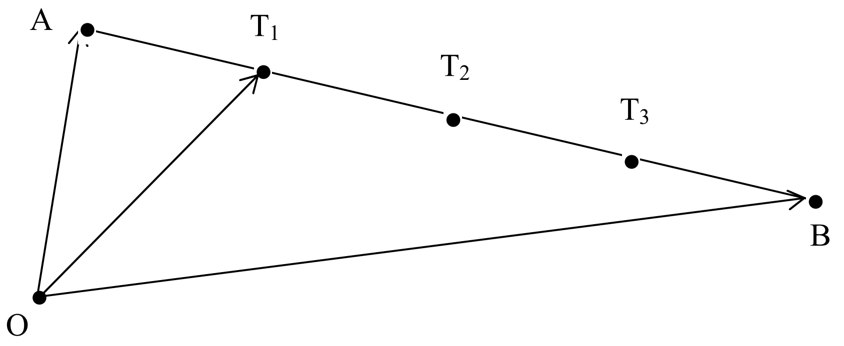
1.1 Standard-Aufgabe

Gegeben sind die Punkte A(-5 | 1 | 4) und B(-1 | 9 | 16).

Teile die Strecke $\overline{AB}$ in 4 gleiche Teile und bestimme die Teilpunkte dieser Strecke.

Berechne zur Probe die exakte Länge der Strecken $\overline{AT_1}$, $\overline{T_1T_2}$, $\overline{T_2T_3}$, $\overline{T_3B}$



1.1.1 Lösung

Version 1:

$$\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} -1-(-5) \\ 9-1 \\ 16-4 \end{pmatrix}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OT_1} = \vec{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+1 \\ 1+2 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{==> } T_1(-4 \mid 3 \mid 7)$$

$$\vec{OT_2} = \vec{OA} + 2\,\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+2 \\ 1+4 \\ 4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{==> } T_2(-3 \mid 5 \mid 10)$$

$$\vec{OT_3} = \vec{OA} + 3\,\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+3 \\ 1+6 \\ 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{==> } T_3(-2 \mid 7 \mid 13)$$

$$|\vec{AT_1}| = \left|\begin{pmatrix} -4--5 \\ 3-1 \\ 7-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{T_1T_2}| = \left|\begin{pmatrix} -3--4 \\ 5-3 \\ 10-7 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{T_2T_3}| = \left|\begin{pmatrix} -2--3 \\ 7-5 \\ 13-10 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{T_3B}| = \left|\begin{pmatrix} -1--2 \\ 9-7 \\ 16-13 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

Version 2:

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} -1-(-5) \\ 9-1 \\ 16-4 \end{pmatrix}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+1 \\ 1+2 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$ ==> T_1(-4 | 3 | 7)

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+1 \\ 3+2 \\ 7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$ ==> T_2(-3 | 5 | 10)

$$\overrightarrow{OT_3} = \overrightarrow{OT_2} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1 \\ 5+2 \\ 10+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$ ==> T_3(-2 | s7 | 13)

$$|\overrightarrow{AT_1}| = \left|\begin{pmatrix} -4--5 \\ 3-1 \\ 7-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{T_1T_2}| = \left|\begin{pmatrix} -3--4 \\ 5-3 \\ 10-7 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

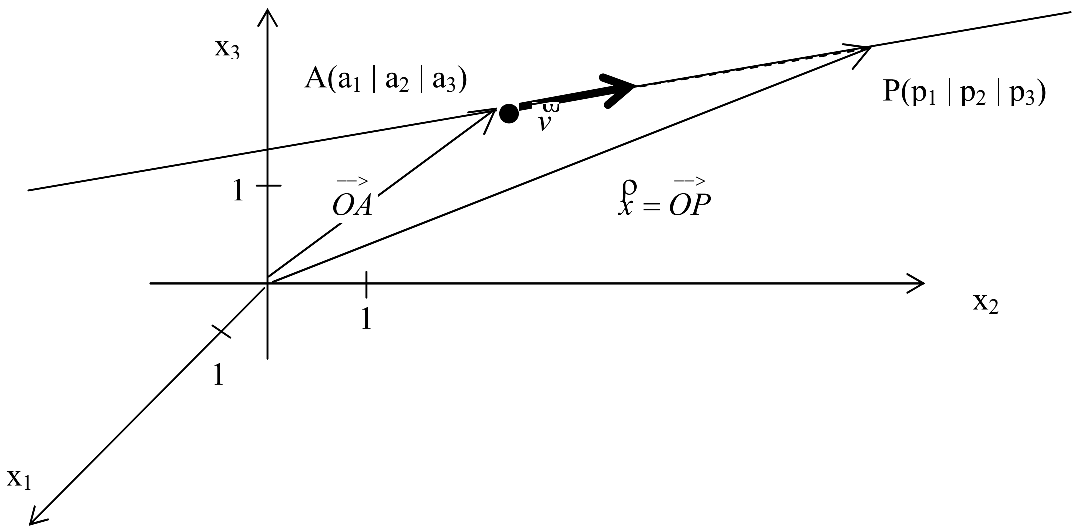
$$|\overrightarrow{T_2T_3}| = \left|\begin{pmatrix} -2--3 \\ 7-5 \\ 13-10 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{T_3B}| = \left|\begin{pmatrix} -1--2 \\ 9-7 \\ 16-13 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

1.1.2 Programmieraufgabe

Schreiben Sie ein Programm, das eine durch seine Endpunkte gegebene Strecke in n gleiche Teile teilt und bestimme die Teilpunkte dieser Strecke.

2 Gerade im Raum



$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v}$, $\quad r \in R$

$\vec{x}$	:	Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt P(p_1|p_2| p_3) der Geraden.
$\vec{x}_0 = \overrightarrow{OA}$	:	Stützvektor (Ortsvektor) der Geraden, A(a_1|a_2| a_3) nennt man Aufpunkt.
r	:	Parameter r, durchläuft (r wie durch**r**ennt) alle reellen Zahlen r wie Runner
$\vec{v} \neq \vec{0}$	:	Richtungsvektor der Geraden.

Bemerkung:
Man nennt eine Gleichung der Form

$\vec{x} = \vec{x}_0 + r \cdot \vec{a}$

eine Geradengleichung in Parameterform.

2.1 Standard-Aufgabe

Bestimmen Sie die Parameterform der Geradengleichung der
a) x_1-Achse
b) x_2-Achse
c) x_3-Achse

2.1.1 Lösung

1) Parameterform der x_1-Achse

1. Lösung
a) wähle einen Punkt auf der x_1-Achse: A(3 | 0 | 0)

b) wähle einen Vektor auf der x_1-Achse: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Geradengleichung in Parameterform lautet dann:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in R$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in R$$

2. Lösung

a) wähle einen Punkt auf der x_1-Achse: A(0 | 0 | 0)

b) wähle einen Vektor auf der x_1-Achse: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Geradengleichung in Parameterform lautet dann:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in R$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in R$$

2) Parameterform der x_2-Achse

1. Lösung

a) wähle einen Punkt auf der x_2Achse: A(0 | 5 | 0)

b) wähle einen Vektor auf der x_2-Achse: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Geradengleichung in Parameterform lautet dann:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in R$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 5-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in R$$

2. Lösung

a) wähle einen Punkt auf der x_2-Achse: A(0 | 0 | 0)

b) wähle einen Vektor auf der x_2-Achse: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Geradengleichung in Parameterform lautet dann:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in R$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in R$$

3) Parameterform der x_3-Achse

1. Lösung

a) wähle einen Punkt auf der x_3-Achse: A(0 | 0 | 7)

b) wähle einen Vektor auf der x_3-Achse: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Geradengleichung in Parameterform lautet dann:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in R$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 7-0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad r \in R$$

2. Lösung
a) wähle einen Punkt auf der x_2-Achse: A(0 | 0 | 0)

b) wähle einen Vektor auf der x_2-Achse: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Geradengleichung in Parameterform lautet dann:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in R$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in R$$

2.1.2 Zum Nachdenken

Welches Gebilde würde
durch die Parameterform beschrieben, wenn $\vec{v} = \vec{0}$ ist?

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in R \\ &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{0} \\ &= \overrightarrow{OA} + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

Es wird also ein Punkt beschrieben !

2.2 Standard-Aufgabe

gegeben:
Gerade g mit der Gleichung

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r \in R$$

gesucht:
Wählen Sie für r Werte aus der Menge M = {-1 ; 0 ; 1} und berechnen Sie die zugehörigen Punkte.
Wo befinden sich diese Punkte?

2.2.1 Lösung

a) Der zu r = -1 zugehörige Punkt auf g sei $P_1(u_1 \mid u_2 \mid u_3)$

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\cdot-3\\-1\cdot-1\\-1\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\\2+1\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} \implies P_1(4 \mid 3 \mid 2) \in g$$

b) Der zu r = 0 zugehörige Punkt auf g sei $P_2(v_1 \mid v_2 \mid v_3)$

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\cdot-3\\0\cdot-1\\0\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-0\\2-0\\3+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \implies P_2(1 \mid 2 \mid 3) \in g$$

c) Der zu r = 1 zugehörige Punkt auf g sei $P_3(w_1 \mid w_2 \mid w_3)$

$$\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\cdot-3\\1\cdot-1\\1\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-3\\2-1\\3+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} \implies P_3(-2 \mid 1 \mid 4) \in g$$

Damit:
Das Gebilde, das beschrieben wird besteht u.a. aus den Punkten:
$P_1(4 \mid 3 \mid 2)$, $P_2(1 \mid 2 \mid 3)$, $P_3(-2 \mid 1 \mid 4)$

2.3 Standard-Aufgabe

gegeben:
Gerade g mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frage:
U(10 | -3 | 5) $\in$ g ?
Wenn ja, Probe machen.

2.3.1 Lösung

Annahme: U $\in$ g

und man kennt den Wert von r - nennen wir ihn r_u - dann kann man $\overrightarrow{OU}$ wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4\cdot r_u \\ 1-2\cdot r_u \\ 3+\cdot r_u \end{pmatrix} \iff$$

$10 = 2 + 4\,r_u \;\wedge\; -3 = 1 - 2\,r_u \;\wedge\; 5 = 3 + r_u \quad \iff$
$r_u = 2 \;\wedge\; r_u = 2 \;\wedge\; r_u = 2$

==> L={2}
Damit liegt U auf der Geraden g.
Probe machen !!!

