathfrak{M}$ ein Element, das eine überabzählbare Menge ist (also überabzählbar viele Elemente besitzt). Elemente dieser Menge müssen aber auch Elemente von $\mathfrak{M}$ sein, also kann dieser Menge höchstens abzählbar viele Elemente besitzen. Nur scheinbarer Widerspruch:
Der Begriff der Abzählbarkeit bezieht sich auf die zugrunde gelegte Mengenlehre, während sich der Begriff der Überabzählbarkeit hier auf das Modell $\mathfrak{M}$ bezieht. Daraus folgt, daß die Begriffe wie Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit etc. <u>nicht absolut</u> sind, sondern von der jeweils verwendeten Mengenlehre abhängen.

Im folgenden betrachten wir das Axiomensystem für Körper (in $L(+,-,.,0,1,<)$). (OF : ordered fields) Σ_{OF}.
(endlich) $\Sigma_{OF} := \{ x+(y+z) \doteq (x+y)+z \ , \ldots\}$

Axiomensystem für angeordnete Körper der Charakteristik p
$\Sigma_{OF} \cup \{\chi_p\}$ wobei $\chi_p := \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{p} = 0$

der Charakteristik 0:

$\Sigma_0 := \Sigma_{OF} \cup \{\neg\chi_p \ \text{p Primzahl}\}$.

<u>Beh.:</u> Es gibt kein gleichwertiges endliches Axiomensystem.

<u>Satz (allg.):</u> Wenn $\alpha \in Fml_L$ und α gültig in jedem ~~angeordneten~~ Körper der Charakteristik 0, so existiert p_0, so daß α auch gültig in jedem angeordneten Körper der Charakteristik $p > p_0$.

<u>Bew.:</u> Vor.: $\Sigma_0 \models \alpha$, dann gibt es eine endliche Teilmenge Σ' von Σ_0 mit $\Sigma' \models \alpha$.

<u>Satz:</u> Seien $q_1,\ldots,q_k$ Polynome mit ganzrationalen Koeffizienten in den Unbestimmten $u_1,\ldots,u_n$.
Wenn das Gleichungsystem
(*) $q_\kappa(x_1,\ldots,x_n) = 0 \quad (\kappa=1,\ldots,k)$
keine Lösung in einem Körper der Charakteristik 0 besitzt, so gibt es ein p_0, so daß für jedes $p \geq p_0$ (*) keine Lösung in einem Körper der Char. p besitzt.

$$q_{\kappa} = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n=0}^{l_1,\ldots,l_n} a_{\kappa,\lambda_1,\ldots,\lambda_k} x_1^{\lambda_1} \ldots x_k^{\lambda_k}$$

$$\alpha = \neg \exists x_1 \ldots \exists x_k (\bigwedge_{\kappa=1}^{k} \sum \underbrace{a_{\kappa,\lambda_1\ldots\lambda_n}} x_1^{\lambda_1} \ldots x_k^{\lambda_k} \doteq 0)$$

bez. durch entspr. Terme

α_{γ}

Term für die entspr. ganze Zahl

<u>Definition:</u> Ein angeordneter Körper $\mathfrak{A}$ heißt <u>archimedisch angeordnet</u> :<≡> zu jedem $x \in U_{\mathfrak{A}}$ gibt es ein n , so daß $x < \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{-mal}}$

ausgelassen

Ein angeordneter Körper $\mathfrak{A}$, der diese Bedingung nicht erfüllt, heißt <u>nicht-archimedisch angeordnet</u>. (x ist größer als jede natürliche Zahl).

<u>Satz:</u> Es gibt einen nicht-archimedisch angordneten Körper.

<u>Bew.:</u> In der Sprache L(+,-,.,0,1;<) wird rekursiv für jede natürliche Zahl n (bzw. das entsprechende Körperelement n.1) ein Term $\bar{n}$ eingeführt durch $\bar{0}=0$, $\overline{n+1}=\bar{n}+1$. Die Sprache wird durch eine neue Individuenkonstante c erweitert. Man bildet die Menge $\hat{\Sigma} = \Sigma_{OF} \cup \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $\alpha_n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{-mal}} < c$

Sei Σ' eine beliebige Teilmenge (endlich) von $\hat{\Sigma}$. Dann sei n_0 maximal so gewählt mit der Eigenschaft $a_{n_0} \in \Sigma'$, falls überhaupt ein a_n in Σ' liegt (sonst $n_0 \in$ beliebig), und $c = n_0+1$.
Dann ist der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der Zahl c als Interpretation der Konstanten c ein Modell von Σ'. Nach dem Endlichkeitssatz für Modell besitzt $\hat{\Sigma}$ ein Modell $\hat{\mathfrak{A}} = \langle U_{\hat{\mathfrak{A}}},+,-,.,0,1;c\ ;<\rangle$
Wegen der Gültigkeit von a_n in $\hat{\mathfrak{A}}$ ist n.1<c. Also ist $\mathfrak{A} = \langle U_{\hat{\mathfrak{A}}},+,-,.,0,1;<\rangle$ ein nicht-archimedisch angeordneter Körper.

Anmerkung: dieser Satz läßt sich auch algebräisch beweisen.

Satz: Es gibt kein $\Sigma\subseteq \mathrm{Fml}_{L(+,-,\cdot,0,1,<)}$, so daß
$\mathfrak{A}\,\mathrm{Mod}\,\Sigma$ gdw $\mathfrak{A}$ arch.angeordneter Körper.

Bew.: Gelte $\Rightarrow$ z.z.
$\hat{\Sigma} = \Sigma\cup\{\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\}$
wfr $\hat{\Sigma}$, weiter wie oben (s.S.99 Modelltheorie I)

Wir haben für eine Klasse K von Strukturen für L 3 Möglichkeiten kennengelernt:

a. K ist charakterisierbar durch ein endliches Axiomensystem. $\Sigma\subseteq \mathrm{Fml}_L$ (Bsp.: Klasse aller Körper, Ringe, etc. (endlich vieleAxiome)).

b. K ist nur durch ein unendliches, nicht aber durch ein endliches Axiomensystem charakterisierbar (Bsp.: Klasse der Körper der Charakteristik 0).

c. K ist nicht charakterisierbar durch ein Axiomensystem. (d.h. durch ein Axiomensystem in der 1. Stufe) (Bsp.: Klasse der archimedisch angeordenten Körper).

Mindestzahl-, Höchstzahl- und Anzahlformeln

Definition: $\sigma\neq\tau := \neg\sigma\doteq\tau$

$$\neq(\tau_1,\ldots,\tau_n) := \bigwedge_{\nu=1}^{n-1}\ \bigwedge_{\mu=\nu+1}^{n} \tau_\nu\neq\tau_\mu \qquad (n\geq 2,\ n\in\mathbb{N})$$

(z.B.: $n=3$: $\tau_1\neq\tau_2\wedge\tau_1\neq\tau_3\wedge\tau_2\neq\tau_3$).
($\tau_1,\ldots,\tau_n$ sind paarweise verschieden).

Definition: "Es gibt mindestens k Elemente x mit (der Eigenschaft) α ."

$$\overset{\geq k}{\exists} x\alpha := \begin{cases} \exists x_1\ldots\exists x_k(\neq(x_1,\ldots,x_k)\wedge \bigwedge_{\kappa=1}^{k} \underbrace{\alpha^{x}/x_{\kappa})}_{\alpha(x_{\kappa})} & \text{falls } k\geq \\ \exists x\alpha & \text{falls } k= \\ (\forall x x\doteq x) \text{ (jede Formel, die wahr ist).} & \end{cases}$$

wobei $x_1,\ldots,x_k$ nicht in α.

