17 Periode und Amplitude von Sinusfunktionen

17.1 Motivation

Ein Tsunami (beachte auch die sogenannte "Freak-Wave") ist eine Wasserwelle, die von Erdbeben unterseeischer Herde ausgelöst werden.
Die Wellenlängen betragen mehrere hundert Kilometer. Die Höhe bleibt meistens unter einem Meter. Erst vor der Küste können bis zu 30m – 40 m hohe (Grund: Reibung am Grund) Brandungswellen entstehen, die dann schweren Schaden anrichten.

Vom Zentrum des Herdes bewegen sich die sinusförmigen Wellen in Richtung Küste.
Um sich vor den Schäden durch wellenbrechende Einrichtungen schützen zu können, ist es notwendig ein Modell dieser Wellen (z.B. einer Sinusfunktion) zu erstellen und diese im Computer zu simulieren.
Dazu ist es notwendig die **Momentaufnahmen** eines Tsunami, d.h. einer verschobenen Sinuswelle mathematisch beschreiben zu können.

Frage:
Durch welche zwei Angaben läßt sich die obige Sinuskurve charakterisieren, bzw. was ist für die Bewohner einer Küste interessant, wenn die Welle auf die Küstenbewohner zukommt ?

Antwort:
Die maximale Höhe (Auslenkung) nennt man Amplitude.
Der Abstand zweier Wellenberge (bzw. Wellentäler) nennt man Wellenlänge oder Periode (ab der wiederholen sich die y-Werte)

Beispiel:
Jeder Tag des Jahres 2005 eines Jahres kann - von 0 beginnend - durchnummeriert werden.
Dies kann man durch eine Abbildung - "name" genannt - beschreiben. Also gilt zum Beispiel:
name(0) = Samstag, name(1) = Sonntag, usw.
Welche "Periode" hat dann eine Woche ?
Ab jedem 14. Tag - von einem beliebigen Tag ab gerechnet - wiederholt sich der Wochentag.
Die Periode ist nicht 14, denn es gibt eine kleinere Zahl, nämlich 7, ab der sich jeder Wochentag wiederholt.
kurz:
name(x + 14) = name(x)
name(x + 7) = name(x)
angewendet auf das Jahr 2005 bedeutet dies zum Beispiel:
name(20 + 7) = Donnerstag = name(27)

Aufgabe:
Bestimmen Sie für da Jahr 2005, das mit einem Samstag beginnt (und ohne den Kalender zu benutzen) x und den Wochentag, so dass $0 \le x \le 6$.
name(304) = name(x)

Lösung:
name(304) = name(43*7+3) = name(3) = Dienstag

Diese führt zur genauen Definition des Begriffs "Periode":

17.2 Definition

1) Eine Funktion f heißt periodisch genau dann, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt mit:
$f(x + p) = f(x)$
Die kleinste dieser Zahlen heißt **Periode** von f.
Das Schaubild K_f von f ist verschiebungssymmetrisch in x-Richtung mit allen positiven ganzzahligen Vielfachen von p.

2) Der halbe Abstand der y-Werte eines Hochpunkts der Sinuskurve und eines Tiefpunkts der Sinuskurve nennt man **Amplitude** (anschaulich: Höhe eines Wellenbergs), kurz:

$$Amplitude = \frac{yKoordinate\ eines\ Hochpunkts - yKoordinate\ eines\ Tiefpunkts}{2}$$

Frage: Welche Amplitude und welche Periode hat die Kurve mit der Funktionsgleichung
$f(x) = \sin x$

Antwort:
Amplitude: 1
Periode 2π, da $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

17.2.1 Satz ("Periodensatz")

Wenn p die Periode von f ist, dann gilt:
$f(x+kp) = f(x);\ k \in Z$

Begründung:
(interne Bemerkung: das Herz soll ein stilisiertes X darstellen !!!!!!!!)

$f(\heartsuit + p\ ) = f(\heartsuit\ )$

1)
also: stilisiertes X = x

$f(x + p\ ) = f(x\ )$

$f(x+p) = f(x)$

2)
also: stilisiertes X = x+p

$f(x+p + p\ ) = f(x+p\ )$

$f(x+2p) = f(x+p) = f(x)$ (siehe 1))

3)
also: stilisiertes X = x-p

$f(x\text{-}p + p) = f(x\text{-}p)$

f(x) = f(x-p)

4)
also: stilisiertes X = x-2p

$f(x\text{-}2p + p) = f(x\text{-}2p)$

f(x) = (siehe 1)) = f(x-p) = f(x-2p)