2.4 Standard-Aufgabe

gegeben:
Gerade g mit der Gleichung

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frage:
Q(10 | -3 | 6) $\in$ g ?
Wenn ja, Probe machen.

2.4.1 Lösung

Annahme: Q $\in$ g

und man kennt den Wert von r - nennen wir ihn r_Q - dann kann man $\overrightarrow{OQ}$ wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_Q \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_Q \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4 \cdot r_Q \\ 1 - 2 \cdot r_Q \\ 3 + r_Q \end{pmatrix}$$

$10 = 2 + 4\, r_Q \ \wedge\ -3 = 1 - 2\, r_Q \ \wedge\ 6 = 3 + r_Q \quad \Longleftrightarrow$
$r_Q = 2 \ \wedge\ r_Q = 2 \ \wedge\ r_Q = 3$

==> L={}
Damit liegt Q nicht auf der Geraden g.

2.4.2 Programmieraufgabe

Schreiben Sie ein Übungsgeneratorprogramm:
Dieses gibt Geraden (gegeben durch einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor) und jeweils einen Punkt P dazu vor und fragt den Anwender, ob dieser Punkt P auf der Geraden liegt. Das Programm soll auch die Lösungen liefern.
Das Programm soll nur Aufgaben mit schönen Zahlen liefern, das bedeutet ganze Zahlen z.B. zwischen -10 und 10.

2.5 Standard-Aufgabe

gegeben:
A(1 | -2 | 5), B(4 | 6 | -2)

gesucht:
Gerade g durch A und B, wobei A nicht zwingend einen Aufpunkt bezeichnet.
a) Geben Sie insgesamt 4 verschiedene Lösungen an.
b) Machen Sie bei jeder Lösung für A und B Probe (Punktprobe); d.h. nachprüfen, ob diese Punkte auf der Geraden liegen.
c) Gibt es beliebig viele Lösungen ? Begründung!

2.5.1 erste Lösung

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$, also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 6 - -2 \\ -2 - 5 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Probe1:
Annahme: $A \in g$. Dann gibt es ein r_A mit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r_A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r_A \cdot 3 \\ -2 + r_A \cdot 8 \\ 5 + r_A \cdot (-7) \end{pmatrix} \iff$$

$1 = 1 + 3\, r_A \;\wedge\; -2 = -2+8\, r_A \;\wedge\; 5 = 5 - 7\, r_A \iff r_A = 0 \;\wedge\; r_A = 0 \;\wedge\; r_A = 0$

Probe2:
Annahme: $B \in g$. Dann gibt es ein r_B mit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r_B \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r_B \cdot 3 \\ -2 + r_B \cdot 8 \\ 5 + r_B \cdot (-7) \end{pmatrix} \iff$$

$4 = 1 + 3\, r_B \;\wedge\; 6 = -2+8\, r_B \;\wedge\; -2 = 5 - 7\, r_B \iff r_B = 1 \;\wedge\; r_B = 1 \;\wedge\; r_B = 1$

2.5.2 zweite Lösung:

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{BA}$, also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ -2 - 6 \\ 5 - -2 \end{pmatrix}$$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Probe1:
Annahme: $A \in g$. Dann gibt es ein r_A mit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r_A \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r_A \cdot (-3) \\ -2 + r_A \cdot (-8) \\ 5 + r_A \cdot 7 \end{pmatrix} \iff$$

$1 = 1 - 3 r_A \wedge -2 = -2 - 8 r_A \wedge 5 = 5 + 7 r_A \iff r_A = 0 \wedge r_A = 0 \wedge r_A = 0$

Probe2:
Annahme: $B \in g$. Dann gibt es ein r_B mit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r_B \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r_B \cdot (-3) \\ -2 + r_B \cdot (-8) \\ 5 + r_B \cdot 7 \end{pmatrix} \iff$$

$4 = 1 - 3 r_B \wedge 6 = -2 - 8 r_B \wedge -2 = 5 + 7 r_B \iff r_B = -1 \wedge r_B = -1 \wedge r_B = -1$

2.5.3 dritte Lösung:

$\vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{AB}$, also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 6 - -2 \\ -2 - 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Probe1:

Annahme: $A \in g$. Dann gibt es ein r_A mit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r_A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + r_A \cdot 3 \\ 6 + r_A \cdot 8 \\ -2 + r_A \cdot (-7) \end{pmatrix} \iff$$

$1 = 4 + 3\, r_A \ \wedge\ -2 = 6 + 8\, r_A \ \wedge\ 5 = -2 - 7\, r_A \iff r_A = -1 \ \wedge\ r_A = -1 \ \wedge\ r_A = -1$

Probe2:

Annahme: $B \in g$. Dann gibt es ein r_B mit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r_B \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + r_B \cdot 3 \\ 6 + r_B \cdot 8 \\ -2 + r_B \cdot (-7) \end{pmatrix} \iff$$

$4 = 4 + 3\, r_B \ \wedge\ 6 = 6 + 8\, r_B \ \wedge\ -2 = -2 - 7\, r_B \iff r_B = 0 \ \wedge\ r_B = 0 \ \wedge\ r_B = 0$

2.5.4 vierte Lösung

$\vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BA}$, also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ -2 - 6 \\ 5 - -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Probe1:

Annahme: $A \in g$. Dann gibt es ein r_A mit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r_A \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + r_A \cdot (-3) \\ 6 + r_A \cdot (-8) \\ -2 + r_A \cdot 7 \end{pmatrix} \iff$$

$1 = 4 - 3 r_A \wedge -2 = 6 - 8 r_A \wedge 5 = -2 + 7 r_A \iff r_A = 1 \wedge r_A = 1 \wedge r_A = 1$

Probe2:

Annahme: $B \in g$. Dann gibt es ein r_B mit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r_B \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + r_B \cdot (-3) \\ 6 + r_B \cdot (-8) \\ -2 + r_B \cdot 7 \end{pmatrix} \iff$$

$4 = 4 - 3 r_B \wedge 6 = 6 - 8 r_B \wedge -2 = -2 + 7 r_B \iff r_B = 0 \wedge r_B = 0 \wedge r_B = 0$

2.5.5 beliebig viele Lösungen

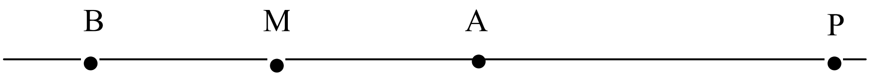
$\vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \vec{v}$

wobei $\vec{v}$ ein beliebiges Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$ ist.

2.5.6 Zusatzaufgabe (zur vorigen Aufgabe)

Der Mittelpunkt von A und B sei M. Von M ausgehend in Richtung A liegt - auf der durch A und B gehenden Geraden - der Punkt P. Die Entfernung zwischen P und M ist das dreifache der Entfernung zwischen M und A.
A(1 | -2 | 5), B(4 | 6 | -2)

a) Berechnen Sie die Koordinaten von P.
b) Zeige, dass die Koordinaten dieses Punktes P alle 4 Geradengleichungen (dieser 4 Lösungen) erfüllen.



a)
1. Lösung:
Es gilt laut Voraussetzung:
$|\overrightarrow{MP}| = 3\,|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{AP}|$, also: $3|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{AP}|$ und damit:
$|\overrightarrow{AP}| = 2\,|\overrightarrow{MA}|$
Da auch gilt: $|\overrightarrow{BA}| = 2|\overrightarrow{MA}|$, folgt: $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AP}|$
Somit ist $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{AP}$ gleich lang. Da die 2 Vektoren auf einer Geraden liegen sind sie parallel
Außerdem ist $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{AP}$ auch gleich gerichtet. Damit gilt: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AP}$

Damit:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ -2-6 \\ 5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$$, also: P(-2 | -10 | 12)

2. Lösung:

Berechnung vom M:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \frac{\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}1+4\\-2+6\\5-2\end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}2{,}5\\2\\1{,}5\end{pmatrix}$$

also: M(2,5 | 2 | 1,5)

Berechnung vom $\overrightarrow{MA}$:

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix}1-2{,}5\\-2-2\\5-1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1{,}5\\-4\\3{,}5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix}2{,}5\\2\\1{,}5\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}-1{,}5\\-4\\3{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\2\\1{,}5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4{,}5\\-12\\10{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-10\\12\end{pmatrix}$$, also: P(-2 | -10 | 12)

b)
Annahme: P(-2 | -10 | 12) $\in$ g
Dann gibt es ein r_p, so dass gilt:

1) Parameterform der 1. Lösung

$$\begin{pmatrix}-2\\-10\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} + r_p\cdot\begin{pmatrix}3\\8\\-7\end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$-2 = 1 + 3\,r_p \;\wedge\; -10 = -2 + 8r_p \;\wedge\; 12 = 5 - 7r_p \quad \Longleftrightarrow$
$r_p = -1 \;\wedge\; r_p = -1 \;\wedge\; r_p = -1 \quad \Longleftrightarrow$

==> L={-1}
Damit liegt P auf der Geraden g.

Probe machen !!!
Alternative Lösung:

2) Parameterform der 2. Lösung

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r_p \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$-2 = 1 - 3\,r_p \;\wedge\; -10 = -2 - 8r_p \;\wedge\; 12 = 5 + 7r_p \quad \Longleftrightarrow$

$r_p = 1 \;\wedge\; r_p = 1 \;\wedge\; r_p = 1 \quad \Longleftrightarrow$

$\Longrightarrow$ L={1}

Damit liegt P auf der Geraden g.

Probe machen !!!

3) Parameterform der 3. Lösung

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r_p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$-2 = 4 + 3\,r_p \;\wedge\; -10 = 6 + 8r_p \;\wedge\; 12 = -2 - 7r_p \quad \Longleftrightarrow$

$r_p = -2 \;\wedge\; r_p = -2 \;\wedge\; r_p = -2 \quad \Longleftrightarrow$

$\Longrightarrow$ L={-2}

Damit liegt P auf der Geraden g.

Probe machen !!!