Definition: "Es gibt höchstens k Elemente x mit α".

$$\overset{\leq k}{\exists} x\alpha \;:=\; \neg \overset{\leq k+1}{\exists} x\alpha$$

Satz: $\overset{\leq k}{\exists} x\alpha$ Äq $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall x (\alpha \rightarrow \bigvee_{\kappa=1}^{k} x \doteq x_\kappa)$

Definition: "Es gibt genau ein Element x mit α".

$$\overset{=k}{\exists} x\alpha \;:=\; \overset{\geq k}{\exists} x\alpha \wedge \overset{\leq k}{\exists} x\alpha$$

Bei obigen Definitionen handelt es sich um relativierte Mindestzahl-, Höchstzahl- und Anzahlformeln.

Definition: Absolute Mindestzahl-, Höchstzahl- und Anzahl

a. $\overset{\geq k}{\exists} := \exists x_1 \ldots \exists x_k \not= (x_1, \ldots, x_k)$ "es gibt wenigstens k Elemente".

b. $\overset{\leq k}{\exists} := \neg \overset{\geq k+1}{\exists}$ "es gibt mindestens k Elemente"

c. $\overset{=k}{\exists} := \overset{\geq k}{\exists} \wedge \overset{\leq k}{\exists}$ "es gibt genau k Elemente".

[illegible]

Sätze: (i) $\models_{\mathfrak{A}} \overset{\geq k}{\exists}$ gdw $U_{\mathfrak{A}}$ hat mindestens k Elemente d.h. $|U_{\mathfrak{A}}| \geq k$

(ii) $\models_{\mathfrak{A}} \overset{\leq k}{\exists}$ gdw .... höchstens ... d.h. $|U_{\mathfrak{A}}| \leq k$

(iii) $\models_{\mathfrak{A}} \overset{=k}{\exists}$ gdw .... genau ... d.h. $|U_{\mathfrak{A}}| = k$

Aufzählungsverfahren

Intuitiv geht es um ein Verfahren, mit dem man alle Sätze der Prädikatenlogik (und anderer Theorien) gewinnen (erzeugen) kann.

Geg.: ein Sprache L mit Bezeichnungssystem $L = (\mathfrak{F}, \mathfrak{R}, r)$

höchstens abzählbar $\mathfrak{F} = \{f_i \mid i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$.

höchstens abzählbar $\mathfrak{R} = \{R_j \mid j \in J\}$, $J \subseteq \mathbb{N}$.

$V = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $\qquad m_i = m(i) = r(f_i)$ Stellenzahl s. S. 2

$\qquad\qquad\qquad\qquad n_j = n(j) = r(R_j)$

Vor.: I ist endlich oder $I = \mathbb{N}$ und m ist berechenbar .
J " " " $J = \mathbb{N}$ " n " " .

Sei $\Sigma \subseteq Fml_L$

"Def.": Σ ist entscheidbar gdw :<≡> Es gibt ein Entscheidungsverfahren für Σ , d.h. ein Verfahren mit dem man für jedes $\alpha \in Fml_L$ feststellen (entscheiden, nachprüfen) kann, ob $\alpha \in \Sigma$ oder $\alpha \notin \Sigma$.

Definition: Σ ist rekursiv aufzählbar :<≡> Es gibt ein berechenbare Funktion mit dem Definitionsbereich und dem Wertebereich Σ oder $\Sigma = \emptyset$.
(rekursive Aufzählung: $f(0), f(1), f(2), \ldots$)

(Mit --- unterstrichen bedeutet: Begriff noch nicht präzisiert).

Definition: Eine Theorie heißt $\left\{\begin{matrix}\text{rekursiv}\\ \text{endlich}\end{matrix}\right\}$ axiomatisierbar :

$$:\Longleftrightarrow \quad \text{Ex.}\left\{\begin{matrix}\text{entscheidbares}\\ \text{endliches}\end{matrix}\right\} \underbrace{\text{Axiomensystem}}_{Cn(\Sigma)=T} \text{ von T.}$$

Beispiel: endliches Axiomensystem: Theorie der angeordneten körper.
nicht endlich aber rekursiv: Theorie der Körper mit der Charakteristik 0.

Def (Schoning S 115)
$A \subset \Sigma^*$ heißt rekursiv aufzählbar, falls $A = \emptyset$ oder
falls eine totale (überall definiert) und berechenbare Fktion f gibt mit
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma^*$ und $A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$

T axiomatisierbar $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Axiomensystem (= Menge von Formeln) M mit $T = Cn(M)$

siehe links

Sprache L mit Bezeichnungssystem

Verfahren zur Nummerierung aller Zeichenreihen siehe S. 12

<u>Grundzeichen</u> υ: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, (,), \doteq, \underbrace{v_0, v_1, v_2, \ldots}_{v_i}, \underbrace{f_0, f_1, \ldots}_{f_i}, \underbrace{R_0, R_1, \ldots}_{R_i}$

Gödelnummern
gö(υ) : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

v_i: $3i+11$ gö(v_i)

f_i: $3i+12$ gö(f_i)

R_i: $3i+13$ gö(R_i)

<u>Def.:</u> Für Zeichenreihen $\xi = \upsilon_0 \ldots \upsilon_{l-1}$

Gödelnummer von ξ : $\text{Gö}(\xi) := \prod_{\lambda=0}^{l-1} p_\lambda^{\text{gö}(\upsilon_\lambda)}$

(auch bezeichnet mit $\ulcorner\xi\urcorner$)

$p_0=2$
$p_1=3$
$p_2=5$
$\vdots$
(p_i: i-te Primzahl)

Damit: rekursive Aufzählung aller Formeln $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$

" " " Terme $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$

geordnet nach Gödelnummern.

<u>Lemma:</u> Wenn ein Axiomensystem Σ entscheidbar ist, so ist Σ rekursiv aufzählbar.

<u>zum Beweis:</u> Aufz. aller Formeln, Entscheidungsverfahren wird auf jede Formel angewandt. Die streichen, die nicht in Σ ggf. Wiederholung.

<u>Satz:</u> Wenn T axiomatisierbar, so T rekursiv aufzählbar. $T = Cn(\Sigma)$ Axiomensystem

<u>genügt</u>: T besitzt ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem.

S.4, RS <u>zum Beweis:</u> Ax_L entscheidbar. → S. 19

es gibt rekursive Aufzählung von $Ax_L \cup \Sigma$: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$

Nur die beweisbaren Formeln erhält man durch:

Sei $Tm_n = \{\tau_\nu \mid \nu \leq n\}$

Formelmengen Φ_n, Θ_n induktiv definiert durch:

$\Phi_0 = \emptyset$, $\Theta_0 = \emptyset$

$\Phi_{n+1} = \{\alpha \mid \alpha$ entsteht aus Formeln von $\Theta_n \cup \{\alpha_n\}$ durch Anwendung einer Schlußregel, wobei nur Terme aus Tm_n verwendet werden, und $\alpha \notin \Theta_n \}$

Variablen für Gv, Gh, Pv, Ph
Terme für Sb

groß Theta

groß Phi

$= \Phi_{n+1}$

und $\Theta_{n+1} = \Theta_n \cup \{\alpha_n\} \cup \Phi_{n+1}$

Beh.1: Φ_n, Θ_n sind endlich (induktiv über n).

Ordnung möglich (Gödelisierung)

Delta

$\delta_o, \delta_1, \delta_2, \ldots$

α_o,	Φ_1	α_1,	Φ_2	α_2,	Φ_3
	Θ_1		Θ_2		Θ_3

Darin liegen genau die Sätze von T, d.h.

Beh.2: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Theta_n = T$

Bew.: $\subseteq$: $\Theta_n \subseteq T$ (induktiv über n).

$\supseteq$: Sei $\alpha \in T$, d.h. $\alpha \in Cn(\Sigma)$; $\Sigma \vDash \alpha$, $\Sigma \vdash \alpha$ d.h. es gibt Beweisfolge $(\beta_o, \ldots, \beta_r)$, darinsind nur endlich viele Elemente von $Ax_L \cup \Sigma$. In den Schlußregeln nur endlich viele Terme.

m so wählen, daß alle Axiome in Θ_m und alle Terme in Tm_m liegen.

