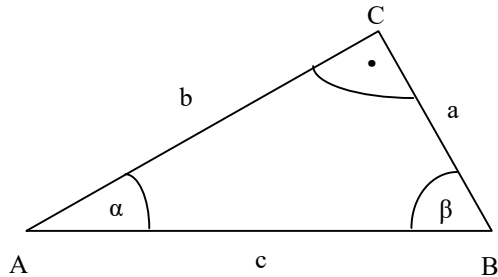


18 Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck

18.1 Definitionen und Grundlagen

gegeben: rechtwinkliges Dreieck.



18.1.1 Definition

$\sin \alpha = \text{Gegenkathete} / \text{Hypotenuse}$

$\cos \alpha = \text{Ankathete} / \text{Hypotenuse}$

$\tan \alpha = \text{Gegenkathete} / \text{Ankathete}$

also:

$$\sin \alpha = a/c \qquad \sin \beta = b/c$$

$$\cos \alpha = b/c \qquad \cos \beta = a/c$$

$$\tan \alpha = a/b \qquad \tan \beta = b/a$$

Bemerkung:

Die Winkelfunktionen sin, cos, tan beziehen sich immer auf einen der beiden spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck.

18.1.2 Satz

Die Winkelsumme aller 3 Winkel im rechtwinkligen Dreieck ist 180°

Folgerung:

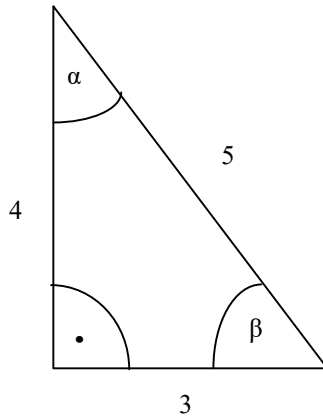
Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\alpha = 90 - \beta$$

$$\beta = 90 - \alpha$$

18.1.3 Beispiel

Berechne die spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5



Berechnung von α :

$$\sin \alpha = 3/5 \implies \alpha = 36,869^\circ$$

oder:

$$\cos \alpha = 4/5 \implies \alpha = 36,869^\circ$$

oder:

$$\tan \alpha = 3/4 \implies \alpha = 36,869^\circ$$

Berechnung von β :

$$\sin \beta = 4/5 \implies \beta = 53,130^\circ$$

oder:

$$\cos \beta = 3/5 \implies \beta = 53,130^\circ$$

oder:

$$\tan \beta = 4/3 \implies \beta = 53,130^\circ$$

18.1.4 Sätze im rechtwinkligen Dreieck

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$$

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$$

Analoges gilt für β

18.1.4.1 Beweis

$$1) \sin \alpha / \cos \alpha = (a/c) / (b/c) = a/b = \tan \alpha$$

$$2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = a^2/c^2 + b^2/c^2 = a^2+b^2/c^2 = c^2/c^2 = 1$$

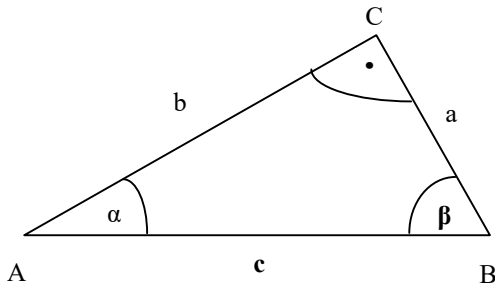
$$3) \sin (90^\circ - \alpha) = \sin \beta = b/c = \cos \alpha$$

$$4) \cos (90^\circ - \alpha) = \cos \beta = a/c = \sin \alpha$$

18.1.5 Dreiecksberechnungen im rechtwinkligen Dreieck

18.1.5.1 Fall

gegeben: $c = 320$; $\beta = 6,1^\circ$



Berechnung von α :

$$\begin{aligned}\alpha &= 90^\circ - \beta \\ &= 90^\circ - 6,1^\circ = 83,9^\circ\end{aligned}$$

1.2) Berechnungen von b:

1.2.1)

$$b/c = \sin \beta$$

$$b = c \cdot \sin \beta = 320 \cdot \sin 6,1^\circ = 34,01$$

1.2.2)

$$\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 6,1^\circ = 83,9^\circ$$

$$b/c = \cos \alpha$$

$$b = c \cdot \cos \alpha = 320 \cdot \cos 83,9^\circ = 34,01$$

1.3) Berechnungen von a:

1.3.1)

$$a/c = \cos \beta$$

$$a = c \cdot \cos \beta = 320 \cdot \cos 6,1^\circ = 318,19$$

1.3.2)

$$a/c = \sin \alpha$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = 320 \cdot \sin 83,9^\circ = 318,19$$

1.3.3)

$$a/b = \tan \alpha \implies a = b \cdot \tan \alpha = 34,01 \cdot \tan 83,9^\circ = 318,19$$

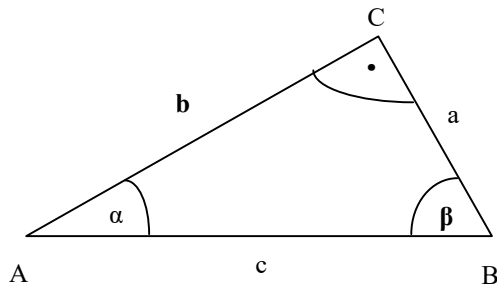
1.3.4)

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{320^2 - 34,01^2} = 318,19$$

18.1.5.2 Fall

gegeben: $b = 50$, $\beta = 60^\circ$



2.1) Berechnung von α :

$$\begin{aligned}\alpha &= 90^\circ - \beta \\ &= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ\end{aligned}$$

2.2) Berechnungen von a:

2.2.1)

$$b/a = \tan \beta$$

$$a = b/\tan \beta = 50/\tan 60^\circ = 28,87$$

2.2.2)

$$a/b = \tan \alpha$$

$$a = b \cdot \tan \alpha = 50 \cdot \tan 30^\circ = 28,27$$

2.3) Berechnungen von c:

2.3.1)

$$b/c = \sin \beta$$

$$c = b/\sin \beta = 50/\sin 60^\circ = 57,74$$

2.3.2)

$$b/c = \cos \alpha$$

$$c = b/\cos \alpha = 50/\cos 30^\circ = 57,74$$

2.3.3)

$$a/c = \cos \beta$$

$$c = a/\cos \beta = 28,87/\cos 60^\circ = 57,74$$

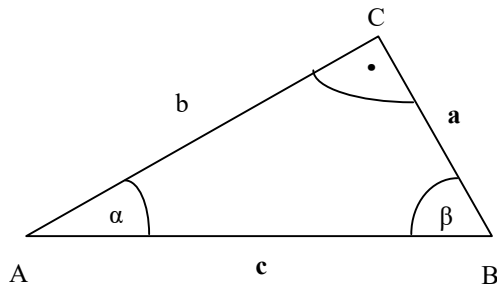
2.3.4)

$$a/c = \sin \alpha$$

$$c = a/\sin \alpha = 28,87/\sin 30^\circ = 57,74$$

18.1.5.3 Fall

gegeben: $c = 6$, $a = 4$



3.1) Berechnung von β :

$$a/c = \cos \beta$$

$$\cos \beta = 4/6$$

$$\beta = 48,19^\circ$$

3.2) Berechnung von α :

$$a/c = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 4/6$$

$$\alpha = 41,81^\circ$$

3.3) Berechnungen von b :