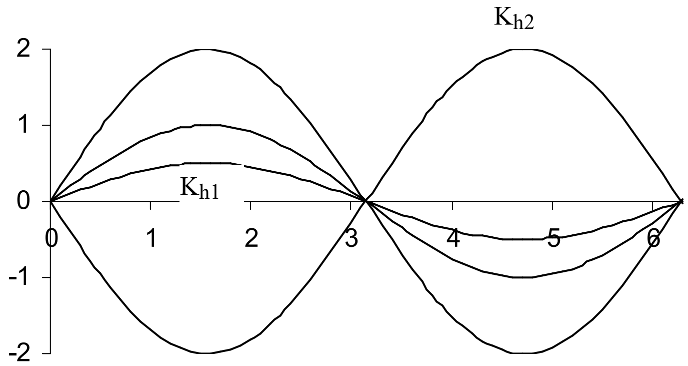
5)
ganz allgemein:

... = f(x-3p) = f(x-3p+p) = f(x-2p) = f(x-2p+p) = f(x-p) = f(x)=
f(x+p) = f(x+p+p) = f(x+2p) = f(x+2p+p) = f(x+3p) = ...

17.3 Funktionen mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin x$

17.3.1 Standard-Aufgabe

Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktionen im Intervall $D = [0 ; 2\pi]$
$h_1(x) = 0{,}5 \sin x$
$h_2(x) = -2 \sin x$



Fragen:
1) Wie kann man K_{h1} und K_{h2} aus der Sinuskurve mit der Funktionsgleichung $g(x) = \sin(x)$ konstruieren?

2) Welche Amplitude und welche Periode hat eine Sinuskurve K_f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin x$

17.3.2 Satz

Eine Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin x$ hat die Amplitude
$A = |a|$ und die Periode
$p = 2\pi$

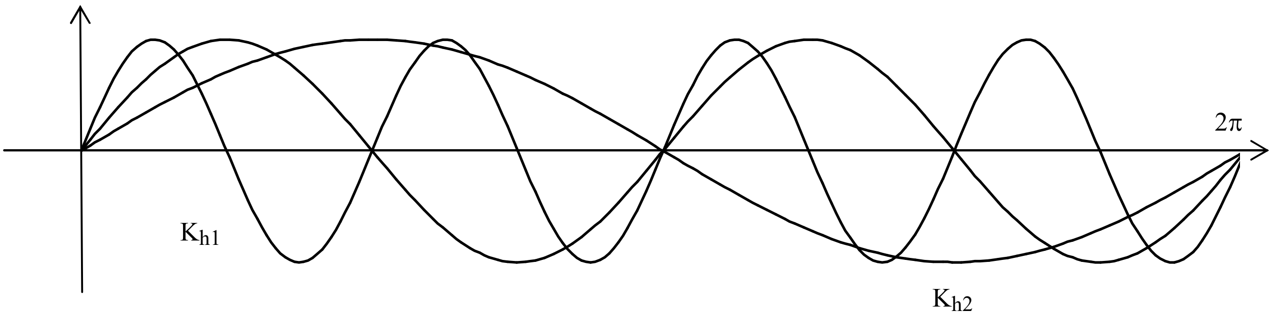
Begründung:
$f(x) = a \sin x = a \sin (x + 2\pi) = f(x + 2\pi)$

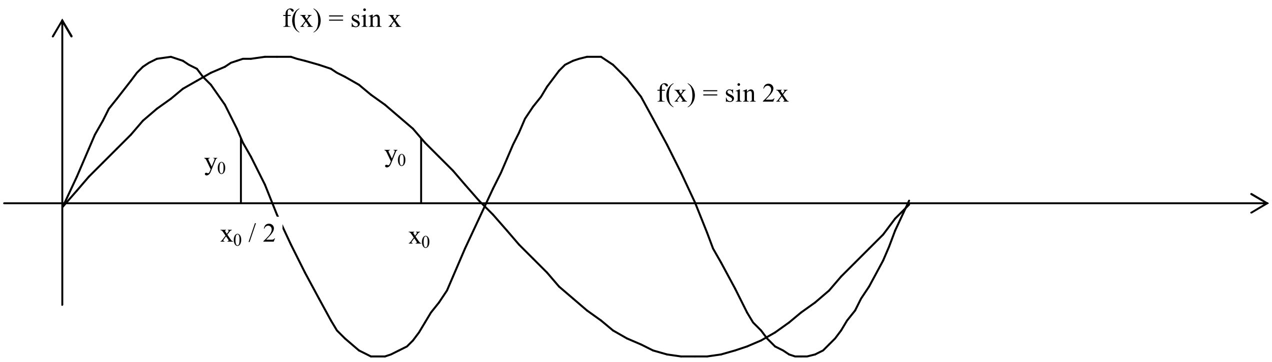
17.4 Funktionen mit der Funktionsgl. $f(x) = a \cdot \sin(kx)$, $k>0$