Dann $\beta_\rho \in \Theta_{m+\rho}$ $(0 \leq \rho \leq r)$

$\alpha = \beta_r \in \Theta_{m+r}$.

UNIVERSALBEWEIS, da jedes Anfangsstück eine Beweisfolge und umgekehrt läßt sich durch Streichung von Formeln eine endliche Beweisfolge erhalten.

Beweis gibt ein effektives Verfahren.

Wenn $\Sigma \vdash \alpha$, so läßt sich das mit diesem Verfahren feststellen.

Wenn $\Sigma \nvdash \alpha$, dann liefert das Verfahren kein Ergebnis, das Verfahren bricht nicht ab.

Anwendung auf die Prädikatenlogik: $\Sigma = \emptyset$.

Satz: Die (Menge der Sätze der) Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.

ohne Beweis: Die Prädikatenlogik (d.h. $Cn(\emptyset)$) ist nicht entscheidbar.

Vor.: In L ist ein Relationszeichen mit Stellenzahl $r \geq 2$
oder ..... Funktionszeichen ... $r \geq 2$
oder .... zwei " ...... $r=1$
vorhanden.

Entscheidbare Theorien:

$Th(\mathbb{R})$ in $L(+,\cdot,0,1;<)$ (Tarski)
entsprechende Theorien(")

Theorie der abelschen Gruppen

$Th(\mathbb{N})$ in $L(+,0,1;<)$

Theorie der dichten off. Ordn.
der alg. abg. Körper
gegebener Char. p.

Menge der Sätze der P.L. mit
Präfix gegebener Bauart
für manche Präfixtypen

Unentscheidbare Theorien

$Th(\mathbb{N})$ $L(+,\cdot,0,1;<)$

Theorie aller Gruppen

$Th(\mathbb{Z})$ $L(+,\cdot)$

$Th(\mathbb{Q})$

Die Theorien $Th(\mathbb{N})$, $Th(\mathbb{Z})$, $Th(\mathbb{Q})$ sind auch nicht rekursiv aufzählbar; damit nicht rekursiv axiomatisierbar.

SATZ VON HERBRAND

Die pränexe Aussage $\eta = \pi\alpha$ sei ein Satz der Logik (logisch gültig). (d.h $\models \eta$)

$\pi' \neg \alpha$ äq $\neg \pi^{*}\alpha$

Konstruktion: $\neg\eta$ Äq $\overset{\text{duale Quantor}}{\pi'}\neg\alpha$, wobei

Def.: π' das zu π duale Präfix. (Ind. def. durch π' leer, falls π leer, $(\forall x\pi)' = \exists x\pi'$, $(\exists x\pi)' = \forall x\pi'$).

Individuenkonstante?

daß Σ $\pi = \emptyset$?!

Setze: $\Sigma = \{\pi'\neg\alpha\ ,\ c \doteq c\}$ wvΣ .

$\pi'\neg\alpha$, $\pi'\neg\alpha \leftrightarrow \neg\eta$, $\neg\neg\eta$, η, $\neg\eta\wedge\eta$

also $\vdash \neg\eta\wedge\eta$ aus Σ wfr

$\overline{\Sigma}$, Σ' wollen wir konstruieren wie in Teil II des Vollständigkeitssatzes.

Zur Wiederholung:

$$\phi^{\forall} := \{\alpha^{x}/_{\tau} \mid \forall x\alpha \in \phi \text{ und } \tau \text{ variablenfrei}\}$$
$$\phi^{\exists} := \{\alpha^{x}/c_{\eta} \mid \eta = \exists x\alpha \in \phi\}$$
$$\phi^{*} := \phi \cup \phi^{\forall} \cup \phi^{\exists}$$
$$\Sigma_0 := \Sigma$$
$$\Sigma_{k+1} := \Sigma_k^{*}$$
$$\overline{\Sigma} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Sigma_k$$
$$\Sigma' := \{\alpha \mid \alpha \in \overline{\Sigma} \text{ und } \alpha \text{ quantorenfrei}\}$$

Voraussetzung in Teil II war: In Σ wenigstens ein Existenzquantor oder in der betr. Sprache wenigstens eine Individuenkonstante, sonst $\Sigma \cup \{c \doteq c\}$.

?

Behauptung 1: Σ' ist ebenfalls widerspruchsvoll.

geht hier die Vorraussetzung (Existenz einer Individuen konstante ein ?)

Bew.: Ann.: Σ' wfr (Menge von quantorenfreie Aus.)

Dann ist die wie in Teil I konstruierte Struktur $\mathfrak{A}$ ein Modell von Σ' .

? Damit auch: $\mathfrak{A}$ Mod $\overline{\Sigma}$

(Bew. ind. über die Anzahl der Quant

(wie bei Beh. (*) in Teil II.) S. 53

Damit $\mathfrak{A}$ Mod Σ Widerspruch

$\Rightarrow \Sigma'$ wv .

siehe Rückseite

wv Σ', Σ' ist Menge von quantorenfreien Aussagen. Jedes Element ① von Σ' (außer $c \neq c$) entsteht aus $\neg\alpha$ (höchstens!) durch Termeinsetzung.

② Sei Σ'' endliche Teilmenge von Σ' mit wv Σ''.

$\Sigma'' = \{\neg\alpha_i \mid i=1,\ldots,n\}$ α_i entsteht auch aus α durch Termeinsetzung. ③

④ wv $\{\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\alpha_i\}$, $[\Sigma \vdash \alpha$ gdw wv $\Sigma' \cup \{\neg\alpha\}]$ $\Rightarrow \Sigma \vdash \neg\alpha$ gdw wv $\Sigma \cup \{\alpha\}$

⑤ Damit $\models \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\alpha_i$ setze $\Sigma = \emptyset$

Äq

$\models \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$

Spezialfall: In π nur Existenzquantoren. Sprache L mit wenigstens eine Individuenkonstante. In π' nur Allquantoren, damit keine neue Konstante c_η.

<u>Satz:</u> Vor.: L ist Sprache mit wenigstens einer Individuenkonstanten $\eta = \exists x_1 \ldots \exists x_r \alpha \in Aus_L$, α quant.frei.

??

Beh.: $\models \eta$ gdw es gibt eine endliche Disjunktion $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i \in Aus_L$ mit

(1) $\models \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$

(2) Jedes α_i enststeht aus α durch (evtl. mehrfache) Termeinsetzung. (variablenfrei) oder gar keine Termeinsetzung falls $\eta = \pi\alpha$ und $\pi = \emptyset$

⑦

<u>Bew.:</u> ($\Rightarrow$) s.o. (da Spezialfall der allg. Konstruktion)

⑥ ($\Leftarrow$) $\models \alpha_i \rightarrow \eta$ (i=1,...,n) (S.36) Satz 33

$\models \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i \rightarrow \eta$

Geg.: $\eta = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \alpha$ sei $\boxed{\text{Aussage}}$ (Die Variablen (einschließlich der in α enthaltenen) paarweise verschieden und α nicht notwendig quantorenfrei).

?

warum Aussage voraussetzen wo wird dies bei folgenden Sätzen benutzt?

Man führt neues Funktionszeichen f (n-stellig) ein.