3.3.1)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 4,47$$

3.3.2)

$$b/c = \sin \beta$$

$$b = c \cdot \sin \beta = 6 \cdot \sin 48,19^\circ = 4,74$$

3.3.3)

$$b/c = \cos \alpha$$

$$b = c \cdot \cos \alpha = 6 \cdot \cos 41,81^\circ = 4,74$$

3.3.4)

$$b/a = \tan \beta$$

$$b = a \cdot \tan \beta = 4 \cdot \tan 48,18^\circ = 4,74$$

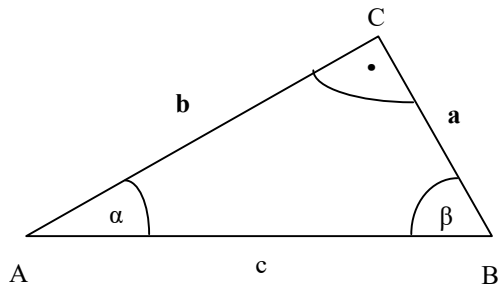
3.3.5)

$$a/b = \tan \alpha$$

$$b = a / \tan \alpha = 4 / \tan 41,81^\circ = 4,74$$

18.1.5.4 Fall

gegeben: $a = 4$, $b = 8$



4.1) Berechnung von β :

$$b/a = \tan \beta$$

$$\tan \beta = 8/4$$

$$\beta = 63,43^\circ$$

4.2) Berechnung von α :

$$a/b = \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = 4/8$$

$$\alpha = 26,57^\circ$$

4.3) Berechnungen von c :

4.3.1)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8,94$$

4.3.2)

$$b/c = \sin \beta$$

$$c = b/\sin \beta = 8/\sin 63,43 = 8,94$$

4.3.3)

$$b/c = \cos \alpha$$

$$c = b/\cos \alpha = 8/\cos 26,57 = 8,94$$

4.3.4)

$$a/c = \cos \beta$$

$$c = a/\cos \beta = 4/\cos 63,43 = 8,94$$

4.3.5)