17.4.1 Standard-Aufgabe

Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktionen
$h_1(x) = \sin 2x$; $D = [0 ; 4\pi]$
$h_2(x) = \sin 0{,}5x$; $D = [0 ; 4\pi]$

Lösung:





Frage 1:
Welche Amplitude haben diese Funktionen ?
Begründen Sie dies mathematisch !

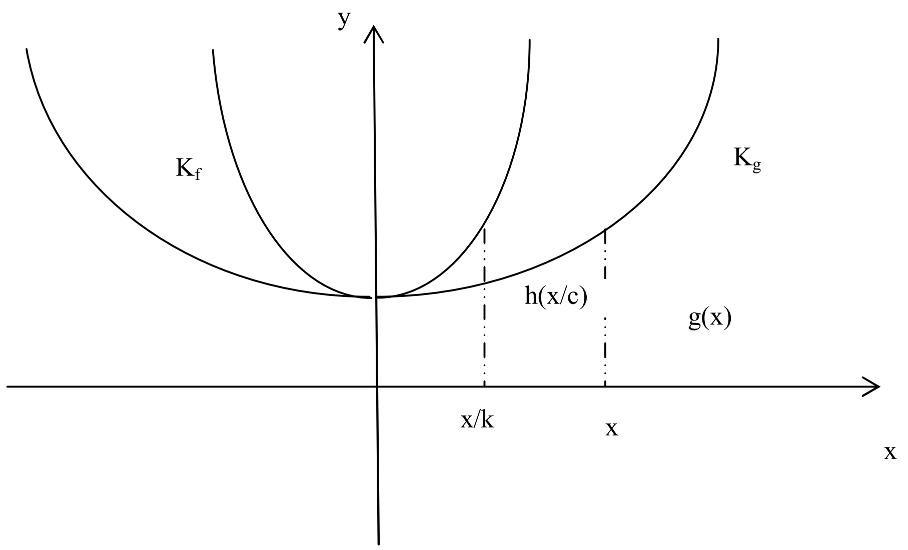
Antwort:
Die Amplitude ist $| a |$
$f(x) = a \cdot \sin x \leq | a | \cdot 1 \leq | a |$

EINSCHALTUNG bzw. WIEDERHOLUNG

17.4.1.1 Streckung von Kurven in x-Richtung

gegeben:
Eine "**h**altbare" (heht nie kaputt) gegebene Funktion h und ihre Kurve K_h
Diese wird um einen festen Faktor c in x-Richtung **g**estreckt und gibt dann die gestreckte Kurve K_g mit dem Funktionsterm g(x)

gesucht:
Die Funktionsgleichung von g



also:

$$g(x) = h\left(\frac{x}{c}\right)$$

17.4.1.1.1 Beispiel
gegeben:
Funktion h mit Funktionsgleichung h(x) = 2x - 3
Kurve K_g entsteht durch Streckung der Kurve K_h um den Faktor c = 4 in x-Richtung.

also:

$$g(x) = h\left(\frac{x}{4}\right) = 2 \cdot \frac{x}{4} - 3 = \frac{x}{2} - 3$$

Nachprüfen durch Zeichnung!

ENDE der EINSCHALTUNG

Frage 2:
Strecken Sie die Funktion mit der Funktionsgleichung
h(x) = a · sin(x)
um das c-fache in x-Richtung.
Welchen Wert hat die Periode dieser gestreckten Funktion s
Wie lautet die Funktionsgleichung von s ?

Lösung:
L1) Die Periode von f ist:
p = 2πc

L2)
s(x) = $h\left(\frac{x}{c}\right) = a \cdot \sin(\left(\frac{x}{c}\right)$

Frage 3:
Welche Periode hat dann umgekehrt eine Funktion f mit:
f(x) = a · sin(kx)

Antwort:

$$f(x) = a \cdot \sin(kx) = a \cdot \sin\left(\frac{x}{\frac{1}{k}}\right)$$

also ist $c = \frac{1}{k}$
und damit die Periode:

$$p = 2\pi \cdot \frac{1}{k} = \frac{2\pi}{k}$$

17.4.2 Satz

Eine Kurve mit der Funktionsgleichung f(x) = a · sin (kx) mit k > 0 hat die Amplitude
A = | a | und die Periode
p = $\frac{2\pi}{k}$

17.4.3 Funktionen f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(-x)$

Hinweis: Sinuskurve ist punktsymmetrisch O(0 | 0)

1) Frage:
Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen
$\sin(x)$ und $\sin(-x)$?