Überall in α für y $fx_1 \ldots x_n$ einsetzen

$\eta' = \forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha^{y}/_{fx_1 \ldots x_n}$

andere Bez.:

$\eta = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \alpha(x_1, \ldots, x_n, y)$

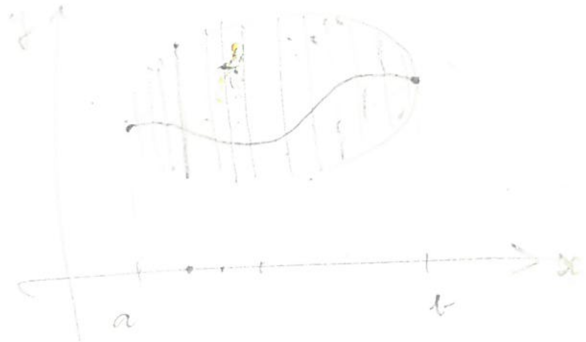
$\eta = \forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha(x_1, \ldots, x_n, fx_1 \ldots x_n$

$\Sigma = \{\eta, c=c\}$

Beweis zum Lemma c) S 67

$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \overline{\alpha(x_1, \dots, x_n, y)}$ U_{0r}^{n+1}

$R x_1 \dots x_n y$



Mengensystem $\mathfrak{M}$:

$= \{M_x\}_{x \in \langle a, b \rangle}$

wobei $M_x = \{(x, y) \mid Rxy\}$

1. Version des Auswahlaxioms:

Vor.: $\mathfrak{M}$ ist ein System von disjunkten nichtleeren Mengen.

Beh.: Es gibt eine (Auswahl-) Menge A, so daß für jedes $M \in \mathfrak{M}$: Es gibt genau ein $y \in A \cap M$.

2. Version

Vor.: R ist zweistellige Relation ($P_1 R$ erste Projektion)

Beh.: Es gibt eine Funktion f mit Def. Ber. $P_1 R$, so daß für jedes $x \in P_1 R$: $\underbrace{Rxfx}_{\text{wenn } fx = y \text{, so } Rxy}$

Beweis der 2. Vers. aus der 1. Vers.:

$\mathfrak{M}$ s. oben

$fx :=$ dasjenige y mit $y \in A \cap M$.

Lemma: (a) $\models \eta' \rightarrow \eta$ $\qquad (\vdash \overset{\forall x_1 \ldots \forall x_n}{\alpha} \,{}^{y}/_{f} \rightarrow \overset{\forall x_1 \ldots \forall x_n}{\exists y \alpha})$ Beweis siehe links

(b) Folg.: Jedes Modell $\mathfrak{A}$ von η' ist auch Modell von η .

(c) Jedes Modell $\mathfrak{A}$ von η läßt sich durch Hinzunahme einer n-stelligen Funktion $f_{\mathfrak{A}}$ zu einem Modell $\mathfrak{A}'$ von η' machen. (Expansion, Typerweiterung)

Siehe Rückseite

zum Beweis von (c):

Zu jedem $x_1, \ldots, x_n \in U_{\mathfrak{A}}$ existiert ein $y \in U_{\mathfrak{A}}$

mit $\underbrace{h^{x_1 \ldots x_n y}_{x_1 \ldots x_n y} \operatorname{Erf}_{\mathfrak{A}} \alpha}_{\mathfrak{R} x_1 \ldots x_n y}$.

Überführungstheorem wird benutzt

$W_{\mathfrak{A}}(\alpha, h^{x_1 \ldots x_n f(x_1 \ldots x_n)}_{x_1 \ldots x_n y}) = W(\alpha \,{}^{y}/_{f x_1 \ldots x_n}, h^{x_1 \ldots x_n}_{x_1 \ldots x_n})$

[illegible]

Damit (Auswahlaxiom) existiert eine n-stellige Funktion f über $U_{\mathfrak{A}}$ mit:

Für jedes $x_1, \ldots, x_n \in U_{\mathfrak{A}}$ ist $\mathfrak{R} x_1 \ldots x_n f x_1 \ldots x_n$.

Def.: Sei η pränexe Aussage.

Die SKOLEM-FORMEL zu η : $\quad \eta_s := \eta^{(r)}$

(r= Anzahl der Existenzquantoren).

η_s ist pränex mit reinem Allpräfix.

also η besitzt Modell gdw

η' " " gdw

η'' " "

⋮

also $\eta^{(r)}$ besitzt Modell

Für Bildung der Skolem-Formel:

$$\eta = \forall x_1 \ldots \forall x_{n_1} \exists y_1 \; \forall x_{n_1+1} \ldots \forall x_{n_2} \exists y_2 \ldots \forall x_{n_r} \exists y_r \, \alpha$$

$\forall$-Blöcke können auch leer sein.

Bildung von η_s: Existenzquantoren mit zugeh. Variablen y_ϱ streichen.

Für y_ϱ substituieren $f_\varrho(x_1, \ldots, x_{n_\varrho})$.

Def.: Die HERBRAND-FORMEL η_H zu η: analog, nur daß $\forall$ mit $\exists$ vertauscht.

Lemma: analog für η_s statt η' . Insbesondere: η besitzt ein Modell gdw η_s besitzt ein Modell.

Lemma: Für jede Pränexe Aussage: $\models \eta$ gdw $\models \eta_H$.

Bew.: $\models \eta$ gdw $\neg\eta$ hat Kein Modell.

sei $\eta = \pi\alpha$ gdw $\pi'\neg\alpha$ " " "

gdw $(\pi'\neg\alpha)_S$ " " "

Siehe links Bem. gdw $\neg\eta_H = (\neg\pi\alpha)_H$ " " "

gdw $\models \eta_H$

η_H ist pränex mit reinem Existenzpräfix.

Satz: SATZ VON HERBRAND (1. Form):

Vor.: L Sprache In 1. Stufe mit wenigstens einer Individuenkonstanten.

$\eta \in \text{Aus}_L$ pränex. $\hat{L}$ ist eine Erweiterung mit

$\eta_H \in \text{Aus}_{\hat{L}}$, die wenigstens eine Individuenkonstante enthält; $\eta_H = \pi\hat{\alpha}$

$\hat{\alpha}$ quantorenfrei

Beh.: $\models \eta$ gdw Es gibt eine endliche Disjunktion

$\eta_H = \pi\hat{\alpha}$ $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i \in \text{Aus}_{\hat{L}}$ mit

Siehe Lemma

(1) $\models \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$

(2) Jedes α_i ensteht aus $\hat{\alpha}$ durch (evtl. mehrfache) Einsetzung von variablenfrei Termen von $\hat{L}$.

2

-2

Für Bildung der Herbrand-Formel:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_{n_1} \forall y_1 \exists x_{n_1+1} \ldots \exists x_{n_2} \forall y_2 \ldots \exists x_{n_r} \forall y_r \alpha$$

Beispiel: 1. $\beta = \exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy$ $(\models \beta)$

Äq $\forall x \exists y \neg Rxy \vee \forall u \exists v Rvu$

pränexe NF: $\eta = \forall x \forall u \exists y \exists v (\neg Rxy \vee Rvu)$

$\eta_H = \exists y \exists v (\underbrace{\neg Ray \vee Rvb}_{\hat{\alpha}})$ x/a, u/b

$\alpha_1 = \hat{\alpha}\, y/b\; v/a = [\neg Rab \vee Rab]$

logisch gültig eingliedrig

2. $\models Pa \vee Pb \rightarrow \exists x Px$

$\eta = \exists x (\overbrace{\neg Pa \wedge \neg Pb \vee Px}^{\hat{\alpha}}) = \eta_H$. $\alpha_2 = \hat{\alpha}\, x/b$

$\alpha_1 = \hat{\alpha}\, x/a$

$\models [(\neg Pa \wedge \neg Pb) \vee Pa] \vee [\overbrace{(\neg Pa \wedge \neg Pb) \vee Pb}]$

Äq $\neg(pa \vee Pb) \vee (Pa \vee Pb)$

ⓐ : $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \alpha(x_1, \ldots, x_n, y)$

ⓑ : $\forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha(x_1, \ldots, x_n, fx_1 \ldots x_n)$

ⓐ hat Modell gdw ⓑ hat Modell.