4) Parameterform der 4. Lösung

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r_p \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$-2 = 4 - 3\,r_p \;\wedge\; -10 = 6 - 8r_p \;\wedge\; 12 = -2 + 7r_p \quad \Longleftrightarrow$

$r_p = 2 \;\wedge\; r_p = 2 \;\wedge\; r_p = 2 \quad \Longleftrightarrow$

$\Longrightarrow$ L={2}

Damit liegt P auf der Geraden g.

Probe machen !!!

2.5.7 Vorbereitende Übungsaufgabe

gegeben:

Gerade g_1 mit B(3 | 0 | 1) und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gerade g_2 mit A(0 | 5 | 1) und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

gesucht:

1) Wo liegen diese Geraden

2) Geben Sie jeweils von g_1 und g_2 die Geradengleichung in Parameterform an.

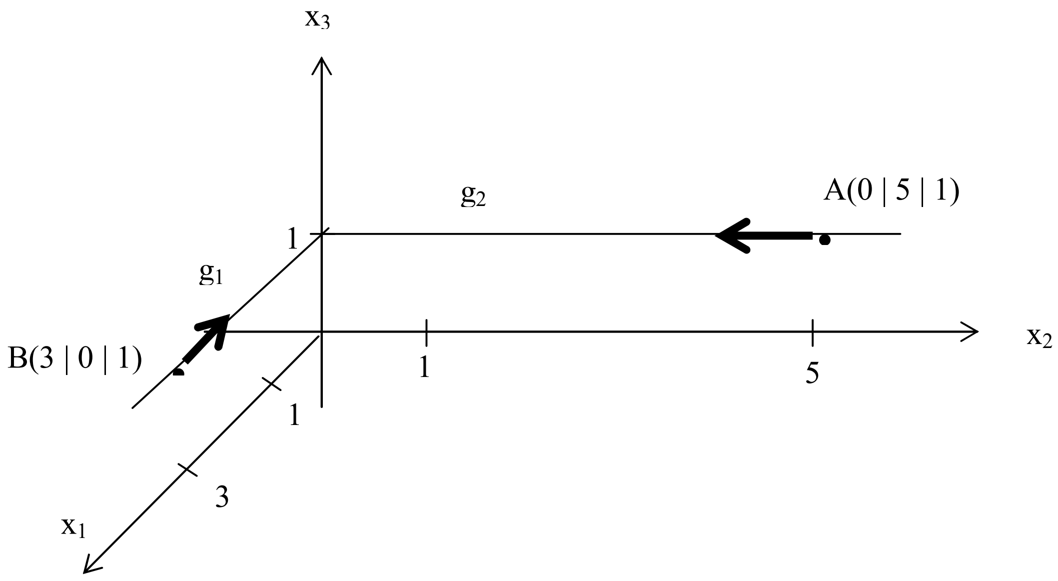
3) Bestimmen Sie, ohne mathematische Berechnung, den Schnittpunkt dieser Geraden.

4) Um welchen Faktor müssen die Richtungsvektoren jeweils bis zum Schnittpunkt der Geraden verlängert (verkürzt) werden ? Begründen Sie dies rein anschaulich (ohne Rechnung).

5) Begründen Sie rein rechnerisch, um welchen Faktor die Richtungsvektoren jeweils bis zum Schnittpunkt der Geraden verlängert (verkürzt) werden müssen.

6) Bestimmen Sie rein rechnerisch den Schnittpunkt dieser Geraden.

Lösung



1) g_1 liegt auf einer Parallelen zur x_1-Achse, die um 1 in x3-Richtung verschoben wurde.
g_2 liegt auf einer Parallelen zur x_2-Achse, die um 1 in x3-Richtung verschoben wurde.

2) g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Der Schnittpunkt ist der Punkt S(0 | 0 | 1)

4) Der Richtungsvektor auf g_1 muss um das 3-fache, der Richtungsvektor von g_2 um das 5-fache verlängert werden.

5) Im Schnittpunkt müssen die Ortsvektoren gleich sein. (Man prüft die vermuteten Werte 3 und 5):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 3 + 3 \cdot (-1) = 0 + 5 \cdot 0 \\ 0 + 3 \cdot 0 = 5 + 5 \cdot (-1) \\ 1 + 3 \cdot 0 = 1 + 5 \cdot 0 \end{array}$$

```
<==>
0 = 0   (wahr)
0 = 0   (wahr)
1 = 1   (wahr)
```

6) Der Schnittpunkt sei S(x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}).

$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also ist S(0 | 0 | 1) der Schnittpunkt.

2.6 Standard-Aufgabe

gegeben:
Gerade g und h mit den Gleichungen

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

gesucht:
Schnittpunkt der Geraden

Frage:
Wie kann man durch Probieren eine Lösung bekommen ?

Antwort:
Indem man für t und r verschiedene Werte einsetzt und dann die Koordinaten des Ortsvektors einsetzt und vergleicht.

2.6.1 Lösung durch Probieren

probiere r = 1, t = 4:

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, ergibt Punkt $P_1(-2 \mid 1 \mid 4)$

$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix}$, ergibt Punkt $P_4(14 \mid 21 \mid 27)$

man sieht: $P_1 \neq P_4$

also hat man durch diesen Probierversuch keinen Schnittpunkt bekommen.
Wagen Sie einen neuen Versuch !

2.6.2 exakte Lösung

Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} \mid x_{2S} \mid x_{3S})$. Dann gibt es ein r_s und t_s mit:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{1S}\\x_{2S}\\x_{3S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3 \cdot r_s\\-1 \cdot r_s\\1 \cdot r_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 \cdot t_s\\5 \cdot t_s\\6 \cdot t_s\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1-3 \cdot r_s\\2-1 \cdot r_s\\3+1 \cdot r_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+4 \cdot t_s\\1+5 \cdot t_s\\3+6 \cdot t_s\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$1 - 3r_s = -2 + 4t_s$	G1
$2 - r_s = 1 + 5\ t_s$	G2
$3 + r_s = 3 + 6\ t_s$	G3
$4t_s + 3r_s = 3$	G4
$5t_s + r_s = 1$	G5
$6t_s - r_s = 0$	G6
4 3 3	G4 Matrix-
5 1 1	G5 schreib-
6 -1 0	G6 weise
4 3 3	G7=G4
0 11 11	G8=5*G4-4*G5
0 11 9	G9=3*G4-2*G6
44 0 0	G10=11*G7-3*G8
0 11 11	G11=G8
0 0 2	G12=G8-G9

$L = \emptyset$
Es existiert keine Lösung, d.h. die Geraden schneiden sich nicht!

2.7 Gegenseitige Lage von Geraden

2.7.1 Standard-Aufgabe

gegeben:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

gesucht:
Schnittpunkt(e) der Geraden

2.7.1.1 Lösung

Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} \mid x_{2S} \mid x_{3S})$. Dann gibt es ein t_s und r_s mit:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot t_s \\ 3 \cdot t_s \\ 1 \cdot t_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot r_s \\ 1 \cdot r_s \\ 2 \cdot r_s \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 + 2 \cdot t_s \\ -2 + 3 \cdot t_s \\ 2 + 1 \cdot t_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 \cdot r_s \\ -6 + 1 \cdot r_s \\ -1 + 2 \cdot r_s \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} 7 + 2t_s &=& 4 + r_s \\ -2 + 3t_s &=& -6 + r_s \\ 2 + t_s &=& -1 + 2r_s \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2t_s - r_s &=& -3 \\ 3t_s - r_s &=& -4 \\ t_s - 2r_s &=& -3 \end{array}$$

t_s	r_s	b	Op	KS
2	-1	-3	G1	-2
3	-1	-4	G2	-2
1	-2	-3	G3	-4
2	-1	-3	G4=G1	-2
0	-1	-1	G5=3G1-2G2	-2
0	3	3	G6=G1-2G3	6
-2	0	2	G7=-G4+G5	0
0	-1	-1	G8=G5	-2
0	0	0	G9=3G5+G6	0
1	0	-1	G10=G7/-2	0
0	1	1	G11=G8/-1	2

also:
```
tₛ = -1
rₛ =  1
L = {(-1;1)}
```

Damit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit: S(5 | -5 | 1)
Ergebnis: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.

2.7.2 Herstellung eigener Übungsaufgaben (Geraden haben genau einen Schnittpunkt)

2.7.2.1 Beispiel

1. Schritt:
Geben Sie einen beliebigen Schnittpunkt der 2 Geraden vor, wie z.B: S(4 | 5 | 6)

2. Schritt:

Geben Sie einen beliebigen Richtungsvektor vor, z.B: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Basteln Sie einen zu dem Richtungsvektor $\vec{v}$ nichtparallelen Vektor Richtungsvektor) $\vec{w}$
Wie macht man das ?

Multipliziere jede Koordinate des Richtungsvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit einer Zahl k_1, k_2, k_3, wobei diese

Faktoren nicht alle gleich sein dürfen.

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot K_1 \\ 2 \cdot K_2 \\ 3 \cdot K_3 \end{pmatrix}$$

wähle z.B:
$k_1 = 7$, $K_2 = -1$, $K_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 7 \\ 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3. Schritt:
Damit hat man dann die 2 Gleichungen der Geraden in Parameterform:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Eigentlich wären wir jetzt fertig, doch könnte man hier den Schnittpunkt leicht ablesen. Deshalb machen wir die Aufgabe etwas schwieriger, indem man auf g und h andere Aufpunkte wählt!