$$a/c = \sin \alpha$$

$$c = a/\sin \alpha = 4/\sin 26,57 = 8,94$$

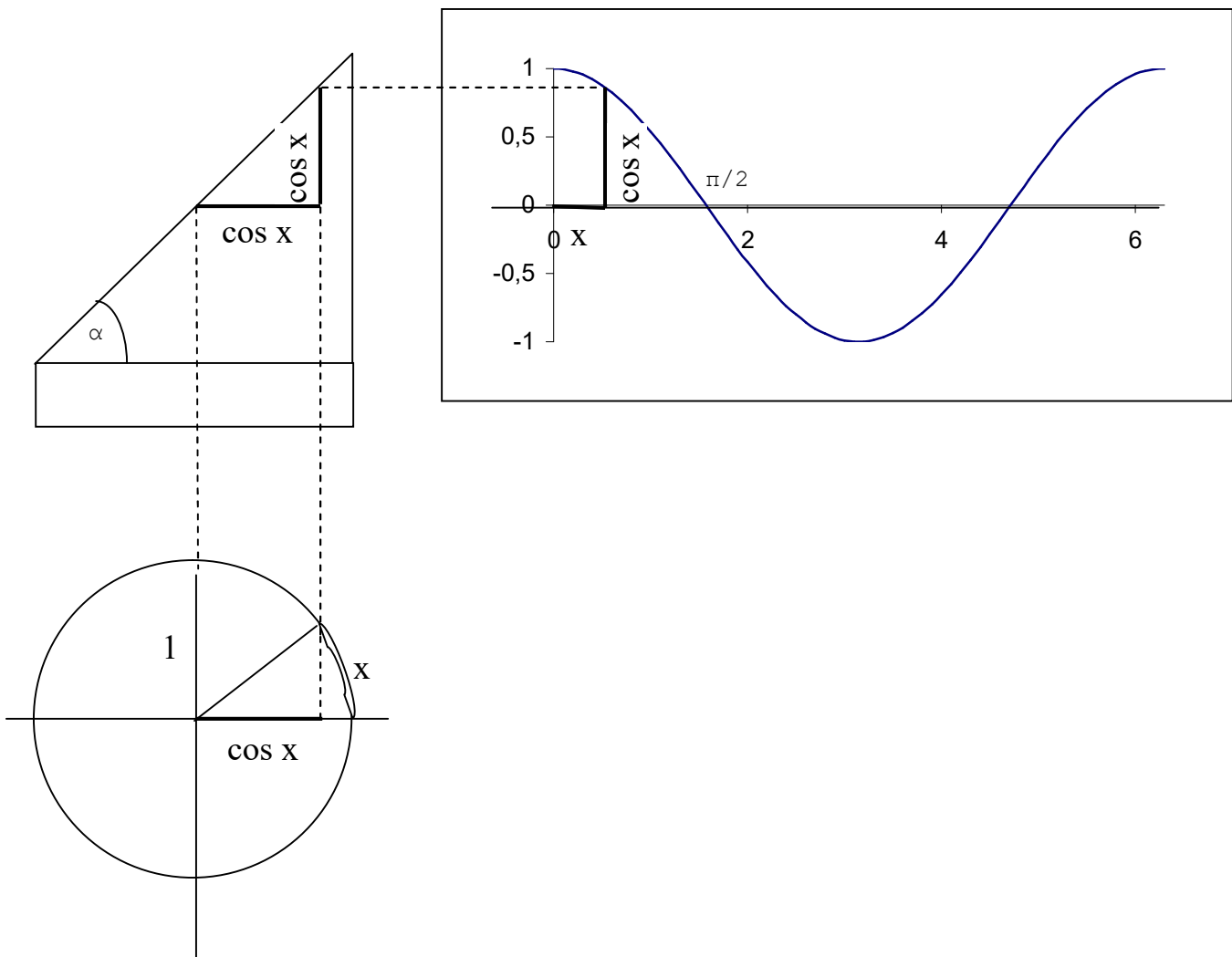
18.2 Aufgabe

In ein zylinderförmiges Rohr soll ein Rohrknief (rechtwinklige Umlenkung) eingefügt werden. Dazu wird das Rohr mit einer Gehrungssäge mit 45° durchgesägt und wieder "umgekehrt" an der Schnittfläche zusammengefügt.

Für einen Blechner ist es sehr schwierig ein bereits zu einem Rohr gebogenes Blech zu schneiden. Das Blech lässt sich im ebenen Zustand wesentlich einfacher und exakter bearbeiten. Dazu muß der Blechner jedoch die genaue Form der Schnittkurve kennen.

Dazu rollt man gedanklich das um einen der oben abgesägten Zylinderstümpfe umwickelte Papier ab und versucht seine Schnittkurve durch eine Funktion zu beschreiben.

Punktweise Konstruktion der abgewickelten Kurve:

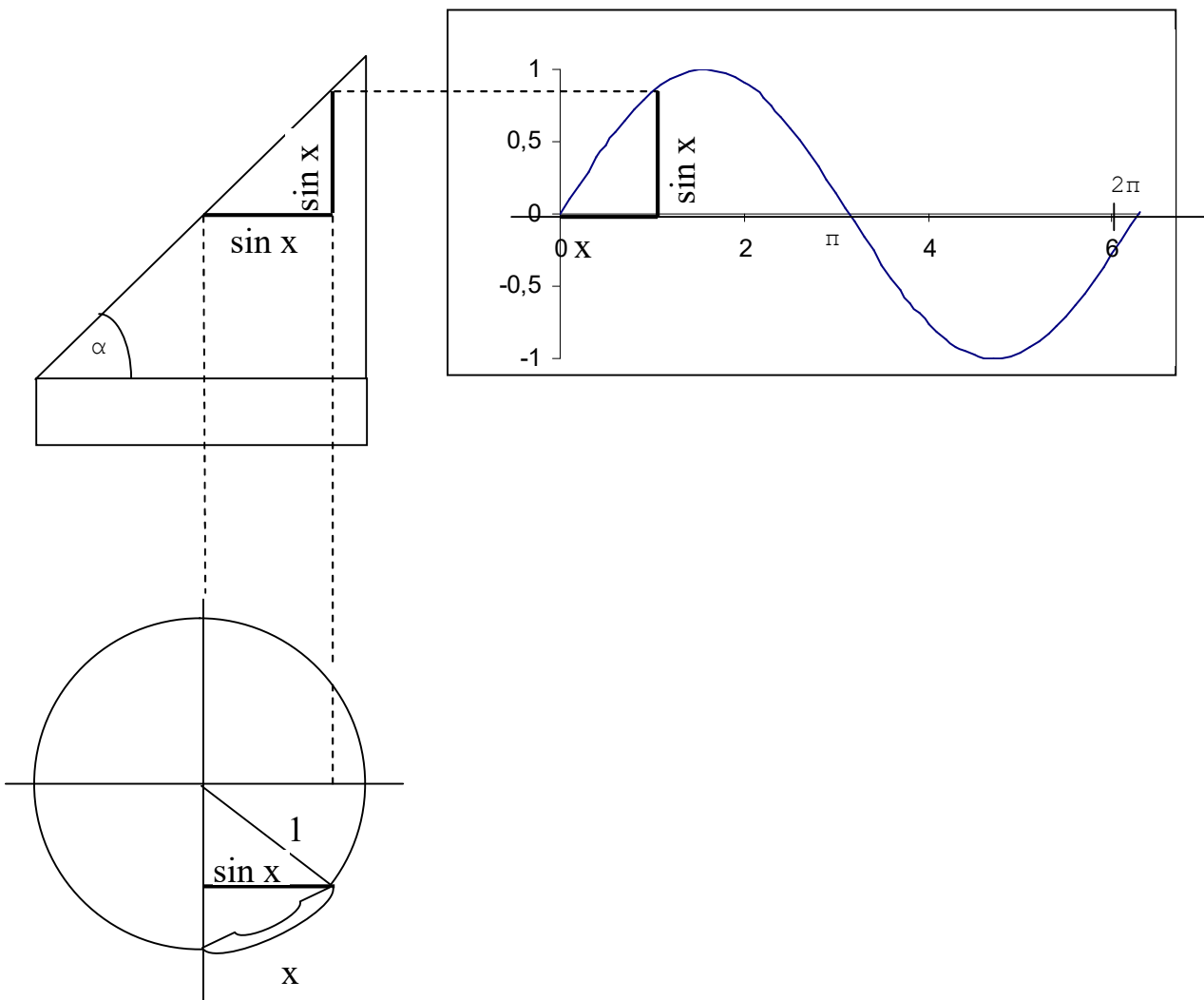


Fragen:

- 1) Wie groß ist die Höhe y bei den folgenden abgewickelten Längen x
 $0, \pi/2, \pi$
- 2) Wie groß ist die Höhe y , wenn die Länge des abgewickelten Blechs x ist ?

Abwicklung des Papiermodells vom vorderen Punkt der Höhe Null.

Punktweise Konstruktion der abgewickelten Kurve



Fragen:

- 1) Wie groß ist die Höhe y bei den folgenden abgewickelten Längen x
 $0, \pi/2, \pi$
- 2) Wie groß ist die Höhe y , wenn die Länge des abgewickelten Blechs x ist ?

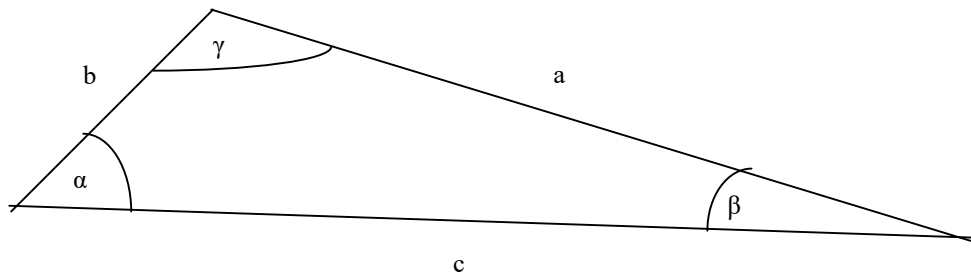
19 Berechnung in beliebigen Dreiecken

19.1 Sätze im beliebigen Dreieck

19.1.1 Sinussatz

In jedem Dreieck verhalten sich 2 Seiten wie die sin ihrer Gegenwinkel.