Antwort:
$\sin(-x) = -\sin(x)$

2) Frage:
Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen
$\sin(kx)$ und $\sin(-kx)$?

Antwort:
$\sin(-kx) = -\sin(kx)$

3) Frage:
Wie läßt sich dann
$f(x) = a\cdot \sin(-kx)$
darstellen, so daß kein Miunszeichen mehr im Argument des Sinus vorkommt ?

Antwort:
$f(x) = a\cdot \sin(-kx) = a\cdot -\sin(kx) = -a\cdot \sin(kx)$

17.5 Funktionen mit der Funktsgl. $f(x) = a \cdot \sin(kx) + y_0$, $k>0$

17.5.1 Standard-Aufgabe

Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktionen

$f(x) = \sin 2x + 2$	y-Achse: 1 LE = 2 cm, x-Achse: 1 LE = 2 cm, D=[0, 2π]
$g(x) = \sin 0{,}5x - 1$	y-Achse: 1 LE = 2 cm, x-Achse: 1 LE = 1 cm, D=[0, 4π]

Kann man die Kurven durch Verschiebung schon bekannter Kurven zeichnen?

Lösung:
Die Kurven bekommt man durch Verschiebung der Kurven der Funktionsgleichungen:
$f_1(x) = \sin 2x$
$g_1(x) = \sin 0{,}5x$

Hinweis:
Die Kurven lassen sich auch statt der Verschiebung von K_{f1} und K_{f2} durch die Verschiebung der x-Achse zeichnen.

17.5.2 Satz

Eine Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(kx) + y_0$ hat die Amplitude
$A = |a|$ und die Periode
$p = \dfrac{2\pi}{k}$ und entsteht durch Verschiebung der Kurve mit der Funktionsgleichung
$h(x) = a \cdot \sin(kx)$ um den Wert y_0 in y-Richtung.

17.5.3 Standard-Aufgaben zur Flächenberechnung

1) Berechnen Sie die Ableitungen (für k>0) von:
a) f(x) = sin(kx)
f '(x) = ?
b) h(x) = cos(kx)
f '(x) = ?
c) $\int \sin(kx)dx$
d) $\int \cos(kx)dx$

2)
a) Berechnen Sie mathematisch für k>0:

$$\int_0^{2\pi/k} \cos(kx)dx$$

Können Sie den errechneten Wert auch anschaulich begründen ?

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse, dem Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung h(x) = cos(kx) und den Geraden mit den Gleichungen x=0 und x=2π/k mit k>0.
- durch Berechnen der negativen und positiven Flächeninhalte.
- durch Ausnutzen der Symmetrie

3)
a) Berechnen Sie mathematisch:

$$\int_0^{2\pi/k} \sin(kx)dx$$

Können Sie den errechneten Wert auch anschaulich begründen ?

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse, dem Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung f(x) = sin(kx) und den Geraden mit den Gleichungen x=0 und x=2π/k
- durch Berechnen der negativen und positiven Flächeninhalte.
- durch Ausnutzen der Symmetrie

Lösung:

1)

a) f(x) = sin(kx)

Setze u = kx. Nach derKettenregel folgt:

f '(x) = cos(u)* u' = cos(kx) * k, also:

f '(x) = k * cos(kx)

b) h(x) = cos(kx)

Setze u = kx. Nach derKettenregel folgt:

h '(x) = -sin(u)* u' = -sin(kx) * k, also:

h '(x) = - k * sin(kx)

c) Nach b) gilt:

$$\int - \mathrm{k} * \sin(\mathrm{kx})dx = \cos(\mathrm{kx})$$

$$-\mathrm{k} * \int \sin(\mathrm{kx})dx = \cos(\mathrm{kx})$$

$$\int \sin(\mathrm{kx})dx = -\frac{1}{k}\cos(kx)$$

d) Nach a) gilt:

$$\int \mathrm{k} * \cos(\mathrm{kx})dx = \sin(\mathrm{kx})$$

$$\mathrm{k} * \int \cos(\mathrm{kx})dx = \sin(\mathrm{kx})$$

$$\int \cos(\mathrm{kx})dx = \frac{1}{k}\sin(kx)$$

2a)

$$\int_0^{2\pi/k} \cos(kx)dx = \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{2\pi/k} = \frac{1}{k}\sin(k\cdot\frac{2\pi}{k}) - \frac{1}{k}\sin(0) = \frac{1}{k}\sin(2\pi) - \frac{1}{k}\sin(0) = 0$$

Anschaulich: Bilanzierte Fläche ist aus Gründen der Symmetrie gleich 0.