4. Schritt:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wähle z.B: t = 1

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ wähle z.B: r = -2

Das ergibt dann:

$\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wähle z.B: t = 3

$\begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ wähle z.B: r = -2

Damit hat man dann anspruchsvollere Darstellungen der Geraden g und h:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

6. Schritt:
Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

7. Schritt:
Nun löst man die Aufgabe, deren Lösung man kennt !

2.7.3 Standard-Aufgabe

gegeben:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

gesucht:
Schnittpunkt(e) der Geraden

2.7.3.1 erste Lösung

Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} \mid x_{2S} \mid x_{3S})$. Dann gibt es ein t_s und r_s mit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot t_s \\ 4 \cdot t_s \\ 1 \cdot t_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot r_s \\ 8 \cdot r_s \\ 2 \cdot r_s \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot t_s \\ 2 + 4 \cdot t_s \\ 3 + 1 \cdot t_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4 \cdot r_s \\ 6 + 8 \cdot r_s \\ 4 + 2 \cdot r_s \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{aligned} 1 + 2t_s &= 3 + 4r_s \\ 2 + 4t_s &= 6 + 8r_s \\ 3 + t_s &= 4 + 2r_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2t_s - 4r_s &= 2 \\ 4t_s - 8r_s &= 4 \\ t_s - 2r_s &= 1 \end{aligned}$$

t_s	r_s	b	Op	KS
2	-4	2	G1	0
4	-8	4	G2	0
1	-2	1	G3	0
2	-4	2	G4=G1	0
0	0	0	G5=2G1-G2	0
0	0	0	G6=-G1+2G3	0
1	-2	1	G7=G4/2	

also:

$t_s = 2r_s + 1$

$L = \{(t_s;r_s) \mid r_s \in R \wedge t_s = 2r_s + 1\}$

Ergebnis: Die Geraden schneiden sich in unendlich vielen Punkten, d.h:
g = h

2.7.3.2 zweite Lösung

Wenn zwei Geraden g und h gleich (identisch) sind, dann sind sie auch parallel.
Umgekehrt folgt nicht:
Wenn zwei Geraden g und h parallel sind, dann sind sie auch gleich.
Was muss als weitere Voraussetzung diesem Satz noch hinzugefügt werden, dass er wahr wird ?

2.7.3.2.1 Satz

Wenn zwei Geraden g und h parallel sind und ein Punkt von g auch auf h liegt , dann sind sie auch gleich.

Diesen Satz verwenden wir um die obige Aufgabe zu lösen.

1) Zeige, dass g und h parallel sind.
Dazu genügt zu zeigen, dass ein Richtungsvektor der einen Geraden einem Vielfachen (ungleich null) des Richtungsvektors der anderen Geraden ist.

$$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2k \\ 4k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

```
2k  =  4    <==>   k=2
4k  =  8    <==>   k=2
k   =  2    <==>   k=2
```

Ergebnis: Der Richtungsvektor von h ist ein Vielfaches des Richtungsvektors von g.

2) Nimm einen Punkt auf g, z.B. P(1 | 2 | 3).
Zeige, dass dieser auf h liegt. Kurz zeige:
$P(1 | 2 | 3) \in g \Longrightarrow P(1 | 2 | 3) \in h$

Wenn $P(1 | 2 | 3) \in h$, dann gibt es ein r_p so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r_p \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$1 = 3 + 4 \cdot r_p \Leftrightarrow r_p = -0,5$
$2 = 6 + 8 \cdot r_p \Leftrightarrow r_p = -0,5$
$3 = 4 + 2 \cdot r_p \Leftrightarrow r_p = -0,5$

Ergebnis: $P(1 | 2 | 3) \in h$, also sind die Geraden identisch.

2.7.3.3 dritte Lösung

2.7.3.3.1 Satz

Wenn A liegt auf g und A liegt auf h und B liegt auf g und B liegt auf h und $A \neq B$,
dann sind g und h identisch

Diesen Satz verwenden wir um die obige Aufgabe zu lösen.

1) Nimm einen Punkt auf g, z.B. P(1 | 2 | 3).
Zeige, dass dieser auf h liegt. Kurz zeige:
$P(1 \mid 2 \mid 3) \in g \implies P(1 \mid 2 \mid 3) \in h$
(siehe oben)

2) Nimm einen Punkt auf h, z.B. Q(3 | 6 | 4).
Zeige, dass dieser auf g liegt. Kurz zeige:
$Q(3 \mid 6 \mid 4) \in h \implies Q(3 \mid 6 \mid 4) \in g$

Wenn $Q(3 \mid 6 \mid 4) \in g$, dann gibt es ein r_Q so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r_Q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$$

$3 = 1 + 2 \cdot r_Q \iff r_Q = 1$
$6 = 2 + 4 \cdot r_Q \iff r_Q = 1$
$4 = 3 + 1 \cdot r_Q \iff r_Q = 1$

Ergebnis: $Q(3 \mid 6 \mid 4) \in g$ und $P \neq Q$ also sind die Geraden identisch.

2.7.4 Herstellung eigener Übungsaufgaben (Geraden sind identisch)

2.7.4.1 Beispiel

1. Schritt:
Geben Sie eine beliebige Gerade vor, wie z.B:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$$

2. Schritt:
Basteln Sie einen anderen Richtungsvektor, der auf g liegt, indem Sie den Richtungsvektor, der auf g liegt, verlängern oder verkürzen. Wähle z.B. k = 2:

$$2 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$$

3. Schritt:
Bestimme auf g einen Punkt. Wähle dazu z.B. t = 1:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}, \text{ also } P(3 \mid 6 \mid 4)$$

4. Schritt:
Durch P und $\begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$ wird die Gerade h festgelegt:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$$

5. Schritt:
Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$$

6. Schritt:
Nun löst man die Aufgabe, deren Lösung man kennt !

Standard-Aufgabe

gegeben:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

gesucht:
Schnittpunkt(e) der Geraden

2.7.4.2 Lösung

Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} \mid x_{2S} \mid x_{3S})$. Dann gibt es ein t_s und r_s mit:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3 + 4t_s &= 1 - 4r_s \\ 6 + 8t_s &= \quad - 6r_s \\ 4 + 2t_s &= 3 + 2r_s \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 4t_s + 4r_s &= -2 \\ 8t_s + 6r_s &= -6 \\ 2t_s - 2r_s &= -1 \end{aligned}$$

t_s	r_s	b	Op	KS
4	4	-2	G1	6
8	6	-6	G2	8
2	-2	-1	G3	-1
4	4	-2	G4=G1	6
0	2	2	G5=2G1-G2	4
0	-8	0	G6=-G1+2G3	-8
-4	0	6	G7=-G4+2G5	2
0	2	2	G8=G5	4
0	0	8	G9=4G5+G6	8

L = { }

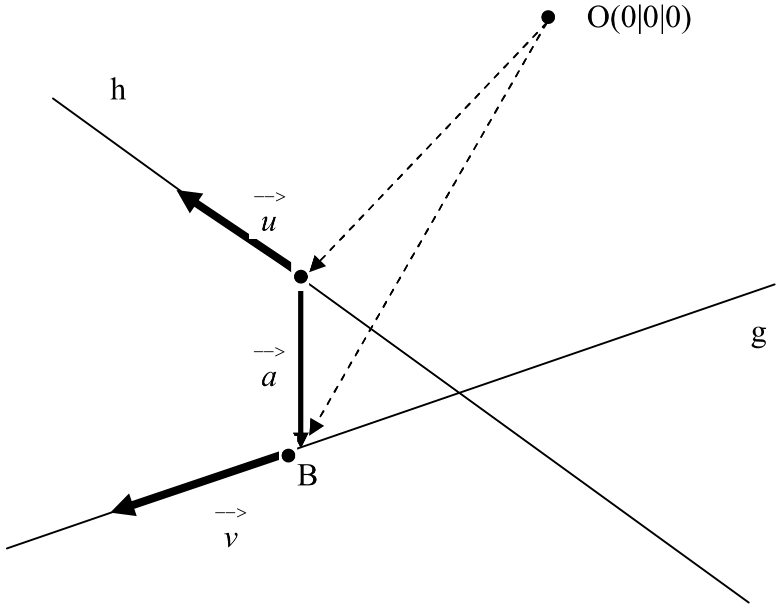
Ergebnis: Die Geraden sind **windschief**, d.h.
sie schneiden sich nicht und sind nicht parallel.
Warum sind sie nicht parallel ? Weil die Richtungsvektoren nicht parallel sind.
Wenn die Richtungsvektoren parallel wären, dann gäbe es ein k mit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4k \\ -6k \\ 2k \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} 4&=-4k & \Longleftrightarrow \quad & k=-1 \\ 8&=-6k & \Longleftrightarrow \quad & k=-4/3 \\ 2&=2k & \Longleftrightarrow \quad & k=1 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Richtungsvektor von g und h sind nicht parallel.

2.7.5 Herstellung eigener Übungsaufgaben (Geraden sind windschief)

2.7.5.1 Beispiel



1. Schritt:
Geben Sie einen beliebigen Vektor vor. Dieser soll der "Abstandvektor" zwischen den noch zu konstruierenden Geraden g und h sein. Zum Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir auch gleich den Abstand zwischen diesen Geraden:

$d = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

2. Schritt:

Es werden nun zwei auf $\vec{a}$ senkrecht stehende Vektoren gebastelt.

Für einen zu dieser Geraden senkrechter Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2 - 3 \cdot u_3 = 0 \Longleftrightarrow u_1 = 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen. Wähle z.B.
$u_2 = 4$, $u_3 = -7$, dann ergibt sich für u_1:
$u_1 = 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-7) = -13$

Damit hat man dann einen zu $\vec{a}$ senkrechten Vektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2u_2 + 3u_2 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} =$

für $u_2 = 4$, $u_3 = -7$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-7) \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Jetzt braucht man noch einen zweiten zu $\vec{a}$ senkrechten Vektor $\vec{v}$

Damit die Aufgabe nicht zu einfach wird, soll $\vec{v}$ nicht parallel zu $\vec{u}$ sein (d.h, nicht ein Vielfaches von $\vec{u}$ sein).
Damit dies nicht geschieht, dürfen die Werte, die man gerade für u_2 und u_3 gewählt hat, nicht den gleichen Faktor enthalten. Denn sonst würde gelten $u_2' = k \cdot u_2$ und $u_3' = k \cdot u_3$
Und damit:
$u_1' = 2 \cdot k \cdot u_2 + 3 \cdot k \cdot u_3 = k(2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3) = k \cdot u'$

Damit wäre der Vektor $\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix}$ ein Vielfaches von $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Man wählt also z.B:
$u_2 = 5 \cdot 4 = 20$, $u_3 = 10 \cdot (-7) = -70$, dann ergibt sich für u_1:
$u_1 = 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot (-70) = -170$
also:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (5 \cdot 4) + 3 \cdot (10 \cdot -7) \\ 5 \cdot 4 \\ 10 \cdot -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -170 \\ 20 \\ -70 \end{pmatrix}$$