also:



also:

$$a / b = \sin \alpha / \sin \beta$$

$$a / c = \sin \alpha / \sin \gamma$$

$$b / c = \sin \beta / \sin \gamma$$

19.1.2 Kosinussatz:

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten und dem cos des eingeschlossenen Winkels.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

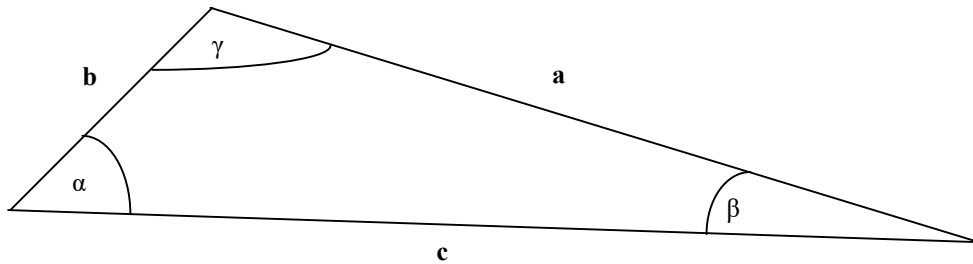
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

19.2 Beispiele

19.2.1 SSS

gegeben: $a = 7$, $b = 9$, $c = 15$ (SSS)



1) Berechnung von α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = (a^2 - b^2 - c^2) / -2bc$$

$$= (7^2 - 9^2 - 15^2) / -2 \cdot 9 \cdot 15 = 0,95185$$

$$\alpha = 17,85^\circ$$

Frage:

Gibt es noch weitere Winkel, die diese Gleichung erfüllen und zwischen 0° und 180° liegen ?

2) Berechnung von β :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = (b^2 - a^2 - c^2) / -2ac$$

$$= (9^2 - 7^2 - 15^2) / -2 \cdot 7 \cdot 15 = 0,92$$

$$\beta = 23,21^\circ$$

3) Berechnung von γ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

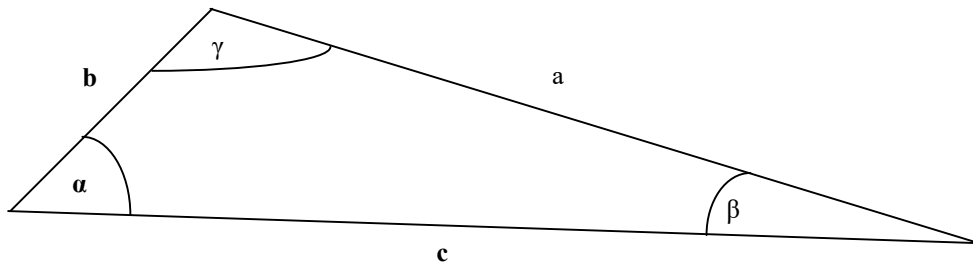
$$\cos \gamma = (c^2 - a^2 - b^2) / -2ab$$

$$= (15^2 - 7^2 - 9^2) / -2 \cdot 7 \cdot 9 = -0,754$$

$$\gamma = 138,94^\circ$$

19.2.2 SWS

gegeben: $b = 6,84$, $c = 10$, $\alpha = 30^\circ$ (SWS)



1) Berechnung von a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{6,84^2 + 100 - 2 \cdot 6,84 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ} = 5,32$$

2) Berechnungen von β :

2.2.1)

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = (b^2 - a^2 - c^2) / -2ac$$

$$= (6,84^2 - 5,32^2 - 10^2) / -2 \cdot 5,32 \cdot 10 = 0,766$$

$$\beta = 40^\circ$$

a)

$$\sin \beta / \sin \alpha = b / a$$

$$\sin \beta = b \cdot \sin \alpha / a = 6,84 \cdot \sin 30^\circ / 5,32 = 0,64 =$$

$$\beta_1 = 40^\circ$$

$$\beta_2 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

b) Berechnung von γ :

$$\sin \gamma / \sin \alpha = c / a$$

$$\sin \gamma = c \cdot \sin \alpha / a$$

$$= 10 \cdot \sin 30^\circ / 5,32 = 0,93$$

$$\gamma_1 = 70^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Lösungen:

$$\alpha = 30^\circ, \beta_1 = 40^\circ, \gamma_1 = 70^\circ$$

keine Lösung !