Jedes Modell von ⓐ kann man durch Hinzunahme einer neuen Funktion expandieren zu einem Modell von ⓑ.

Beispiel: Bildung von Skolem-Formel

$$\eta = \forall x \exists y \exists z \forall u \overset{\forall v}{\vee} \exists w \; \alpha(x,y,z,u,v,w)$$

$$\eta_S = \forall x \forall u \forall v \; \alpha(x, fx, gx, u, v, hxuv)$$

$$\eta_H = \exists y \exists z \exists w \; \alpha(\underset{\uparrow}{a}, y, z, \overbrace{fyz}^{\text{zweistellig, da vor } u \text{ } 2\,\exists\text{-}}, gyz, w)$$

nullstelliges Funktionszeichen (Konstante), da vor x leer

η ist logisch gültig gdw η_H logisch gültig.

η hat Modell gdw η_S hat Modell.

Beisp. 3

$\beta = \exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy$ $(\models \beta)$

Äq $\forall x \exists y \neg Rxy \vee \forall u \exists v Rvu$.

eine pränexe Normalform

$\Rightarrow \eta = \forall x \exists y \forall u \exists v [\neg Rxy \vee Rvu]$

$$\eta_H = \exists y \exists v (\underbrace{\neg Ray \vee Rvfy}_{\hat{\alpha}})$$

immer logisch gültig

$$[\underbrace{\neg Raa \vee Rafa}_{\alpha_1}] \vee [\underbrace{\neg Rafa \vee Raffa}_{\alpha_2}]$$

variablenfreie Terme nach Satz, deswegen a und nicht y

$\alpha_1 = \hat{\alpha} \frac{v}{a} \frac{y}{a}$. $\alpha_2 = \hat{\alpha} \, {}^{v}/_{a} \, {}^{y}/_{fa}$

$\models \alpha$ gdw $\models Eq_{\alpha}^{F} \to \alpha^{E}$

Reduktion auf die Prädikatenlogik ohne Identität

Sei $\Sigma \subseteq Fml_L$, E zweistelliges Relationszeichen, das nicht zu L gehört, L^E entstehe durch Hinzunahme von E.

Fml_L^E := Menge der Formeln von L^E ohne Gleichheitszeichen.

Für $\alpha \in Fml_L$ sei α^E die Formel, die aus α entsteht, indem jede Primformel der Form $\sigma \doteq \tau$ ersetzt wird durch die Primformel $E\sigma\tau$,

$$\Sigma^E := \{\alpha^E \mid \alpha \in \Sigma\}$$

Die "Identitätssätze für E":

$$Eq_L^E = \{Exx\} \cup \{ \bigwedge_{\varrho=1}^{r(f)} Ex_\varrho y_\varrho \to Efx_1 \ldots x_{r(f)} fy_1 \ldots y_{r(f)} \mid f \in \mathfrak{F}\}$$
$$\cup \{ \bigwedge_{\varrho=1}^{r(R)} Ex_\varrho y_\varrho \to Rx_1 \ldots x_{r(R)} \to Ry_1 \ldots y_{r(R)} \mid R \in \mathfrak{R} \cup \{E\}\}$$

Für jedes Funktions- und Relationszeichen nur ein Axiom. siehe links

Abzählbar viele Variable $V = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

$x = v_0$, $x_\varrho = v_{2\varrho}$. $y_\varrho = v_{2\varrho+1}$

<u>Satz:</u> Σ besitzt ein Modell gdw $Eq_L^E \cup \Sigma^E$ ein Modell besitzt.

<u>Bew.:</u> (→) Sei $\mathfrak{A} \models \Sigma$. $\mathfrak{A}'$ werde durch Hinzunahme der Rel. $E_{\mathfrak{A}'} = id_{\mathfrak{A}}$ (die Rel. über $U_{\mathfrak{A}}$ mit $E_{\mathfrak{A}}xy$ gdw $x=y$) idetifieziert.

(←) Sei $\mathfrak{A} \models (Eq_L^E \cup \Sigma^E)$ $\quad \mathcal{E} = E_{\mathfrak{A}}$.

Beh.(1): ist Äquivalenzrelation

① (R) $\mathcal{E}\,xx$

② (S) $\mathcal{E}\,xy$, so $\mathcal{E}\,yx$

③ (T) $\mathcal{E}\,xy$ und $\mathcal{E}\,yz$, so $\mathcal{E}\,xz$

(2): Wenn $\mathcal{E}\,x_\varrho y_\varrho$ $\quad (\varrho=1,\ldots,r(f))$, so
$\mathcal{E}\, f_{\mathfrak{A}} x_1 \ldots x_{r(f)} f_{\mathfrak{A}} y_1 \ldots y_{r(f)}$

(3): Wenn .... r(R)), und
$R_{\mathfrak{A}} x_1 \ldots x_{r(R)}$, so $R_{\mathfrak{A}} y_1 \ldots y_{r(R)}$

Beweis geht weiter auf nächste Seite

weiter mit Beweis

<u>Def.:</u> Die "Faktorstruktur" $\mathfrak{A}/_{\mathcal{E}}$: Die Struktur $\mathfrak{A}'$ mit

$U_{\mathfrak{A}'} = \{\overset{\text{Äquivalenzklasse}}{\bar{x}} \mid x \in U_{\mathfrak{A}}\}$ $\qquad \bar{x} := \{y \mid \mathcal{E}xy\}$

$f_{\mathfrak{A}'}\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{r(f)} \quad = \overline{f_{\mathfrak{A}}x_1 \ldots x_{r(f)}}$

$R_{\mathfrak{A}'}\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{r(R)} \quad$ gdw $R_{\mathfrak{A}}x_1 \ldots x_{r(R)}$

(def. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten).

<u>Def.:</u> Belegungen h über $\mathfrak{A}$ und h' über $\mathfrak{A}'$ heißen <u>korrespondierend</u> : $\Longleftrightarrow$ für jedes $x \in V$ ist $h'(x) = \overline{h(x)}$.

Bem: zu jedem h' existiert ein h so daß h und h' korrespondieren

<u>Beh.(4):</u> Für jedes $\tau \in Tm_L$, für jedes Paar korrespondierender Belegungen h,h':

$$w_{\mathfrak{A}'}(\tau, h') = \overline{w_{\mathfrak{A}}(\tau, h)}$$

(Bew. induktiv über den Termaufbau)

<u>Beh.(5):</u> Für jedes $\alpha \in Fml_L$, für jedes Paar korrespondierender Belegungen h, h':

$$W_{\mathfrak{A}'}(\alpha, h') = W_{\mathfrak{A}}(\alpha^E, h)$$

(Bew. induktiv über den Formelaufbau):

Primformeln: $\alpha = \sigma \doteq \tau$ $\quad W_{\mathfrak{A}'}(\sigma \doteq \tau, h') = W$ gdw $h'(\sigma) = h'(\tau)$ gdw $\overline{h(\sigma)} = \overline{h(\tau)}$ gdw $E_{\mathfrak{A}}h(\sigma)h(\tau)$ gdw $W_{\mathfrak{A}}(E\sigma\tau, h) = W$

$\alpha^E = E\sigma\tau$

$\alpha = R\tau_1 \ldots \tau_{r(R)} = \alpha^E$

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow,$ (klar)

für Quantoren: Wenn h,h' korrespondieren, so auch $h^{x}_{x}, h'^{\bar{x}}_{x}$

$\max\limits_{\bar{x} \in U_{\mathfrak{A}'}} \ldots = \max\limits_{x \in U_{\mathfrak{A}}} \ldots$

(min analog)

damit: $\mathfrak{A}'$ Mod Σ , d.h. $\models_{\mathfrak{A}'} \alpha$ für jedes $\alpha \in \Sigma$ (da $\models_{\mathfrak{A}} \underbrace{\alpha^E}_{\in \Sigma^E}$)

was soll diese Begründung

Keine Begrdg!