3. Schritt:
Jetzt wählt man für die eine der zwei Geraden einen beliebigen Aufpunkt, z.B: A(7 | 8 | 12)
Den Aufpunkt B der anderen Geraden bekommt man, indem man zu $\vec{OA}$ den Vektor $\vec{a}$ addiert, formal: $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{a}$
also

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ also } B(8 \mid 6 \mid 9)$$

Das ergibt die Geraden g und h:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -170 \\ 20 \\ -70 \end{pmatrix}$$

5. Schritt:
Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -170 \\ 20 \\ -70 \end{pmatrix}$$

6. Schritt:
Nun löst man die Aufgabe, deren Lösung man kennt !

2.7.6 Aufgabe

Berechnen Sie den kürzesten Abstand zweier Geraden

2.8 Standard-Aufgabe

gegeben:
Gerade g mit der Gleichung

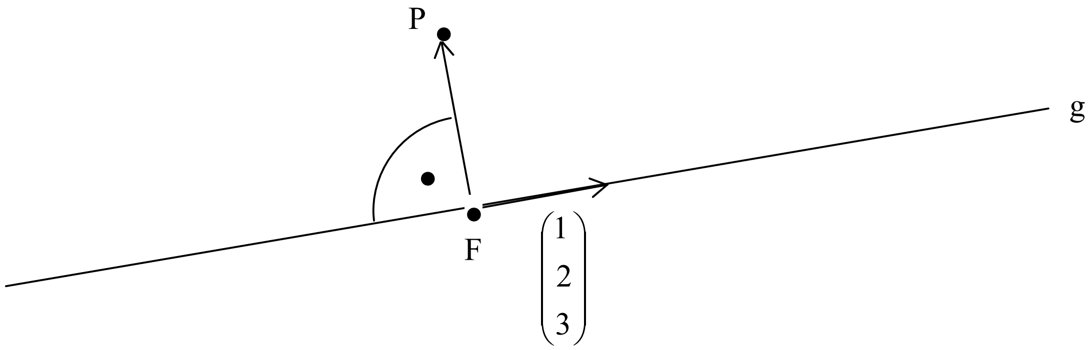
$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und
der Punkt P(-7 | 9 | 5), von dem ein Lot (d.h. die Senkrechte) auf g gefällt wird.

gesucht:
1) Koordinaten des Schnittpunkts F zwischen der Senkrechten und g.
2) Entfernung zwischen P und F

2.8.1 erste Lösung

1) Der Schnittpunkt sei F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F}).



Da F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F}) $\in$ g, gibt es ein r_F mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r_F \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + r_F \\ -1 + 2r_F \\ 4 + 3r_F \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

$$\overrightarrow{FP} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} -7 - x_{1F} \\ 9 - x_{2F} \\ 5 - x_{3F} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} -7 - 2 - r_F \\ 9 + 1 - 2r_F \\ 5 - 4 - 3r_F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

also:

$$\begin{pmatrix} -9 - r_F \\ 10 - 2r_F \\ 1 - 3r_F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \text{ und damit:}$$

$-9-r_F + (10 - 2r_F)\cdot 2 + (1-3r_F)\cdot 3 = 0 \iff$
$-9 - r_F + 20 - 4r_F + 3 - 9r_F = 0 \iff$
$14 - 14r_F = 0 \iff$

$r_F = 1$
also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{also } F(3 \mid 1 \mid 7)$$

2) Entfernung zwischen P und F

$$|\overrightarrow{PF}| = \left| \begin{pmatrix} 3-(-7) \\ 1-9 \\ 7-5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{10^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{168}$$

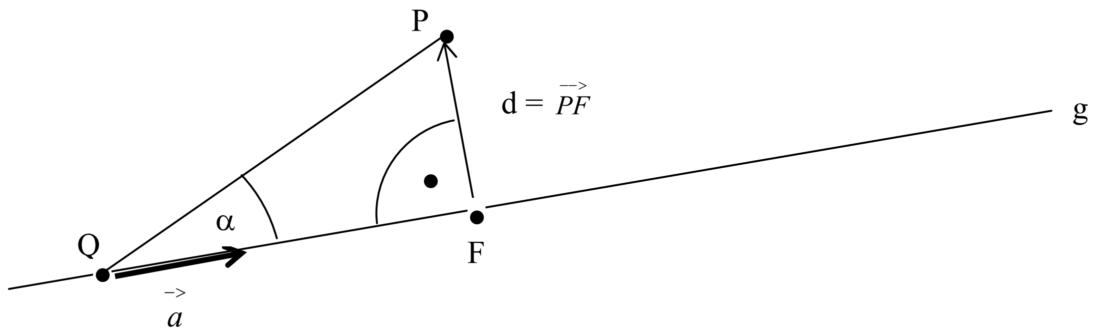
2.8.2 zweite Lösung (allgemein)

Die gegebene Gerade g lautet

$\vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{a}$

wobei:

$\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$, $\vec{a}$ und P gegeben sind



1) Berechnung des Abstands d = $|\overrightarrow{PF}|$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{QP}|\cdot|\vec{a}|}$$

d = sin α · $|\overrightarrow{PQ}|$

es gilt:

sin² α + cos² α = 1

also:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

damit:

$$d = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\cdot|\overrightarrow{PQ}|$$

also:

$$\boxed{d = \sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{QP}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{QP}|\cdot|\vec{a}|}\right)^2}\cdot|\overrightarrow{PQ}|}$$

2) Berechnung des Fußpunkts F:

Es gilt:

e = cos α · $|\overrightarrow{PQ}|$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OQ} + \frac{e}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OQ} + \frac{\cos\alpha\cdot|\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OQ} + \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{QP}|\cdot|\vec{a}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OQ} + \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|}\cdot\vec{a}}$$

2.8.2.1 Beispiel

Gerade g mit der Gleichung

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; also: Q(2 | -1 | 4) und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

und

der Punkt P(-7 | 9 | 5), von dem ein Lot (d.h. die Senkrechte) auf g gefällt wird.

Damit:

$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -7-2 \\ 9-(-1) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $|\overrightarrow{QP}| = \sqrt{(-9)^2 + 10^2 + 1^2} = \sqrt{182}$

$\vec{a} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

1) Berechnung des Abstands:
also:

$$d = \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{a}}{|\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{a}|} \right)^2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| =$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{182} \cdot \sqrt{14}} \right)^2} \cdot \sqrt{182} = \sqrt{1 - \left(\frac{(-9) \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{\sqrt{182} \cdot \sqrt{14}} \right)^2} \cdot \sqrt{182} =$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{14}{\sqrt{182 \cdot 14}} \right)^2} \cdot \sqrt{182} = \sqrt{168}$$

2) Berechnung des Fußpunkts:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OQ} + \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a}|} \cdot \vec{a} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(\frac{\begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{14}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

also:
F(3 | 1 | 7)

2.8.3 Programmieraufgabe

Von einem Punkt P(x_{1P} | x_{2P} | x_{3P}) soll das Lot auf eine Gerade mit dem Aufpunkt Q(x_{1Q} | x_{2Q} | x_{3Q}) und dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gefällt werden.

1) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts F zwischen der Senkrechten und g.
2) Bestimmen Sie die Entfernung zwischen P und F
3) Erstellen Sie dazu ein Übungsaufgaben-Erstellungsprogramm:
Das Programm soll für eine beliebige Gerade g, einem beliebigen Fußpunkt F und einem beliebigen darauf senkrechrecht errichtetem Vektor, der auf P zeigt, alle "schönen" Schülerwerte ermitteln.
"schöner Wert" bedeutet: einstellig (notfalls zweistellig zwischen z.B. -20 und 20) und ganzzahlig.

2.8.4 Programmieraufgabe

Von einem Punkt P, der innerhalb eines beliebigen Dreiecks liegt, werden die Lote auf die 3 Seiten gefällt. Die Summe dieser 3 Abstände (= "Lotlänge") ist unabhängig vom Punkt P. Schreiben Sie ein Programm, das dies plausibel macht:
Berechnen Sie die Summe für viele Punkte innerhalb des Dreiecks.

2.8.5 Herstellung eigener Übungsaufgaben obigen Typs

Geben Sie selbst die Lösung (Gerade und einen darauf senkrechten Vektor) vor.

2.8.5.1 Beispiel

1. Schritt:
Geben Sie eine Gerade vor.
Im folgenden Beispiel wäre dies also z.B.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Ein zu dieser Geraden senkrechter Vektor $\vec{s} = \overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix}$ ist senkrecht auf dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ der Geraden g.

Also gilt:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 \cdot x_{1S} + x_{2S} + 5 \cdot x_{3S} = 0$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen. Wähle z.B.
$x_{1S} = 1$, $x_{3S} = 2$, dann ergibt sich für x_{2S}:
$x_{2S} = 2 \cdot x_{1S} - 5 \cdot x_{3S} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -8$

Damit gilt: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Schritt:
Wähle einen Fußpunkt F auf der Geraden g, z.B. für r = 2

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } F(-2 \mid 5 \mid 14)$$

4. Schritt:
Für den Punkt P gilt dann:

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0F} + \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}, \text{ also: } P(-1 \mid -3 \mid 16)$$

5. Schritt:
Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:
Von P(-1 | -3 | 16) soll das Lot auf die Gerade g gefällt werden.

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts F und die Entfernung zwischen P und F

6. Schritt:
Nun löst man die Aufgabe, deren Lösung man kennt !

2.9 Standard-Aufgabe

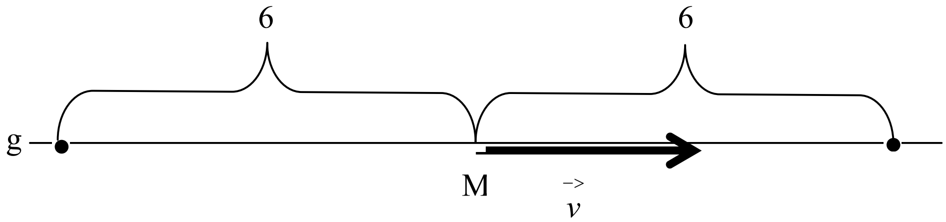
gegeben:
Punkt M(1 | 2 | 3) und Gerade g mit der folgenden Gleichung:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gesucht:
1) Warum liegt M auf der Geraden g ?
2) Punkte A, B auf g die von M den Abstand 6 LE haben.