$$\alpha = 30^\circ, \beta_2 = 140^\circ, \gamma_1 = 70^\circ$$

keine Lösung !

$$\alpha = 30^\circ, \beta_1 = 40^\circ, \gamma_2 = 110^\circ$$

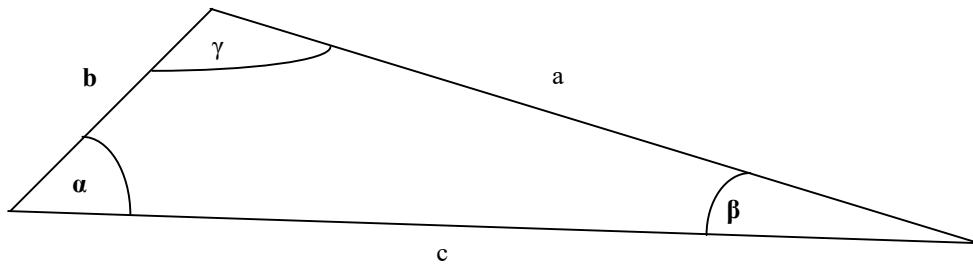
Lösung !!

$$\alpha = 30^\circ, \beta_2 = 140^\circ, \gamma_2 = 110^\circ$$

keine Lösung !

19.2.3 WSW

gegeben: $\alpha = 68^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $b = 18$, (WSW)



1) Berechnung von a:

$$a / b = \sin \alpha / \sin \beta$$

$$a = \sin \alpha * b / \sin \beta = \sin 68^\circ * 18 / \sin 30^\circ = 33,38$$

2) Berechnung von c:

a)

$$c / b = \sin \gamma / \sin \beta$$

$$c = \sin \gamma * b / \sin \beta$$

$$= \sin 82^\circ * 18 / \sin 30^\circ$$

$$= 35,65$$

b)

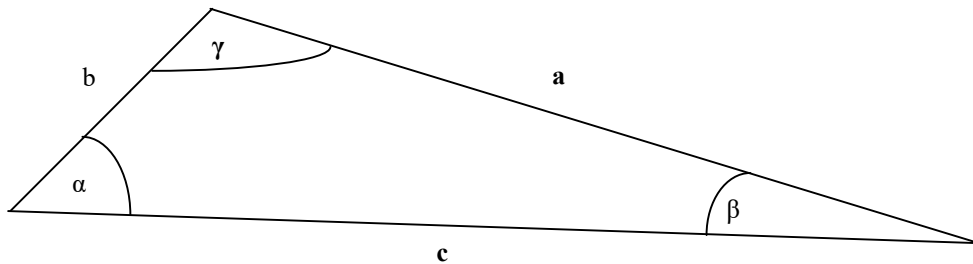
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos \gamma$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab * \cos \gamma}$$

$$c = \sqrt{33,38^2 + 18^2 - 2 * 33,38 * 18 * \cos 82^\circ} = 35,65$$

19.2.4 SSW

zwei Seiten, nicht eingeschlossener Winkel (SSW)



1) Gegenwinkel der großen Seite:

gegeben: $a = 4$, $c = 5$, $\gamma = 96^\circ$

a) Berechnung von α :

$$\sin \alpha / \sin \gamma = a / c$$

$$\sin \alpha = a * \sin \gamma / c$$

$$= 4 * \sin 96^\circ / 5 = 0,7956$$

$$\alpha_1 = 52,71^\circ$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - 52,71^\circ = 127,29^\circ \text{ keine Lösung, da}$$

$$\alpha_2 + \gamma = 127,29^\circ + 96^\circ > 180^\circ$$

b) Berechnung von β :

$$\beta = 180 - \alpha - \gamma$$

$$\beta = 180^\circ - 52,71^\circ - 96^\circ = 31,29$$

c) Berechnung von b :

