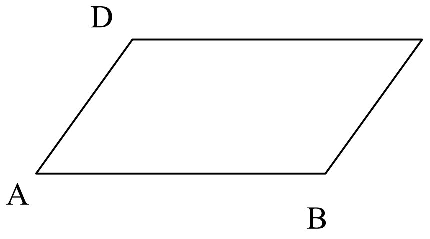
M2 Arbeitsblatt 1 für den Unterricht

1) Aufgabe



gegeben:
Das Viereck ABCD mit den Ecken
A(-3|1), B(1|1), C(6|4), D(2|4)

Bestimme
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$
und prüfe, ob das Viereck ein Parallelogramm ist.

Bem:
Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, wenn die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich groß sind.

2) Aufgabe

gegeben:
Das Dreieck mit den Ecken:
A(2 | 4 | 1), B(3 | -1 | 3), C(4 | -2 | 3)

Bestimme
a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$
b) Bestimme einen Punkt D, so daß ABCD ein Parallelogramm ist.

3) Aufgabe

Ein Schiff bewegt sich mit 4 km/h in Richtung der positiven x_1-Achse. Ein aufkommender Wind zwingt es gleichzeitig mit 1 km/h in Richtung der positiven x_2-Achse.
In welche Richtung bewegt sich das Schiff ?
Versuchen Sie dieses Problem zeichnerisch zu lösen !

4) Aufgabe

gegeben:
$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

gesucht:
$\vec{v} + \vec{w}$ zeichnerisch und rechnerisch!

5) Aufgabe

gegeben:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

gesucht:

$\vec{w}$, so dass $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$?
Rechnerische + zeichnerische Lösung!

6) Aufgabe

Wie groß ist der Gegenvektor von $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$,

7) Aufgabe

gegeben:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

gesucht:

$\vec{v} - \vec{w}$ zeichnerisch und rechnerisch!

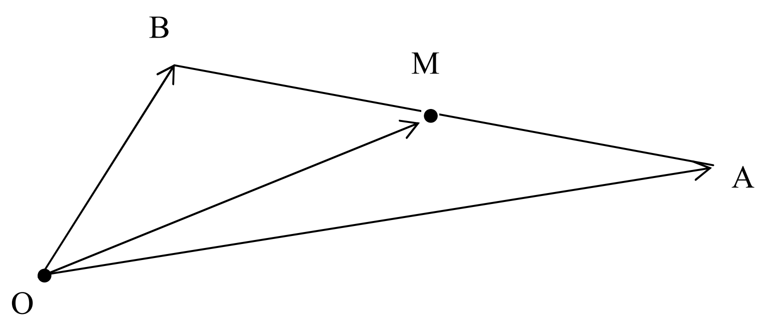
8) Aufgabe

Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch u∈R und v∈R so, dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

9) Aufgabe

Gegeben sind die Punkte $A(x_{1A} \mid x_{2A} \mid x_{3A})$ und $B(x_{1B} \mid x_{2B} \mid x_{3B})$.
Bestimmen Sie (mit Hilfe der Ortsvektoren) die Koordinaten des Mittelpunkts $M(x_{1M} \mid x_{2M} \mid x_{3M})$ der Strecke $\overline{AB}$



10) Aufgabe

Geben Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der folgenden Vektoren an:

$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

11) Aufgabe

Kann man den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ angeben?

Begründen Sie zeichnerisch und rechnerisch!