2.9.1 erste Lösung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



1) Berechnung der Länge des Richtungsvektors von g:

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

2) Berechnen, wie oft der Richtungsvektor von g in die Strecke der Länge 6 reinpasst:

$$m = \frac{6}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{6}{3} = 2$$

3) Berechnung der Punkte A und B:

$$\begin{pmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \\ x_{3A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{also:} \quad A(5|\ 0\ |\ -1)$$

$$\begin{pmatrix} x_{1B} \\ x_{2B} \\ x_{3B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{also:} \quad B(-3\ |\ 4\ |\ -7)$$

2.9.2 zweite Lösung

Sei $\overrightarrow{m_0}$ der Einheitsvektor des Richtungsvektors von g. Dieser hat die Länge 1. Es gilt:

$$\overrightarrow{m_0} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

1) $\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0M} + 6 \cdot \overrightarrow{m_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, also A(5 | 0 | -1)

2) $\overrightarrow{0B} = \overrightarrow{0M} - 6 \cdot \overrightarrow{m_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, also B(-3 | 4 | 7)

2.9.3 dritte Lösung:

$\overrightarrow{MA}$ ist ein Vielfaches (nennen wir es k) des Richtungsvektors $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Geraden g

Der Betrag dieses Vielfaches k des Richtungsvektors ist also 6:
also:

$$\left| k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 6 \iff |k| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 6 \iff |k| \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 6 \iff$$

$|k| \cdot 3 = 6 \iff |k| = 2 \iff k_1 = 2 \ ; k_2 = -2$

also:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{A(5| 0 | -1)}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{B(-3| 4 | 7)}$$

2.9.4 letzte Lösung (schlecht, da Wurzelgleichung)

Da $A(x_{1A} \mid x_{2A} \mid x_{3A}) \in g$, gibt es ein r_A mit:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \\ x_{3B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r_A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r_A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r_A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot r_A + 6 \\ -1 \cdot r_A - 3 \\ -2 \cdot r_A - 6 \end{pmatrix}$$ und $|\overrightarrow{MA}| = 6$:

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \cdot r_A + 6 \\ -1 \cdot r_A - 3 \\ -2 \cdot r_A - 6 \end{pmatrix} \right| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2 \cdot r_A + 6)^2 + (-1 \cdot r_A - 3)^2 + (-2 \cdot r_A - 6)^2} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4r_A^{\ 2} + 24r_A + 36 + r_A^{\ 2} + 6r_A + 9 + 4r_A^{\ 2} + 24r_A + 36} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{9r_A^{\ 2} + 54r_A + 81} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9(r_B^{\ 2} + 6r_B + 9)} = 6 \Leftrightarrow 3\sqrt{r_B^{\ 2} + 6r_B + 9} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{r_B^{\ 2} + 6r_B + 9} = 2$$

Quadrieren auf jeder Seite:

$r_A^{\ 2} + 6r_A + 9 = 4 \Leftrightarrow r_A^{\ 2} + 6r_A + 5 = 0 \Leftrightarrow r_{A1} = -5$ und $r_{A2} = -1$

Also:

$$\begin{pmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \\ x_{3A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ also: A(5| 0 | -1)

$$\begin{pmatrix} x_{1B} \\ x_{2B} \\ x_{3B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + (-5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$ also: B(-3 | 4 | -7)

2.9.5 Herstellung eigener Übungsaufgaben obigen Typs

2.9.5.1 Erste Möglichkeit

Geben Sie selbst die Lösung (die Punkte A, B und die Gerade g) vor.

2.9.5.1.1 Beispiel

1. Schritt: Eine Gerade g vorgeben

Im folgenden Beispiel wäre dies also z.B.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: M vorgeben

Wähle einen Punkt M auf der Geraden g, z.B. für r = 5. Dies soll der Mittelpunkt von A und B sein.

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } M(-8 \mid 8 \mid 29)$$

Aus taktischen Gründen (um schneller A und B bestimmen zu können), wählen wir M als Aufpunkt von g und können g damit auch so darstellen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 29 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wähle einen Punkt A auf der Geraden g, z.B. für r = 3

$$\begin{pmatrix} -14 \\ 11 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 29 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } A(-14 \mid 11 \mid 44)$$

3. Schritt: B bestimmen

Bestimme den Punkt B für r = -3

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 29 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } B(-2 \mid 5 \mid 14)$$

4. Schritt: Abstand bestimmen

Bestimme den Abstand von M und A:

$$|\overrightarrow{MA}| = \left| \begin{pmatrix} -14-(-8) \\ 11-8 \\ 44-29 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 20^2} = \sqrt{270}$$

zum Testen (Probe):

$$|\overrightarrow{MB}| = \left|\begin{pmatrix} -2-(-8) \\ 5-8 \\ 14-29 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-15)^2} = \sqrt{270}$$

5. Schritt:

Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:

Bestimme die Punkte A, B auf g die von M(-8 | 8 | 29) den Abstand $\sqrt{270}$ LE haben.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.9.5.2 Zweite Möglichkeit

Geben Sie selbst die Lösung (die Punkte A, B und die Gerade g) vor.

2.9.5.2.1 Beispiel

1. Schritt:

Geben Sie eine Gerade vor.
Im folgenden Beispiel wäre dies also z.B.

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Wähle einen Punkt M auf der Geraden g, z.B. für r = 5

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } M(-8 \mid 8 \mid 29)$$

Wähle einen Punkt A auf der Geraden g, z.B. für r = 8

$$\begin{pmatrix} -14 \\ 11 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } A(-14 \mid 11 \mid 44)$$

3. Schritt:

Bestimme den Punkt B: r = 5 - (8 - 5) = 2

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } B(-2 \mid 5 \mid 14)$$

4. Schritt:

Bestimme den Abstand von M und A:

$$|\overrightarrow{MA}| = \left| \begin{pmatrix} -14-(-8) \\ 11-8 \\ 44-29 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 20^2} = \sqrt{270}$$

zum Testen:

$$|\overrightarrow{MB}| = \left| \begin{pmatrix} -2-(-8) \\ 5-8 \\ 14-29 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-15)^2} = \sqrt{270}$$

5. Schritt:

Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:

Bestimme die Punkte A, B auf g die von M(-2 | 5 | 14) den Abstand $\sqrt{270}$ LE haben.

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.9.5.3 Dritte Möglichkeit

Geben Sie selbst die Lösung (die Punkte A, B und die Gerade g) vor.

2.9.5.3.1 Beispiel

1. Schritt:
Geben Sie eine Gerade vor.
Im folgenden Beispiel wäre dies also z.B.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:
Wähle einen Punkt A auf der Geraden g, z.B. für r = 5

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } A(-8 \mid 8 \mid 29)$$

Wähle einen Punkt B auf der Geraden g, z.B. für r = -1

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } B(4 \mid 2 \mid -1)$$

3. Schritt:
Bestimme den Mittelpunkt M von A und B:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 29 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}, \text{ also: } M(-2 \mid 5 \mid 14)$$

4. Schritt:
Bestimme den Abstand von M und A:

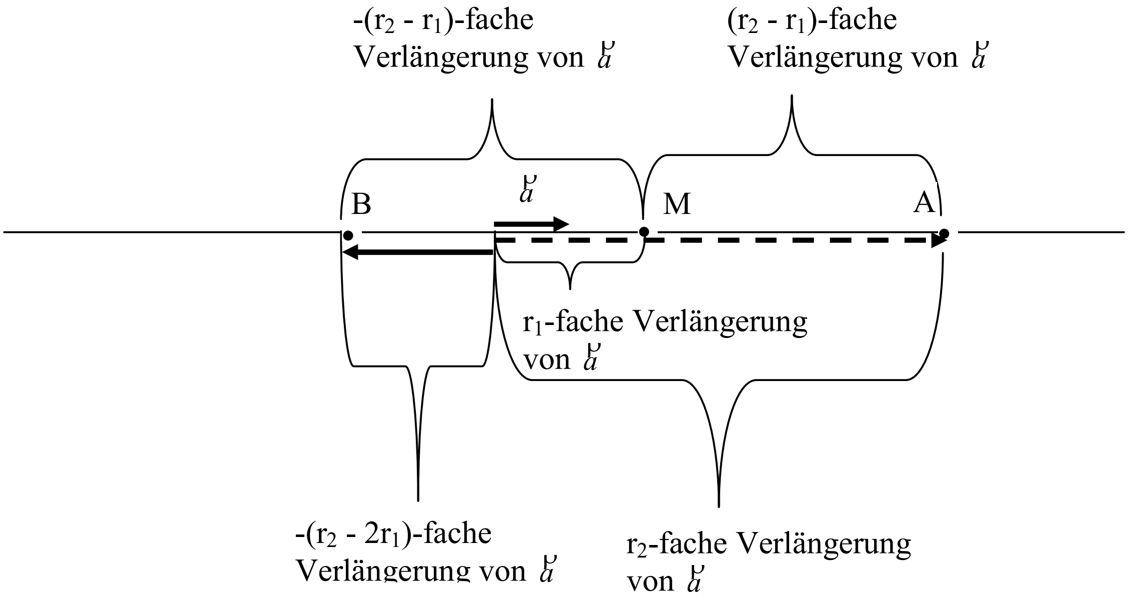
$$|\overrightarrow{MA}| = \left|\begin{pmatrix} -8-(-2) \\ 8-5 \\ 29-14 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 15^2} = \sqrt{270}$$

5. Schritt:
Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:
Bestimme die Punkte A, B auf g die von M(-2 | 5 | 14) den Abstand $\sqrt{270}$ LE haben.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.9.5.4 Vierte Möglichkeit

Konstruieren Sie A und B, indem von M aus der Richtungsvektor um ein positives Vielfaches bzw. um ein negatives Vielfaches verlängert wird.



2.9.5.4.1 Beispiel

1. Schritt:

Geben Sie eine Gerade vor.
Im folgenden Beispiel wäre dies also z.B.