2b)

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{(2\pi/k)/4} \cos(kx)dx = \int_0^{\pi/2k} \cos(kx)dx = \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi/2k} = \frac{1}{k}\sin(k\frac{\pi}{2k}) - \frac{1}{k}\sin(0) = \frac{1}{k}\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{k}$$

I_2 =

$$\int_{\pi/2k}^{3\pi/2k} \cos(kx)dx = \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_{\pi/2k}^{3\pi/2k} = \frac{1}{k}\sin(k\frac{3\pi}{2k}) - \frac{1}{k}\sin(k\frac{\pi}{2k}) = \frac{1}{k}\sin(\frac{3\pi}{2}) - \frac{1}{k}\sin(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{k} - -\frac{1}{k} = -\frac{2}{k}$$

I_3 =

$$\int_{3\pi/2k}^{2\pi/k} \cos(kx)dx = \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_{3\pi/2k}^{2\pi/k} = \frac{1}{k}\sin(k\frac{2\pi}{k}) - \frac{1}{k}\sin(k\frac{3\pi}{2k}) = \frac{1}{k}\sin(2\pi) - \frac{1}{k}\sin(\frac{3\pi}{2}) = 0 - \frac{1}{k}\cdot(-1) = \frac{1}{k}$$

$$\mathrm{A} = |\,\mathrm{I}_1\,| + |\,\mathrm{I}_2\,| + |\,\mathrm{I}_3\,| = |\frac{1}{k}| + |-\frac{2}{k}| + |\frac{1}{k}| = \frac{4}{k}$$

oder alternativ

$$A = 4\int_0^{\pi/2k}\cos(kx)dx = 4\cdot\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi/2k} = 4\cdot\left(\frac{1}{k}\sin(k\frac{\pi}{2k}) - \sin(0)\right) = 4\frac{1}{k}\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{k}$$

3a)

$$\int_0^{2\pi/k}\sin(kx)dx = \left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{2\pi/k} = -\frac{1}{k}\cos(k\frac{2\pi}{k}) - (-\frac{1}{k}\cos(k\cdot 0)) =$$

$$-\frac{1}{k}\cos(2\pi) - (-\frac{1}{k}\cos(0)) = -\frac{1}{k} - (-\frac{1}{k}) = 0$$

Anschaulich: Bilanzierte Fläche ist aus Gründen der Symmetrie gleich 0.

3b)

$I_1 =$

$$\int_0^{(2\pi/k)/2}\sin(kx)dx = \int_0^{\pi/k}\sin(kx)dx = \left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi/k} = -\frac{1}{k}\cos(k\frac{\pi}{k}) - (-\frac{1}{k}\cos(k\cdot 0)) =$$

$$-\frac{1}{k}\cos(\pi) - (-\frac{1}{k}\cos(0)) = -\frac{1}{k}(-1) - (-\frac{1}{k}) = \frac{2}{k}$$

$I_2 =$

$$\int_{\pi/k}^{2\pi/k}\sin(kx)dx = \left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{\pi/k}^{2\pi/k} = -\frac{1}{k}\cos(k\frac{2\pi}{k}) - (-\frac{1}{k}\cos(k\frac{\pi}{k})) =$$

$$-\frac{1}{k}\cos(2\pi) - (-\frac{1}{k}\cos(\pi)) = -\frac{1}{k} - (-\frac{1}{k}(-1)) = -\frac{2}{k}$$

$$A = |I_1| + |I_2| = \left|\frac{2}{k}\right| + \left|-\frac{2}{k}\right| = \frac{4}{k}$$

oder alternativ:

$$A = 4\int_0^{\pi/2k}\sin(kx)dx = 4\cdot\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi/2k} = 4\cdot\left(-\frac{1}{k}\cos(k\frac{\pi}{2k}) - (-\frac{1}{k}\cos(k\cdot 0))\right) =$$

$$4\cdot\left(-\frac{1}{k}\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\frac{1}{k}\cos(0))\right) = 4\cdot\left(-\frac{1}{k}\cdot 0 - (-\frac{1}{k})\right) = 4\cdot\left(-(-\frac{1}{k})\right) = \frac{4}{k}$$