/ Bew. fertig

q.e.d.

<u>Anmerkung:</u> $\varphi: U_{\mathfrak{A}} \longrightarrow U_{\mathfrak{A}'}$ mit $\varphi(x) = \bar{x}$, ist ein (Überstarker) Homomorphismus.

Relation trifft auf Bilder zu gdw Relation auf Urbilder zutrifft ((→) [illegible])

Bezeichnung für Sprachen:

Heißt ?

?

$L(\Sigma)$ = die Sprache mit den in Σ vorkommenden Funktions- und Relationszeichen ($\overset{\circ}{\Sigma}$ früher).

$L(\alpha) := L(\{\alpha\})$

Satz: Σ besitzt ein Modell gdw $Eq_L^E \cup \Sigma^E$ besitzt Modell.

Folgerung: $\models \alpha$ gdw $Eq^E_{L(\alpha)} \models \alpha^E$

gdw $\models eq^E_\alpha \rightarrow \alpha^E$

"Identitätsfreie Reduzierte von α".

① **Bew.:** (o.B.d.A.) α Aussage (Generalisierte)

$\models \alpha$ gdw $\{\neg\alpha\}$ hat kein Modell

gdw $Eq^E_{L(\alpha)} \cup \{\neg \alpha^E\}$ -----

$\Sigma^E \vdash \alpha \Leftrightarrow \Sigma^* \models \alpha$

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \gamma$ gdw $\{\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n\} \models \gamma$

gdw $\underbrace{Eq^E_{L(\alpha)}}_{\text{endliche Menge}} \models \alpha^E$

gdw $\{eq^E_\alpha\} \models \alpha^E$ siehe $\Sigma = \emptyset$ im Deduktionstheorem

Deduktionstheorem !! S. 42

gdw $\models eq^E_\alpha \rightarrow \alpha^E$

2 Def

$$eq^E_\alpha = \bigwedge_{\varepsilon \in Eq^E_{L(\alpha)}} \varepsilon^*$$

(Konjunktion der Generalisierten der Elemente von Eq).

Satz $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \gamma$ gdw $\{\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n\} \vdash \gamma$

Bew $\Rightarrow$ $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \gamma$

$\Leftarrow$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n, \gamma$ (S. 29 unten "Regel")

(Reduktion auf) Aussagenlogik

Sei L bel. Sprache in der 1.Stufe.

Def.: Sei $\Gamma \subseteq Fml_L$, $\alpha \in Fml_L$.

α ist aussagenlogisch aufgebaut aus Γ :⟨≡⟩ α entsteht aus Elementen von Γ durch Anwendung der aussagenlogischen Operationen ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) (endlich oft).

Def.: α ist eine Formel der Aussagenlogik :⟨≡⟩ ist aussagenlogisch aufgebaut aus einer Menge von nullstelligen Relationszeichen ("Aussagenvariablen" A,B,C,...)

Sei $\mathfrak{A}$ Struktur für L. Ob dann $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$ ist, hängt nur davon ab, welche nullstelligen Relationen den Aussagenvariablen zugeordnet sind (Trägermenge unwichtig).

was ist eine nullstellige Relation
eine Relation: Teilmenge
2 stell. Rel. : Teilmenge eines Kreuzproduktes

$$\mathfrak{A} = (U_{\mathfrak{A}}, s_{\mathfrak{A}}) \,, \qquad s_{\mathfrak{A}}(R) = R$$

$$s_{\mathfrak{A}}(f) = f$$

$$A_{\mathfrak{A}} = s_{\mathfrak{A}}(A) = \begin{cases} W \\ F \end{cases} \quad \text{gdw} \quad W_{\mathfrak{A}}(A,h) = \begin{cases} W \\ F \end{cases}$$

Def.: Sei $\alpha \in Fml_L$.

α ist aussagenlogisch einfach :⟨≡⟩ α ist eine Primformel oder α beginnt mit einem Quantor.
(d.h. α ist nicht von der Form $\neg\beta, \alpha \underset{\vee}{\wedge} \beta$, das wäre "aussagenlogisch zusammengesetzt"). $\overset{\rightarrow}{\leftrightarrow}$

Def.: Sei Π eine Menge von aussagenlogisch einfachen Formeln von L.
s ist eine aussagenlogische Belegung von Π :⟨≡⟩ s: $\Pi \rightarrow \{W,F\}$.

Def.: Seien Π, s wie oben. Für aus Π aussagenlogisch aufgebauten Formeln α wird (induktiv) definiert: Der Wahrheitswert von α bei der aussagenlogischen Belegung s: $W(\alpha,s)$ durch:

$W(\alpha,s) = s(\alpha)$,

$W(\neg\alpha,s) = \mathrm{non}(W(\alpha,s))$,

$W(\alpha\wedge\beta,s) = \mathrm{et}(W(\alpha,s),(\beta,s))$

$\quad\vee \qquad\qquad \mathrm{vel}$

$\quad\rightarrow \qquad\quad \mathrm{seq}$

$\quad\leftrightarrow \qquad\quad \mathrm{äq}$

α besteht aus aussagenlogisch einf. Bestandteilen

<u>Def.:</u> s <u>erfüllt</u> α (aussagenlogisch): s Erf α :<≡> $W(\alpha,s) = W$.

<u>"Koinzidenztheorem":</u> Das hängt nur ab von den Werten von s für die aussagenlogisch einfachen Bestandteilen von α.

<u>Def.:</u> α ist <u>aussagenlogisch gültig</u>: $\models_p\alpha$:<≡> Es ist s Erf α für jede aussagenlogische Belegung s (der Menge der aussagenlog. einfachen Bestandteile von α).

<u>Def.:</u> Sei Σ eine Menge von Formeln, die aussagenlogische aufgebaut sind aus Π (Π,s wie oben).
s ist ein <u>aussagenlogisches Modell</u> von Σ :<≡> s erfüllt jedes Element von Σ.

<u>Def.:</u> α ist eine <u>aussagenlogische Folgerung</u> aus Σ :
$\Sigma\models_p\alpha$:<≡> Jedes aussagenlogische Modell von Σ erfüllt auch α.

Dann ist $\models_p\alpha$ gdw $\emptyset\models_p\alpha$.

<u>Satz:</u> Die aussagenlogische Gültigkeit ist entscheidbar, m.a.W.: es gibt ein Verfahren, mit dem man von jeder Formel nachprüfen kann, ob sie aussagenlogisch gültig ist. (Für Sprachen mit Bezeichnungssystem).

<u>Bew.:</u> (Verfahren) α geg.; Menge Π der aussagenlogisch einfachen Bestandteile von α ermitteln. Π endlich, etwa $|\Pi| = n$. Sämtliche 2^n aussagenlogische Belegungen s von Π durchprobieren. Wahrheitswert $W(\alpha,s)$ ausrechnen.

Aussagenlogischer Reduktionssatz:

Vor.: Π ist eine Menge von Primformeln von L ohne Gleichheitszeichen. s ist eine aussagenlog. Belegung von Π .

Beh.: Es gibt eine Struktur $\mathfrak{A}$ für L und eine Belegung h über $\mathfrak{A}$, so daß für jedes $\alpha \in \Pi$:

(✱) $W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h) = s(\alpha)$.

Bew.: $U_{\mathfrak{A}} := Tm_L$.

$h(x) = x$

$f_{\mathfrak{A}}\tau_1 \ldots \tau_{r(f)} = f\tau_1 \ldots \tau_{r(f)}$

Lemma a) $w\ (\tau,h) = \tau$ (Bew. ind. über τ).

b) Folg.: Verschiedene Terme haben versch. Werte.