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$$

1. Schritt:

Wähle den Punkt M auf der Geraden g mit $r_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix}-2\\5\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}\text{, also: } M(-2\mid 5\mid 14)$$

2. Schritt:

Wähle einen Punkt A auf der Geraden g, z.B. für $r_2 = 6$:

$$\begin{pmatrix}-10\\9\\34\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + 6\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}\text{, also } A(-10\mid 9\mid 34)$$

2. Schritt:
Damit bekommt man den Punkt B mit $r_3 = -(r_2 -2 r_1) = -(6-2\cdot 2) = -2$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$ also B(6 | 1 | -6)

3. Schritt:
Bestimme den Abstand von M und A:

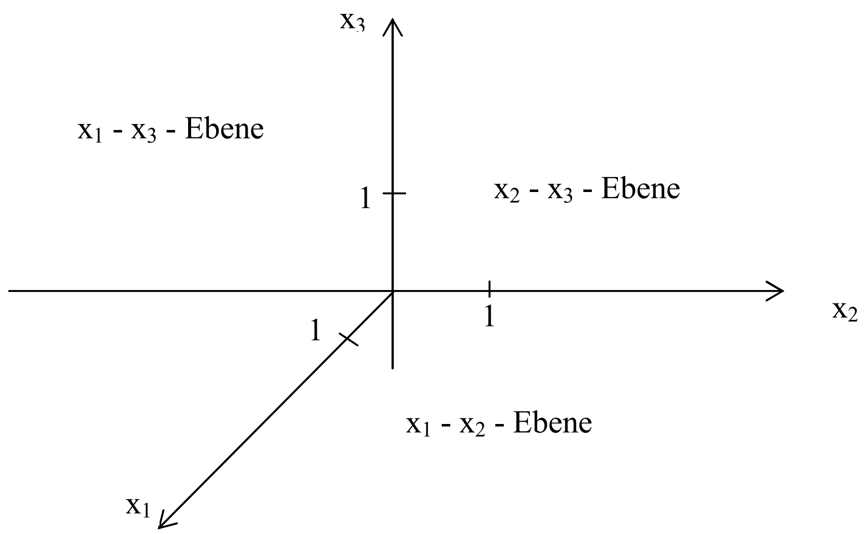
$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -10-(-2)) \\ 9-5 \\ 34-14 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 20^2} = \sqrt{480}$$

5. Schritt:
Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:
Bestimme die Punkte A, B auf g die von M(-2 | 5 | 14) den Abstand $\sqrt{480}$ LE haben.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

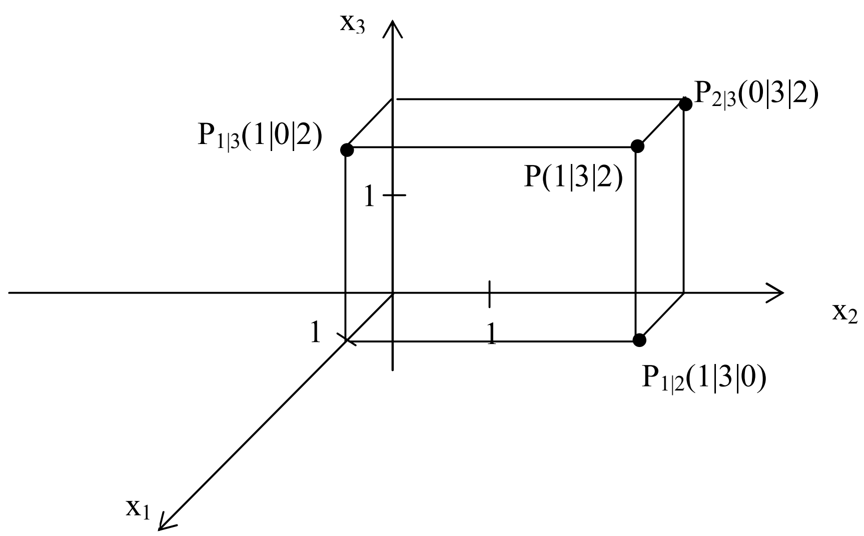
6. Schritt:
Nun löst man die Aufgabe, deren Lösung man kennt !

3 Projektion von Punkt und Geraden in die Koordinatenebenen



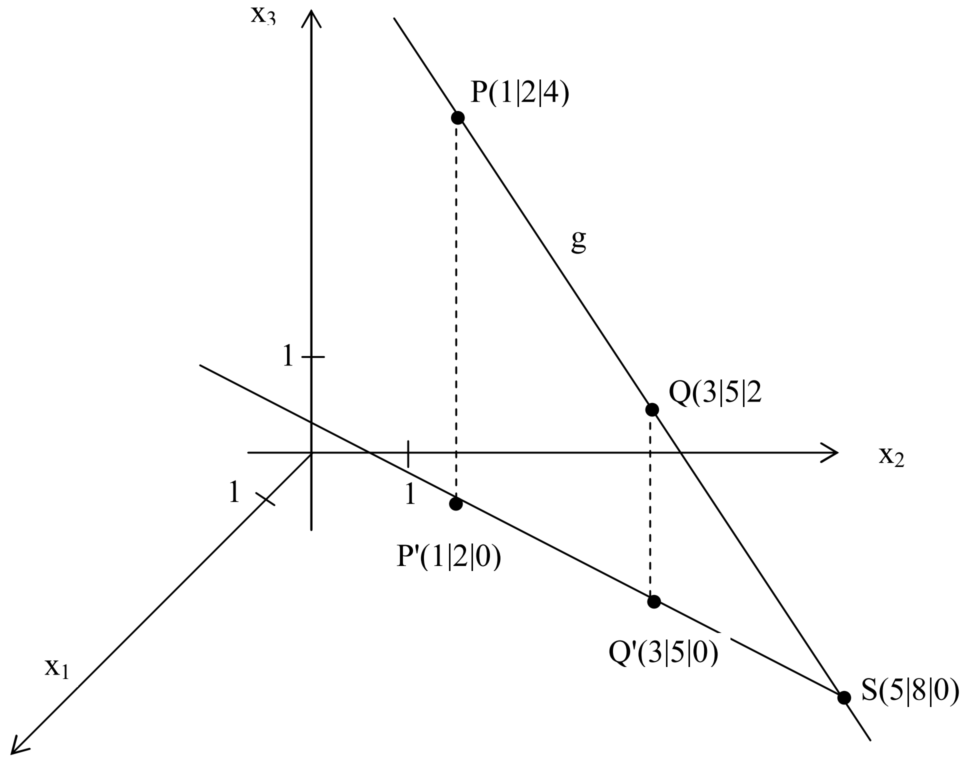
3.1 Beispiel

Projektion von P(1 | 3 | 2) in alle 3 Koordinatenebenen:



Bei einer Projektion auf die Koordinatenebenen wird die Komponente 0, aus der projiziert wird. Konkret:
1) Bei einer Projektion auf die x_2-x_3-Ebene wird die x_1-Komponente 0.
2) Bei einer Projektion auf die x_1-x_2-Ebene wird die x_3-Komponente 0.
3) Bei einer Projektion auf die x_1-x_3-Ebene wird die x_2-Komponente 0.

3.2 Beispiel



Bilde
$g_1 \cap g_2 = S$,
wobei $g_1 = (PQ)$ und $g_2 = (P'Q')$

3.3 Definition Spurpunkt

Der Spurpunkt S einer Geraden g in einer Koordinatenebene ist der Punkt, wo die Gerade diese Koordinatenebene durchstößt.

3.3.1 Berechnung der Spurpunkts im obigen Beispiel:

3.3.1.1 Berechnung der Geradengleichung durch P und Q

sei g = (PQ)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 5 - 2 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.3.1.2 Berechnung des Spurpunkts in der x_1-x_2-Ebene

Der Spurpunkt sei S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | 0). Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{12} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$x_{1S} = 1 + 2 \cdot r_s$
$x_{2S} = 2 + 3 \cdot r_s$
$0 = 4 - 2r_s \quad \Longleftrightarrow \quad r_S = 2$

Also:

$x_{1s} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
$x_{2s} = 2 + 3 \cdot 2 = 8$
$x_{3S} = 0$

Damit:

S_{12} (5 | 8 | 0) ist Spurpunkt

3.3.1.3 Berechnung des Spurpunkts in der x_1-x_3-Ebene

Der Spurpunkt sei S_{13} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{12} (x_{1S} | 0 | x_{3S}). Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{13} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ 0 \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

```
x1S = 1 + 2·rs
0   = 2 + 3·rs    <==>  rS = -2/3
x3S = 4 - 2·rs
```

Also:

```
x1s = 1 + 2·(-2/3) = -1/3
x2s = 0
x3s = 4 - 2·(-2/3) = 16/3
```

Damit:

S_{13} $(-\frac{1}{3} \mid 0 \mid \frac{16}{3})$ ist Spurpunkt

3.3.1.4 Berechnung des Spurpunkts in der x_2-x_3-Ebene

Der Spurpunkt sei S_{23} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{23} (x_{1S} | 0 | x_{3S}). Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{23} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

```
0   = 1 + 2·rs    <==>  rS = -1/2
x2S = 2 + 3·rs
x3S = 4 - 2·rs
```

Also:

```
x1s = 0
x2s = 2 + 3·(-1/2) = 1/2
x3s = 4 - 2·(-1/2) = 5
```

Damit:

S_{23} $(0 \mid \frac{1}{2} \mid 5)$ ist Spurpunkt

3.3.2 Herstellung eigener Übungsaufgaben obigen Typs

Geben Sie selbst die Lösung (Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene) vor.

3.3.2.1 Beispiel

1. Schritt:
Geben Sie einen Schnittpunkt in der die x_1-x_2-Ebene und von dort ausgehend einen Richtungsvektor vor. Im folgenden Beispiel wäre dies also z.B.

$S_{12}(-2 \mid 3 \mid 0)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Damit ergibt sich die Parametergleichung der 2 Geraden:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:
Da man dieser Geraden den Schnittpunkt mit der x_1-x_2-Ebene sofort "ansieht" (setze $r = 0$), hätte man also eine zu einfache Übungsaufgabe gebastelt. Deshalb muss man z.B. für die Gerade eine andere Parameterform angeben. Diese bekommt man, indem man einen Punkt P auf der Geraden wählt (z.B. für $r = 2$):

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ also } P(-6 \mid 5 \mid 10)$$

und nun mit Hilfe dieses Punkts eine andere Parameterform erhält:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Schritt:
Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:
Bestimmen Sie den Spurpunkt der Geraden g mit der x_1-x_2-Ebene

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:
Nun löst man die Aufgabe, deren Lösung man kennt !