17.6 Funktionen mit der Funktsgl. $f(x) = a \cdot \sin(k(x-x_0))+y_0$, $k>0$

17.6.1 Standard-Aufgabe

Geben Sie die Funktionsgleichung g der Kurve K_f an, die durch Verschiebung um den Wert x_0 in x-Richtung der Kurve K_h mit der folgenden Funktionsgleichung h entsteht:
$h(x) = a \cdot \sin(kx) + y_0$
Benutzen Sie dazu den obigen Satz

Die Kurve K_f wird um x_0 in x-Richtung verschoben, also muss man in der Funktionsgleichung x durch $x - x_0$ ersetzen. da K_f nur durch Verschiebung in x-Richtung entsteht, bleiben Amplitude, Periode und Verschiebung y_0 in y-Richtung gleich.
Damit ergibt sich dann der folgende Satz:

17.6.2 Satz

Eine Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(k(x- x_0)) + y_0$ hat die Amplitude $A = |a|$ und die Periode
$p = \frac{2\pi}{k}$ und entsteht durch Verschiebung der Kurve mit der Funktionsgleichung
$h(x) = a \cdot \sin(kx)$
um den Wert y_0 in y-Richtung und den Wert x_0 in x-Richtung.

Frage:
Welchen Abstand (bzgl. der x-Richtung) haben bei Kurven mit der Funktionsgleichung
$g(x) = a \cdot \sin(k(x- x_0)) + y_0$
ein Wendepunkt und ein benachbarter Extrempunkt voneinander ?

17.6.3 Satz

Auf einer Sinuskurve mit der Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot \sin(k(x- x_0)) + y_0$
ist der Abstand b (bzgl. der x-Richtung) von einem Wendepunkt und einem nächsten Extrempunkt ein Viertel der Periode dieser Sinuskurve, also:

$$b = \frac{\frac{2\pi}{k}}{4} = \frac{\pi}{2k}$$

17.6.4 Kleinste Verschiebung einer periodischen Kurve

17.6.4.1 Standard-Aufgabe

Um welchen minimalen Wert muss die Sinuskurve der Form $f(x) = \sin x$ nach rechts verschoben werden, damit die so verschobene Kurve die folgende Funktionsgleichung besitzt:
$g(x) = \sin (x+100{,}25\cdot\pi)$

Lösung
Die Sinuskurve K_f hat Periode 2π.
Anschaulich gesehen, bekommt man die gleiche Kurve K_g, wenn die Kurve K_g um ein Vielfaches der Periode nach links oder rechts verschoben wird. Man muss also die Kurve maximal um so viel Perioden verschieben, damit K_f um einen minimalen Wert in x-Richtung verschoben wird.
$f(x) = \sin (x+100{,}25\cdot\pi) = \sin (x+(100{,}25\cdot\pi - 50\cdot 2\pi) = \sin (x+ 0{,}25\pi)$

Jetzt hat man die kleinste Verschiebung $x_{minL} = 0{,}25\pi$ nach links. Jetzt muss die Kurve nur noch um die Periode p nach rechts verschoben werden, dann hat man die kleinste Verschiebung nach rechts:
$\sin (x+ 0{,}25\pi) = \sin (x+ 0{,}25\pi - 2\pi) = \sin (x - 1{,}75\pi)$.
Damit:
$f(x) = \sin (x+100{,}25\cdot\pi) = \sin (x - 1{,}75\pi)$
Also:
Die gegebene Sinuskurve muss minimal um $x_{minR} = 1{,}75\pi$ nach rechts verschoben werden.

17.6.4.2 Verallgemeinerung

Wie kann man aus diesem Beispiel ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der minimalen Verschiebung in x-Richtung machen ?

Den ganzzahligen Rest r bei der Division einer Zahl z durch n bezeichnet man mit:
$r = z \bmod n$
Um sich Klammern zu sparen, wird hier verabredet, dass mod die höchste Priorität aller Rechenarten haben soll.

Beispiele:
$3 = 38 \bmod 5$, weil $38 = 7 \cdot 5 + 3$

Damit gilt:

17.6.5 Satz ("Periodenverschiebungssatz")

Wenn p die Periode von f ist, dann gilt:
$f(x+v) = f(x + v \bmod p)$

Begründung:
(Zur Erinnerung: $f(x + k\cdot p) = f(x)$)
Jede Zahl v lässt sich wie folgt darstellen: $v = k\cdot p + r$
$f(x+v) = f(x + k\cdot p + r) = f((x + r) + k\cdot p) = f(x + r) = f(x + v \bmod p)$

17.6.5.1 Satz ("kleinste Verschiebung")

Voraussetzung:
Eine K_f der Form mit der Funktionsgleichung f mit der Periode p wird um x_0 verschoben. Die so verschobene Kurve K_g besitzt die Funktionsgleichung g

Behauptung:
Fall $x_0 > 0$:
Die Kurve Kg entsteht durch eine minimale Verschiebung der Kurve K_f um
$m_0 = x_0 \bmod p$
nach rechts, d.h:
$g(x) = f(x - (x_0 \bmod p))$.