$R_{\mathfrak{A}}$:= Die Relation mit

$$\begin{array}{lll} R_{\mathfrak{A}}\tau_1 \ldots \tau_{r(R)}, & \text{falls} & s(R\tau_1 \ldots \tau_{r(R)}) = W \\ \text{nicht} \quad \ldots\ldots, & \text{falls} & s(\ \ldots\ ) = F \\ \text{beliebig}\ , & \text{falls} & R\tau_1 \ldots \tau_{r(R)} \notin \Pi . \end{array}$$

$$W_{\mathfrak{A}}(R\tau_1 \ldots \tau_{r(R)},h) = \begin{cases} W & \text{gdw} \quad R_{\mathfrak{A}} w_{\mathfrak{A}}(\tau_1,h) \ldots w\ (\tau_{r(R)},h) \\ F & \text{gdw nicht} \ldots \end{cases}$$

Zusatz: Statt (✱) gilt dann sogar für jede aus Π aussagenlogisch aufgebaute Formel α :

$W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h) = W(\alpha,s)$.

Satz: Vor.: α ist eine quantorenfreie Formel ohne Gleichheitszeichen.

Beh.: α ist logisch gültig gdw α ist aussagenlogisch gültig.

Bew.: Sei Π die Menge der aussagenlogisch einfachen Bestandteilen von α .

Nicht: für jede Struktur und jede Belegung h muß gelten [illegible] w !

($\rightarrow$) s beliebig; $\mathfrak{A}$,h nach Satz.

($\leftarrow$) $\mathfrak{A}$,h beliebig; s definieren durch (✱).

Folgerung: Für solche Formeln ist die logische Gültigkeit entscheidbar.

Aussage, quantorenfrei, ohne Gleichheitszeichen

Sei $\eta \in Aus_L$.

Herbrandschen Satz anwenden auf $\overbrace{\underbrace{eq_\eta^E}_{\pi_E \varepsilon} \rightarrow \underbrace{\eta^E}_{\pi\alpha}}$ Pränexe N.F.

in π_E nur Allquantoren, Variablen disjunkt. (sonst Umbenennung)

$(\eta^E)_H = \pi_H \hat{\alpha}$

$\uparrow$ nur Existenzquantoren.

pränexe Normalform zu $eq_\eta^E \rightarrow \eta^E$

warum

äq $\neg eq_\eta^E \vee \eta^E$ äq, $\pi'_E \neg \varepsilon \vee \pi\alpha$ äq $\bar{\eta}$

Siehe links

da η [illegible]

$\bar{\eta} = \pi\pi'_E(\neg \varepsilon \vee \alpha)$ S.36 ($\pi\alpha$, π'_E Aussagen)

Herbrand-Formel: $\bar{\eta}_H = \pi_H \pi'_E(\neg \varepsilon \vee \hat{\alpha})$.

$\models \eta$ gdw $\models eq_\eta^E \rightarrow \eta^E$ (S.72)

gdw $\models \bar{\eta}_H$

gdw $\models \underbrace{\bigvee_{i=1}^{n} (\neg \varepsilon_i \vee \alpha_i)}$ für eine geeignete Disjunktion.

Äq $\underbrace{\bigvee_{i=1}^{n} \neg \varepsilon_i} \vee \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$

Äq $\neg \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon_i \vee \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$

$\Gamma = \{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

Äq $\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon_i \rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ Termeinsetzung vorn und hinten unabhängig voneinander.

gdw $\models_p \bigwedge^{n} \varepsilon_i \rightarrow \bigvee^{n} \alpha_i$

Satz von Herbrand (2.Form):

anstelle von $\doteq$ oder [illegible]

Vor.: L Sprache in der 1. Stufe, ~~E zweistelliges Relationszeichen (neu).~~ $\eta \in Aus_L$ pränex.

$\eta_H = \pi\hat{\alpha}$ ~~(E wieder ersetzen durch $\doteq$)~~

$\hat{L}$ Erweiterung von L mit $\eta_H \in Aus_{\hat{L}}$.

In $\hat{L}$ wenigstens eine Individuenkonstante.

Beh.: $\models \eta$ gdw Es gibt eine endliche Disjunktion $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i \in Aus_{\hat{L}}$ mit

(1) Jedes α_i enststeht aus $\hat{\alpha}$ durch Einsetzungen von variablenfrei Termen von $\hat{L}$ und

(2) $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ ist eine aussagenlogische Folgerung aus einer Menge Γ , wobei
(a) Γ leer, falls $\doteq$ nicht in η vorkommt,
(b) Γ ist eine Menge von Formeln, die aus Identitätssätzen für $\doteq$ durch Einsetzung von Termen von $\hat{L}$ entstehen.

wesentlicher Teil

Zusatz: Vorausgesetzte Individuenkonstante ist auch entbehrlich, wenn stattdessen eine Variable genommen wird. (Für aussagenlogische Belegung gleichwertig).

<u>Verfahren zur Feststellung der logischen Gültigkeit:</u>
(nicht nur Nachprüfung)

Beweis in welchem Sinn?

Falls $\models \alpha$, so liefert das Verfahren die Antwort "ja" und einen formalen Beweis. Falls nicht $\models \alpha$, so liefert das Verfahren i.allg. keine Antwort (d.h., es bricht nicht ab).

im Sinne des formalen Beweises der Präd. Logik oder Beweis in der Metasprache?

Sprache mit Bezeichnungssystem.
$\models \alpha$.

1. Generalisierte
2. pränexe Normalform
3. Herbrand-Formel
   rekursive Aufzählung aller Terme der betreffenden Sprache $\hat{L}$ (variablenfrei, falls eine Individuenkonstante vorhanden; sonst eine Variable dazu).

   Mögliche Disjunktionsglieder α_i aufzählen.
   Falls $\doteq$ in α , auch
   mögliche Konjunktionsglieder ε_i aufzählen.
   Jedesmal nachprüfen, ob $\models_P \bigwedge_{i=1}^{m} \varepsilon_i \rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$

   Verbesserung: Zu gegebener Disjunktion $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ nur eine feste Konjunktion (bzw. feste Menge Γ_0 statt Γ) betrachten.

$$\begin{aligned} Eq_L^{\doteq} &= \{x \doteq x\} \\ &\cup \{ \bigwedge_{\varrho=1}^{r(f)} x_\varrho \doteq y_\varrho \rightarrow fx_1 \ldots x_{r(f)} \doteq fy_1 \ldots y_{r(f)},\ f \in \mathfrak{F}\} \\ &\cup \{ \bigwedge_{\varrho=1}^{r(R)} x_\varrho \doteq y_\varrho \rightarrow Rx_1 \ldots x_{r(R)} \rightarrow Ry_1 \ldots y_{r(R)},\ R \in \mathfrak{R}\} \end{aligned}$$

Sei Γ_0 die Menge der Termeinsetzungsbeispiele von Identitätssätzen, in denen Terme aus $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ eingesetzt sind (auch Teilterme von Termen).

<u>Beh.:</u> Wenn Γ beliebig wie im Herbrandschen Satz (d.h. $\Gamma \models \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$) so auch $\Gamma_0 \models \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$.

<u>Bew.:</u> Sei s aussagenlogisches Modell von Γ_0 , o.B.d.A. nur definiert für Primformeln, die in Γ_0 auftreten. (Damit insbesondere für die in $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$).
z.z.: s läßt sich erweitern zu einem Modell von Γ.

<u>Anwendung des Verfahrens auf endlich axiomatisierbare Theoreien:</u>

$T = Cn(\Sigma)$, Σ endlich, $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

$\alpha \in T$, d.h. $\Sigma \vdash \alpha$ gdw $\vdash \alpha_1^* \wedge \ldots \wedge \alpha_n^* \rightarrow \alpha$

$\models \ldots$

<u>Def.:</u> Seien L_1, L_2 Teilsprachen von L.