3.3.3 Standard-Aufgabe:

3.3.3.1 gegebene Geradengleichung:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

gesucht: Spurpunkte in alle 3 Koordinatenebenen

3.3.3.2 Berechnung des Spurpunkts in der x_1-x_2-Ebene

Der Spurpunkt sei S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | 0). Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{12} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$x_{1S} = 0 + 0 \cdot r_s$
$x_{2S} = 2 + 0 \cdot r_s$
$0 = 3 + 7r_s \quad \Longleftrightarrow \quad r_S = -3/7$

Also:
$x_{1s} = 0 + 3/7 \cdot 0 = 0$
$x_{2s} = 2 + 3/7 \cdot 0 = 2$
$x_{3S} = 0$

Damit:
S_{12} (0 | 2 | 0) ist Spurpunkt

3.3.3.3 Berechnung des Spurpunkts in der x_1-x_3-Ebene

Der Spurpunkt sei S_{13} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{13} (x_{1S} | 0 | x_{3S}). Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{13} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ 0 \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_{1S} &= 0 + 0 \cdot r_s \\ 0 &= 2 + 0 \cdot r_s \quad \Longleftrightarrow \quad L=\{\,\} \\ x_{3S} &= 3 + 7 \cdot r_s \end{aligned}$$

Damit:
Es gibt keine Spurpunkte in die x_1-x_3-Ebene.

3.3.3.4 Berechnung des Spurpunkts in der x_2-x_3-Ebene

Der Spurpunkt sei S_{23} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{23} (x_{1S} | 0 | x_{3S}). Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{23} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 \cdot r_s \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = 0 \\ x_{2S} &= 2 + 0 \cdot r_s \\ x_{3S} &= 3 + 7 \cdot r_s \end{aligned}$$

Also:
Es gibt unendlich viele Spurpunkte in die x_2-x_3-Ebene.

3.4 Standard-Aufgabe

gegeben:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gesucht:

1.1) Schnittpunkt S_{12}, der auf die x_1-x_2-Ebene projizierten Geraden g' und h'.
1.2) Winkel zwischen der Geraden g und g'
1.3) Winkel zwischen der Geraden h und h'
1.4) Winkel zwischen den Geraden g' und h'
2.1) Schnittpunkt S_{13}, der auf die x_1-x_3-Ebene projizierten Geraden g'' und h''.
2.2) Winkel zwischen der Geraden g und g''
2.3) Winkel zwischen den Geraden h und h''
2.4) Winkel zwischen den Geraden g'' und h''
3.1) Schnittpunkt S_{23}, der auf die x_2-x_3-Ebene projizierten Geraden g''' und h'''.
3.2) Winkel zwischen der Geraden g und g'''
3.3) Winkel zwischen den Geraden h und h'''
3.4) Winkel zwischen den Geraden g''' und h'''

3.4.1 Lösung

1.1) Die projizierten Geraden:

$$g':\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h':\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} \mid x_{2S} \mid 0)$. Dann gibt es ein r_s und t_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+r_s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}+t_s\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$$

1 + 2r_s = 3 - 2t_s	G1
2 - r_s = -3 + 3t_s	G2
2r_s + 2t_s = 2	G3
-r_s - 3t_s = -5	G4
2 2 2	G3 Matrix-
-1 -3 -5	G4 schr.
2 2 2	G5=G3
0 -4 -8	G6=2*G4+G3

4 0 -4	G7=2*G5+G6
0 -4 -8	G8=G6
1 0 -1	G9 =G7/4
0 1 2	G10=G8/-4

also:
$r_s = -1$
$t_s = 2$

Damit:

$$\begin{pmatrix}x_{1S}\\x_{2S}\\x_{3S}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$$, also: $S_{12}(-1 \mid 3 \mid 0)$

1.2) α sei der Winkel zwischen den 2 Richtungsvektoren von g und g' , also:

$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right|}=\frac{2\cdot2+(-1)\cdot(-1)+5\cdot0}{\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{5}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}}\approx 0{,}408 \quad ==>$$

$\alpha \approx 65{,}91°$

1.3) β sei der Winkel zwischen den 2 Richtungsvektoren von h und h' , also:

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{3\cdot 3+(-3)\cdot(-3)+4\cdot 0}{\sqrt{3^2+(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{18}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{34}} \approx 0{,}408$$

==>

β ≈ 43,31°

1.4)
γ sei der Winkel zwischen den 2 Richtungsvektoren von g' und h' , also:

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{2\cdot(-2)+(-1)\cdot 3+0\cdot 0}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}} = \frac{-7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} \approx -0{,}868 \quad ==>$$

γ ≈ 150,255°

2.1) Die projizierten Geraden:

g'': $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$

h'': $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} \mid 0 \mid x_{3S})$. Dann gibt es ein r_s und t_s mit:

$$\begin{pmatrix}x_{1S}\\0\\x_{3S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + r_s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_{1S}\\0\\x_{3S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} + t_s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

also:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

1 + 2r_s = 3 - 2t_s	G1
3 + 5r_s = 4 + t_s	G2
2r_s + 2t_s = 2	G3
5r_s - t_s = 1	G4
2 2 2	G3 Matrix-
5 -1 1	G4 schr.
1 0 1/3	Mit TR
0 1 2/3	

also:
$r_s = 1/3$
$t_s = 2/3$

Damit:

$$\begin{pmatrix}x_{1S}\\x_{2S}\\x_{3S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3\\0\\14/3\end{pmatrix},$$ also: $S_{13}(-1 \mid 3 \mid 0)$

2.2) Winkel zwischen den Geraden g und g''
α' sei der Winkel zwischen den 2 Richtungsvektoren von g und g'' , also:

$$\cos\alpha' = \frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}\right|} = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 5^2}} = \frac{29}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{30}} \approx 0{,}983 \implies$$

α' ≈ 10,52°

2.3) Winkel zwischen den Geraden h und h"

β' sei der Winkel zwischen den 2 Richtungsvektoren von h und h" , also:

$$\cos\beta' = \frac{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{-2\cdot(-2)+0\cdot3+1\cdot1}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \approx 0{,}598 \quad ==>$$

β' ≈ 53,30°

2.4) Winkel zwischen den Geraden g" und h"

γ' sei der Winkel zwischen den 2 Richtungsvektoren von g" und h" , also:

$$\cos\gamma' = \frac{\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{2\cdot(-2)+0\cdot0+5\cdot1}{\sqrt{2^2+0^2+5^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}} \approx 0083 \quad ==>$$

γ' ≈ 89,61°

3.1) Die projizierten Geraden:

$$g''': \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$h''': \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt sei S(0 | x_{2S} | x_{3S}). Dann gibt es ein r_s und t_s mit:

$$\begin{pmatrix}0\\x_{1S}\\x_{3S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + r_s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\x_{1S}\\x_{3S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix} + t_s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$$

also:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + r_s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix} + t_s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$$

2 - 1r_s = -3 + 3t_s	G1
3 + 5r_s = 4 + t_s	G2
-1r_s - 3t_s = -5	G3
5r_s - t_s = 1	G4
-1 -3 -5	G3 Matrix-
5 -1 1	G4 schr.
1 0 1/2	Mit TR
0 1 3/2	

also:
$r_s = 1/2$
$t_s = 3/2$

Damit: $\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$, also: $S_{23}(0 \mid 1{,}5 \mid 5{,}5)$

3.2) Winkel zwischen den Geraden g und g'''
α'' sei der Winkel zwischen den 2 Richtungsvektoren von g und g''' , also:

$$\cos\alpha'' = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{26}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} \approx 0{,}931$$

==>
α'' ≈ 21,417°

3.3) Winkel zwischen den Geraden h und h'''
β'' sei der Winkel zwischen den 2 Richtungsvektoren von h und h''' , also:

$$\cos\beta' = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{0 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} \approx 0{,}845 \quad ==>$$

β'' ≈ 32,31°

3.4) Winkel zwischen den Geraden g''' und h'''

γ'' sei der Winkel zwischen den 2 Richtungsvektoren von g'' und h'' , also:

$$\cos\gamma' = \frac{\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0\cdot 0+(-1)\cdot 3+5\cdot 1}{\sqrt{0^2+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{0^2+3^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{10}} \approx 0{,}124 \quad ==>$$

γ'' ≈ 82,875°

3.4.2 Herstellung eigener Übungsaufgaben obigen Typs

Geben Sie selbst die Lösung (Schnittpunkt zweier projizierter Geraden in einer Ebene) vor.

3.4.2.1 Beispiel

1. Schritt:
Geben Sie einen Schnittpunkt in der die x_1-x_2-Ebene und von dort zwei Richtungsvektoren vor. Im folgenden Beispiel wäre dies also z.B.

$$S_{12}(2 \mid -1 \mid 0), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Parametergleichung der 2 Geraden:

$$g'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad h'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:
Durch "Gleichsetzen" würde man r = 0 und t = 0 erhalten (warum ?).
Man hätte also eine zu einfache Übungsaufgabe gebastelt. Deshalb muss man z.B. für die Gerade h' eine andere Parameterform angeben. Diese bekommt man, indem man einen Punkt P auf der Geraden h' wählt (z.B. für t = -1):

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also } P(-1 \mid -5 \mid 0)$$

und nun mit Hilfe dieses Punkts eine andere Parameterform erhält:

$$h'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Schritt:
Jetzt muß man nur noch für die x_3-Werte (die bis jetzt alle gleich 0 sind) beliebige andere Werte einsetzen (hier z.B. Primzahlen), damit man die Geraden g und h bekommt:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:
Daraus ergibt sich dann die folgende Aufgabe:

gegeben:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

gesucht:
Schnittpunkt S, der auf die x_1-x_2-Ebene projizierten Geraden g' und h'.

4. Schritt:
Nun löst man die Aufgabe, deren Lösung man kennt !