Fall $x_0 < 0$:
Die Kurve Kg entsteht durch eine minimale Verschiebung der Kurve K_f um
$m_0 = x_0 \bmod p - p$
nach links, d.h:
$g(x) = f(x - (p - x_0 \bmod p))$

Begründung:
Die Zahl x_0 lässt sich darstellen als $x_0 = cp + r$, wobei $0 \le r < p$
d.h: $r = x_0 \bmod p$

Fall $x_0 > 0$:
Es gilt:
$g(x) = f(x - (cp + r)) = f(x - cp - r) = f((x - r) - cp)$
Nach dem "Periodenverschiebungsssatz" gilt:
$f((x - r) - cp) = f(x - r) = f(x - x_0 \bmod p)$.

Fall $x_0 < 0$:
setze $z = -x_0$, d.h. $z > 0$
$g(x) = f(x - x_0) = f(x + z) = f(x + cp + r) = f((x + r) + cp))$
Nach dem "Periodenverschiebungsssatz" gilt:
$f((x + r) + cp)) = f(x + r) = f(x + r - p) = f(x + x_0 \bmod p - p) = f(x - (p - x_0 \bmod p))$

17.7 Signifikante Punkte von $f(x) = a\cdot\sin(k(x-x_0))+y_0$

Um welchen Wert y_0 muss die Sinuskurve der Form $y = a \sin(kx)$ (mit $a>0$ und $k>0$) jeweils in y-Richtung und **minimal** um $x_{minR} \geq 0$ nach **rechts** und $x_{minL} \geq 0$ nach **links** in x-Richtung verschoben werden, so dass die verschobene Kurve jeweils die folgende Funktionsgleichung besitzt ?
Bestimmen Sie von folgenden Funktionen:
Amplitude A, Periode p, y_0, x_{minR} , x_{minL}

Beispiele:

1) $f_1(x) = \sin(\frac{1}{3}(x-605\pi)) = 1 \cdot \sin(\frac{1}{3}(x-605\pi)) + 0$

$A = |1| = 1,$

$p = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$

$x_0 = 605\pi$ nach rechts ==> $f_1(x) = \sin(\frac{1}{3}(x-605\pi+600\pi)) = \sin(\frac{1}{3}(x-5\pi))$

$x_{minR} = 5\pi$

==> $f_1(x) = \sin(\frac{1}{3}(x-5\pi)) = \sin(\frac{1}{3}(x-5\pi+6\pi)) = \sin(\frac{1}{3}(x+\pi))$

$x_{minL} = \pi$
$y_0 = 0$

2) $f_2(x) = 3 \cdot \sin(\frac{1}{2}x) + 4 = 3 \cdot \sin(\frac{1}{2}(x - 0)) + 4$

$A = |3| = 3,$

$p = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$

$x_0 = 0$ ==> $x_{minR} = x_{minL} = 0$
$y_0 = 4$

3) $f_3(x) = 2 \cdot \sin(-\frac{1}{3}x) = 2 \cdot - \sin(\frac{1}{3}(x - 0)) = -2 \sin(\frac{1}{3}(x - 0))$

$A = |-2| = 2,$

$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

$x_0 = 0$ ==> $x_{minR} = x_{minL} = 0$
$y_0 = 0$

4) $f_4(x) = 1{,}5 \cdot \sin(3x - \frac{3\pi}{4}) - 6 = 1{,}5 \cdot \sin(3(x - \frac{\pi}{4})) - 6$

$A = |\,1{,}5\,| = 1{,}5$

$p = \frac{2\pi}{3}$

$x_0 = \frac{\pi}{4}$ nach rechts ==> $x_{minR} = \frac{\pi}{4}$

==> $f_4(x) = 1{,}5 \cdot \sin(3(x - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})) - 6 = 1{,}5 \cdot \sin(3(x + \frac{5\pi}{12})) - 6$ ==> $x_{minL} = \frac{5\pi}{12}$

$y_0 = -6$

5) $f_5(x) = 2 \cdot \sin(-\frac{\pi}{2} - \frac{3}{5}x) + 7 = 2 \cdot \sin(-\frac{3}{5}x - \frac{\pi}{2}) + 7 = 2 \cdot \sin(-\frac{3}{5}(x + \frac{5\pi}{6})) + 7 =$