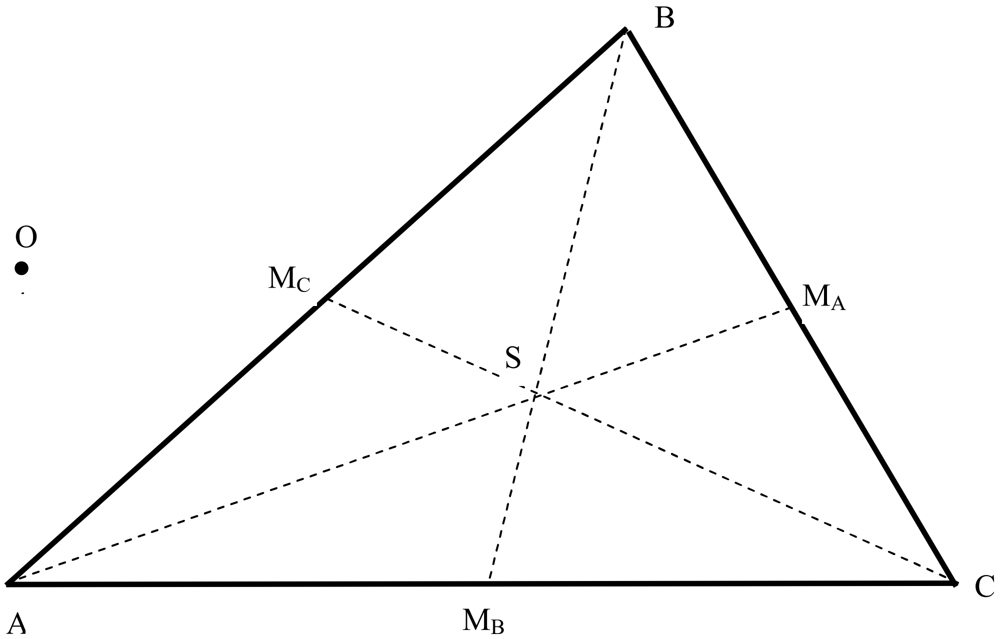
12) Aufgabe

Berechnen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

13) Aufgabe

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt S im Verhältnis 2 : 1
(Bemerkung: O bedeutet der Ursprung, M_A, M_B, M_C sind die jeweiligen Mittelpunkte)



Zeigen Sie:

Geben Sie $\overrightarrow{OS}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ an, d.h:

geben Sie $\overrightarrow{OS}$ in Abhängigkeit (NUR !) von $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ an.
Benutzen Sie dazu die Tatsache, daß sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sich im Schwerpunkt S im Verhältnis 2 : 1 schneiden.

Trick:

Geben Sie alle restlichen Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM_A}$, $\overrightarrow{BM_B}$, $\overrightarrow{CM_C}$

in Abhängigkeit von $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ an.

14) Aufgabe

1) Gegeben: 2 Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ liegen auf einer Geraden, wobei $\vec{b}$ doppelt so lang wie $\vec{a}$ ist.

1.1) Kann man $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ angeben?
1.2) Geben Sie zuerst 2 Lösungen (und dann alle) der folgenden Gleichung an:

$r_1 \cdot \vec{a} + r_2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$

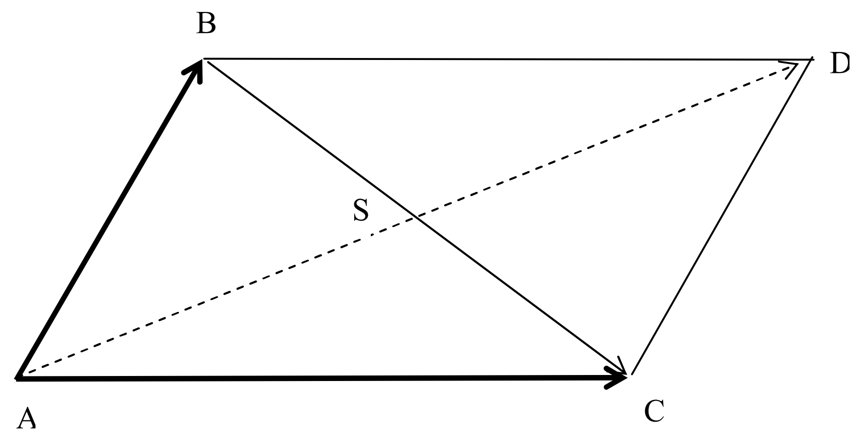
2) Gegeben: 2 Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ liegen **nicht** auf einer Geraden, wobei $\vec{b}$ doppelt so lang wie $\vec{a}$ ist.