$L_1 \cap L_2$:= Die Sprache aus den Funktions- und Relationszeichen, die in L_1 <u>und</u> in L_2 vorkommen.

$L_1 \cup L_2$:= Die Sprache aus den Funktions- und Relationszeichen, die in L_1 <u>oder</u> in L_2 vorkommen.

↓
wird nicht mehr geprüft

<u>Interpolationssatz (Craig):</u>

Wenn $\models \alpha \rightarrow \beta$, so gibt es ein γ mit $\models \alpha \rightarrow \beta$ und $\models \gamma \rightarrow \beta$ und $\underbrace{\gamma \in Fml_{L(\alpha) \cap L(\beta)}}$

d.h. γ enthält nur Funktions- und Relationszeichen, die sowohl in α als auch in β vorkommen.

gleichwertig: Wenn $\models \neg\alpha \vee \beta$, so ex. ein γ mit $\models \neg\alpha \vee \gamma$ und $\models \neg\gamma \vee \beta$

(symm. Form):
Wenn $\models \alpha \vee \beta$, so ex. ein γ mit $\models \alpha \vee \gamma$ und $\models \beta \vee \neg\gamma$

Vor. (T_1): $\top$ ist eine Formel aus $\mathrm{Fml}_{L(\alpha) \cap L(\beta)}$ mit $\models \top$
(z.B. $\top = x \doteq x$).

$\bot := \neg\top$ (oder $\bot$ Äq $\neg\top$, $\bot$ aus derselben Sprache).

Zusatz: Interpolationssatz gilt auch für die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik ohne Identität, falls ein $\top$ mit (T_1) existiert.

Andere Möglichkeit: (T_2): $\top \in \mathrm{Fml}_L$ mit $\models \top$, L beliebig mit $L \supseteq L(\alpha) \cap L(\beta)$.
$\gamma \in \mathrm{Fml}_L$ zulassen.

Beweis für die Aussagenlogik:

(durch Induktion über die Anzahl k derjenigen Aussagenvariablen, die in α, aber nicht in β vorkommen).

k=0: $\gamma = \alpha$ leistet das Verlangte.

$k \to k+1$: Sei diese Anzahl k+1 und gelte der Satz für Formeln mit der Anzahl k.
Sei A eine der Aussagenvariablen, die in α, aber nicht in β vorkommen.
α_1 entstehe aus α durch Ersetzung von A durch $\top$.
α_2 " " " " " " " $\bot$.

Dann ist $\models_p \alpha_1 \to \beta$ $\models_p \alpha_2 \to \beta$
Damit $\models \alpha_1 \vee \alpha_2 \to \beta$. Hierzu Anzahl k.
γ nach Ind.vor.: $\models_p \alpha_1 \vee \alpha_2 \to \gamma$, $\models_p \gamma \to \beta$

$$\frac{\models_p \alpha \to \alpha_1 \vee \alpha_2}{\models_p \alpha \to \gamma}$$ (Kettenschluß)

Lemma : Vor.: c ist Individuenkonstante, die nicht in α vorkommt (i.a. $x \in Fr(\alpha)$, weitere freie Variablen erlaubt).

Beh.: $\models \alpha$ gdw $= \alpha^{x}/c$.

(früher: $\models \alpha$ gdw $\models \forall x \alpha$).

Bew.: genügt Kontraposition. Ex $\mathfrak{A}$,h: $W_{\mathfrak{A}}(\alpha,h) = F$.

gdw Ex $\mathfrak{A}'$,h': $W_{\mathfrak{A}'}(\alpha^{x}/c,h') = F$.

$c_{\mathfrak{A}'} = w_{\mathfrak{A}'}(c,h') = h(x)$ setzen, sonst übereinstimmung.

Beweis für Prädikatenlogik ohne Identität (symmetrische Form)

Genügt für: 1. α,β Aussagen (sonst freie Variablen ersetzen durch neue Konstanten. In γ diese wieder ersetzen durch die alten Variablen). Dann ist γ auch Aussage.

2. α,β pränex mit reinem Existenzpräfix. Übergang zu α_H, β_H mit verschiedenen neuen Funktionszeichen $\notin L(\alpha) \cup L(\beta)$

$\models \alpha \longrightarrow \alpha_H \qquad \models \beta \rightarrow \beta_H$, somit $\models \alpha_H \vee \beta_H$.

$\gamma \in Aus_{L(\alpha_H) \cap L(\beta_H)} = Aus_{L(\alpha) \cap L(\beta)}$

$\alpha_H \vee \gamma$ gültig in jeder Struktur für $L(\alpha_H)$.

$\alpha \vee \gamma$ gültig in jeder Struktur $\underbrace{\mathfrak{A}}$ für $L(\alpha)$.

kann expandiert werden
zu Struktur für $L(\alpha_H)$.

analog: $\models \beta \vee \gamma$

<u>Bew. von 2:</u> Sei $\models \alpha \vee \beta$, $\alpha = \exists x_1 \ldots \exists x_k \delta$

$\beta = \exists y_1 \ldots \exists y_1 \varepsilon$

$\alpha \vee \beta$ Äq $\exists x_1 \ldots \exists y_1 (\delta \vee \varepsilon)$.

Forts. Beweis: Herbrand: $\models \alpha' \vee \beta'$ wobei $\alpha' = \bigvee_i \delta_i$, $\beta' = \bigvee_j \varepsilon_j$

$\models \alpha' \vee \beta'$

$\left.\begin{array}{l}\delta_i \text{ aus } \delta \\ \varepsilon_j \text{ aus } \varepsilon\end{array}\right\}$ durch Termeinsetzung in $\hat{L}(\alpha) \cup \hat{L}(\beta)$

Reduktion für die Aussagenlogik liefert

$\gamma' \in \mathrm{Aus}_{L(\alpha') \cap L(\beta')}$

γ' ist von der Form $\varphi(\xi_1,\dots,\xi_l)$, wobei $\varphi(z_1,\dots,z_l)$ ohne Funktionszeichen, mit Relationeszeichen nur aus $L(\alpha) \cap L(\beta)$.

$\xi_1,\dots,\xi_l \in \mathrm{Tm}_{\hat{L}(\alpha) \cup \hat{L}(\beta)}$

induktiv definiert über p:

quantorenfreie Formeln

$\varphi_\rho(z_1,\dots,z_{l_\rho}) \in \mathrm{Fml}_{\hat{L}(\alpha) \cap \hat{L}(\beta)}$

endliche Folgen von Termen

$\xi_1^\rho,\dots,\xi_{l_\rho}^\rho \in \mathrm{Tm}_{\hat{L}(\alpha) \cap \hat{L}(\beta)}$

so daß (*): $\varphi_\rho(\xi_1^\rho,\dots,\xi_{l_\rho}^\rho) = \gamma'$

$\rho = 1$: $\varphi_1 = \varphi$, $\xi_\lambda^1 = \xi_\lambda$

$\rho \frown \rho+1$: i wählen, so daß ξ_i^ρ ein Term mit maximaler Länge, der mit einem Funktionszeichen f von $L(\alpha) \cap L(\beta)$ beginnt, falls vorhanden.

O.B.d.A.: $i = l_\rho$

Sei $\xi_{l_\rho}^\rho = f\sigma_1 \dots \sigma_r$ $(r = r(f))$

$l_{\rho+1} := l_\rho + r - 1$

$\varphi_{\rho+1}(z_1,\dots,z_{l_\rho+r-1}) =$

$\varphi_\rho(z_1,\dots,z_{l_\rho-1}, fz_l \dots z_{l_\rho+r-1})$

$(\xi_1^{\rho+1},\dots,\xi_{l_{\rho+1}}^{\rho+1}) = (\xi_1^\rho,\dots,\xi_{l_\rho-1}^\rho,\sigma_1,\dots,\sigma_r)$

Dann gilt (*).