$2 \cdot -\sin[\frac{3}{5}(x + \frac{5\pi}{6})) + 7 = -2 \sin[\frac{3}{5}(x + \frac{5\pi}{6})) + 7$

$A = |\,-2\,| = 2,$

$p = \frac{2\pi}{\frac{3}{5}} = \frac{10\pi}{3}$

$y_0 = 7$

$x_0 = \frac{5\pi}{6}$ nach links

$x_{minL} = \frac{5\pi}{6}$

==> $f_5(x) = 2 \cdot -\sin[\frac{3}{5}(x + \frac{5\pi}{6} - \frac{10\pi}{3})) + 7 = 2 \cdot -\sin[\frac{3}{5}(x - \frac{5\pi}{2})) + 7$

==> $x_{minR} = \frac{5\pi}{2}$

6) $f_6(x) = 2 \sin(0{,}5x - 100\pi) = 2 \sin(0{,}5(x - 200\pi))$

$p = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$

$A = |\,2\,| = 2,$

$p = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$

$y_0 = 0$

$x_0 = 200\,\pi$ nach rechts ==>

$x_{minR} = 200\,\pi - 50 \cdot 4\,\pi = 0$ ==> $x_{minL} = 0$

7) $f_7(x) = -3 \sin(-\frac{3}{2} x - \frac{89}{4}\pi) = -3 \sin(-\frac{3}{2}(x - \frac{\frac{89\pi}{4}}{-\frac{3}{2}})) = -3 \sin(-\frac{3}{2}(x + \frac{2 \cdot 89\pi}{3 \cdot 4})) =$

$-3 \sin(-\frac{3}{2}(x + \frac{89\pi}{6})) = -3 \cdot -\sin(\frac{3}{2}(x + \frac{89\pi}{6})) = 3 \cdot \sin(\frac{3}{2}(x + \frac{89\pi}{6}))$

$A = |3| = 3,$

$p = \frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}$

$y_0 = 0$

$x_0 = \frac{89\pi}{6}$ nach links ==>

$x_{minL} = \frac{89\pi}{6} - 11 \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$f_7(x) = 3 \cdot \sin(\frac{3}{2}(x + \frac{\pi}{6})) = 3 \cdot \sin(\frac{3}{2}(x + \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3})) = 3 \cdot \sin(\frac{3}{2}(x - \frac{7\pi}{6}))$

==> $x_{minR} = \frac{7\pi}{6}$

8) $f_8(x) = -5 \sin(-10x + 10000) - 7 = -5 \sin(-10(x + \frac{10000}{-10})) - 7 = -5 \sin(-10(x - 1000)) - 7 =$

$-5 \cdot -\sin(10(x - 1000)) - 7 = 5 \sin(10(x - 1000)) - 7$

$A = |5| = 5,$

$p = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

$y_0 = -7$

$x_0 = 1000$ nach rechts ==>

$x_{minR} = 1000 - \frac{1591\pi}{5} \approx 0,3747$

$f_8(x) = 5 \sin(10(x - 0,3747)) - 7 = 5 \sin(10(x - 0,3747 + \frac{\pi}{5})) - 7 =$

$5 \sin(10(x + 0,2536)) - 7$

==> $x_{minL} \approx 0,2536$

17.8 Programmieraufgabe

Schreiben Sie ein Programm, das von einer Kurve mit der folgenden Funktionsgleichung:
$f(x) = a\cdot\sin(k(x-x_0))+y_0$
A, p, y_0, x_0, x_{minR}, x_{minL}
berechnet.

Aufgaben mit einem Matheprogramm:
1) Zeichnen Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = 2\cdot\sin x$$
$$f_2(x) = 2\cdot(\sin x - \frac{\sin 2x}{2})$$
$$f_3(x) = 2\cdot(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3})$$
$$f_4(x) = 2\cdot(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4})$$
$$f_5(x) = 2\cdot(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5})$$

Welchem Schaubild "nähert" sich diese Folge von Schaubildern ?

2) Zeichnen Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen:

$f_1(x) = 2 \cdot \sin x$

$f_2(x) = 2 \cdot (\sin x + \frac{\sin 3x}{3})$

$f_3(x) = 2 \cdot (\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5})$

$f_4(x) = 2 \cdot (\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7})$

$f_5(x) = 2 \cdot (\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9})$

Welchem Schaubild "nähert" sich diese Folge von Schaubildern ?