2.1) Kann man $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ angeben?
2.2) Geben Sie die Lösungen der folgenden Gleichung an:

$r_1 \cdot \vec{a} + r_2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$

15) Aufgabe

Beweisen Sie:
Der Schnittpunkt der Diagonalen eines "echten" Parallelogramms halbiert die Diagonalen.
Echtes Parallelogramm bedeutet, daß der Winkel zwischen zwei aneinander liegenden Seiten größer als 0 ist.



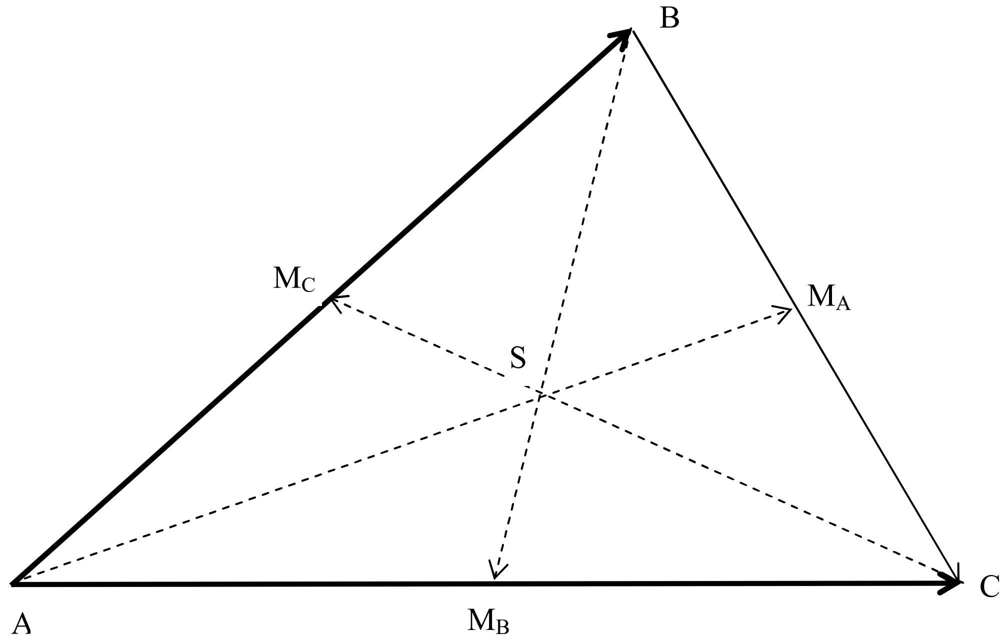
Trick:

Drücken Sie alle restlichen Vektoren (insbesondere $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$) in Abhängigkeit von $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$ aus. Stellen Sie eine "Rundwanderung" von A über S und C zurück nach A als eine Vektorgleichung dar.

16) Aufgabe

Beweisen Sie:

Die Die Seitenhalbierenden eines "echten" Dreiecks (alle Winkel im Dreieck sind größer als 0) schneiden sich im Schwerpunkt S im Verhältnis 2 : 1



Trick:

a) Drücke Sie alle restlichen Vektoren in Abhängigkeit von $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$ aus.

b) Betrachten Sie den Schnittspunkt S der zwei Seitenhalbierenden AM_A und CM_C und das Dreieck ACS auf dem sich eine "Rundwanderung" befindet.
Drücken Sie diese "Rundwanderung" durch eine Addition von Vektoren aus.

c) Betrachten Sie den Schnittspunkt X der zwei Seitenhalbierenden BM_B und CM_C und das Dreieck BXC auf dem sich eine "Rundwanderung" befindet.
Drücken Sie diese "Rundwanderung" durch eine Addition von Vektoren aus.

d) Zeigen Sie, daß X = S gilt.