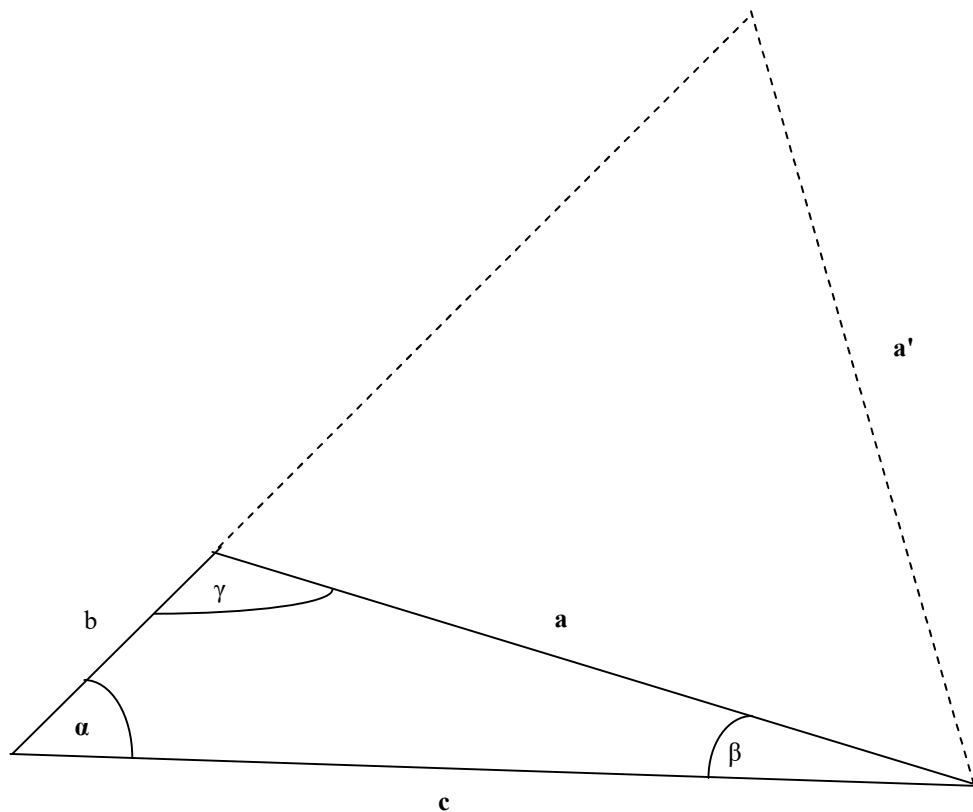
$$b / c = \sin \beta / \sin \gamma$$

$$b = \sin \beta * c / \sin \gamma$$

$$= \sin 31,29^\circ * 5 / \sin 96^\circ$$

$$= 2,61$$

2) Gegenwinkel der kleinen Seite:
 gegeben: $a = 4$, $c = 5$, $\alpha = 30^\circ$



a) Berechnung von γ :

$$\sin \gamma / \sin \alpha = c / a$$

$$\sin \gamma = c * \sin \alpha / a$$

$$= 5 * \sin 30^\circ / 4 = 0,652$$

$$\gamma_1 = 38,7^\circ \quad \beta_1 = 111,3^\circ$$

$$\gamma_2 = 141,3^\circ \quad \beta_2 = 8,7^\circ$$

b) Berechnung von b :

$$b / c = \sin \beta / \sin \gamma$$

$$b = \sin \beta * c / \sin \gamma$$

$$b_1 = 5 * \sin 111,3^\circ / \sin 38,7^\circ = 7,54$$

$$b_2 = 5 * \sin 8,7^\circ / \sin 141,3^\circ = 1,2$$

c) Dreieck ist nicht konstruierbar

gegeben: $a = 4$, $c = 5$, $\alpha = 60^\circ$

$$\sin \gamma / \sin \alpha = c / a$$

$$\sin \gamma = c * \sin \alpha / a$$

$$= 5 * \sin 60^\circ / 4 = 1,08$$

Keine Lösung !