17) Aufgabe

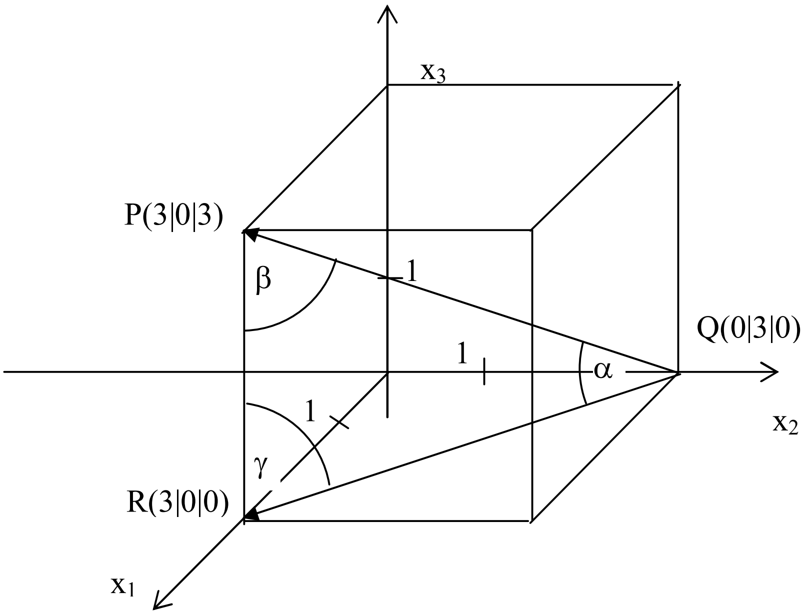
Beweisen Sie die folgende Behauptung für dreidimensionale Vektoren:
Sei $k \in R$. Dann gilt: $|k \cdot \vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$

18) Aufgabe

$r>0$ und $s>0$ sind reelle Zahlen.
Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen $r \cdot \vec{a}$ und $s \cdot \vec{b}$ unabhängig von s und r sind.

19) Aufgabe

a) Berechnen Sie den Winkel α zwischen der Raumdiagonale eines Würfels und seiner Projektion in die x_1-x_2-Ebene und außerdem noch die anderen Winkel β und γ in dem Dreieck (siehe Skizze).



b) Berechnen Sie nochmals alle Winkel in einem Würfel mit der Seitenlänge a.
c) Berechnen Sie die Winkel zwischen den Raumdiagonalen und den Achsen
d) Berechnen Sie die Winkel zwischen den Raumdiagonalen

20) Aufgabe

Bestimmen Sie t so, dass der Winkel zwischen den beiden folgenden Vektoren 90° beträgt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 9 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

21) Aufgabe

Bestimmen Sie t so, dass der Winkel zwischen den beiden folgenden Vektoren 60° beträgt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}, \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

22) Aufgabe

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die 3 Punkte geht:
$P_1(0 \mid 4 \mid 0)$, $P_2\,(4 \mid 4 \mid 0)$, $P_3\,(4 \mid 4 \mid 4)$

23) Aufgabe

Die von einem Eckpunkt eines Würfels ausgehenden 3 Kanten "spannen" einen Würfel auf. Wenn die 3 aufspannenden Kanten und die Winkel dazwischen beliebig groß sind, wird dieses Gebilde ein Spat genannt. Die Seiten eines Spats bestehen also aus Parallelogrammen, wobei die Parallelogramme gegenüberliegender Seiten deckungsgleich sind.

Ein Spat wird von $A(3 \mid 1 \mid 0)$ ausgehend von den folgenden 3 Vektoren aufgespannt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Berechnen Sie die Koordinaten aller Eckpunkte.
2) Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren.
3) Berechnen Sie die Oberfläche des Spats.
4) Berechnen Sie das Volumen des Spats.