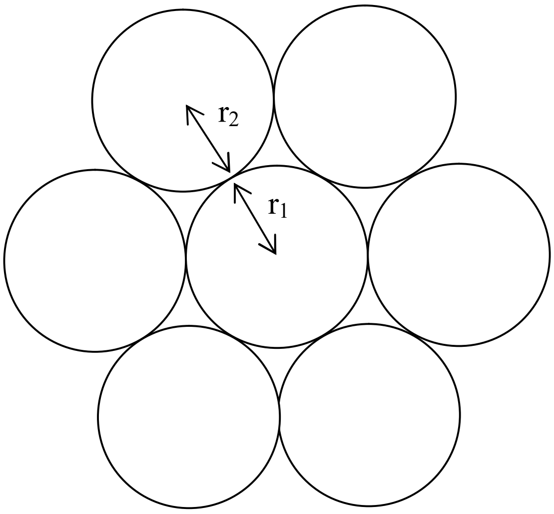
16 Trigonometrische Funktionen

16.1 Denksportaufgabe



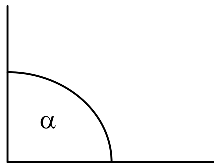
1) Um eine 50 Cent-Münze werden andere 50 Cent-Münzen wie oben angeordnet.
Müssen sich alle 50 Cent-Münzen berühren?

2) Man legt um eine Münze mit Radius r_1 lauter Münzen mit Radius r_2.
Wie groß muss das Verhältnis von r_1 zu r_2 , damit sich die Münzen berühren ?

16.2 Darstellung eines Winkels

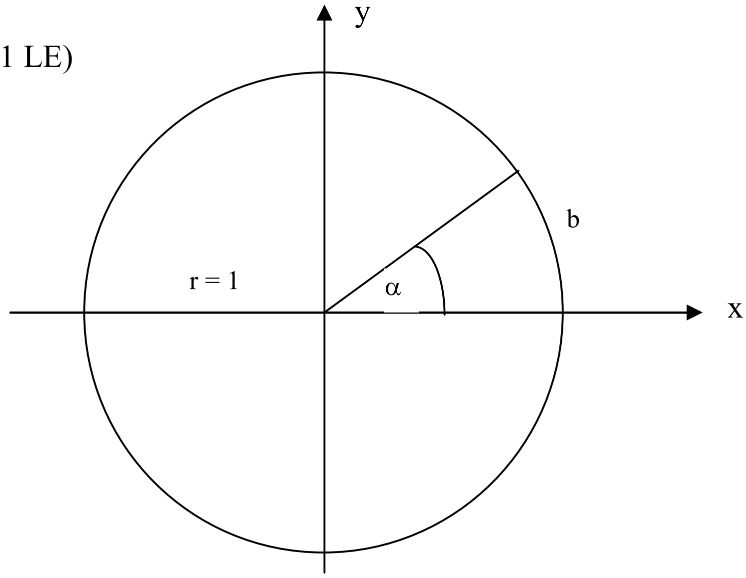
16.2.1 Gradmass

Beispiele:
$\alpha = 90°$
$\beta = 45°$
$\gamma = 30°$



16.2.2 Bogenmass

Einheitskreis (r = 1 LE)



Es gilt:

$\frac{\alpha}{360°} = \frac{b}{2\pi}$, also:

$$\boxed{\alpha = \frac{180 \cdot b}{\pi}} \quad \text{und} \quad \boxed{b = \frac{\pi\alpha}{180°}}$$

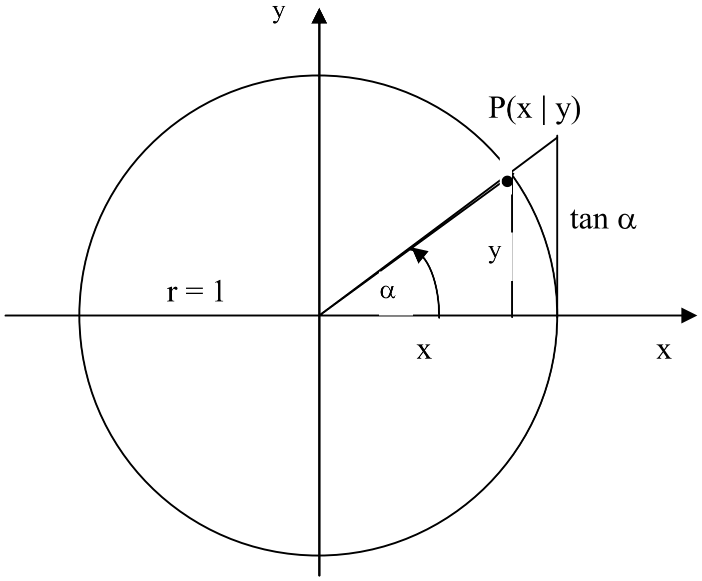
Beispiele:

Gradmass	Bogenmass
45°	π / 4
90°	π / 2
180°	π
360°	2π

16.3 Definition der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel (im Koordinatensystem)

16.3.1 Definitionen

Einheitskreis (r = 1 LE)



$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

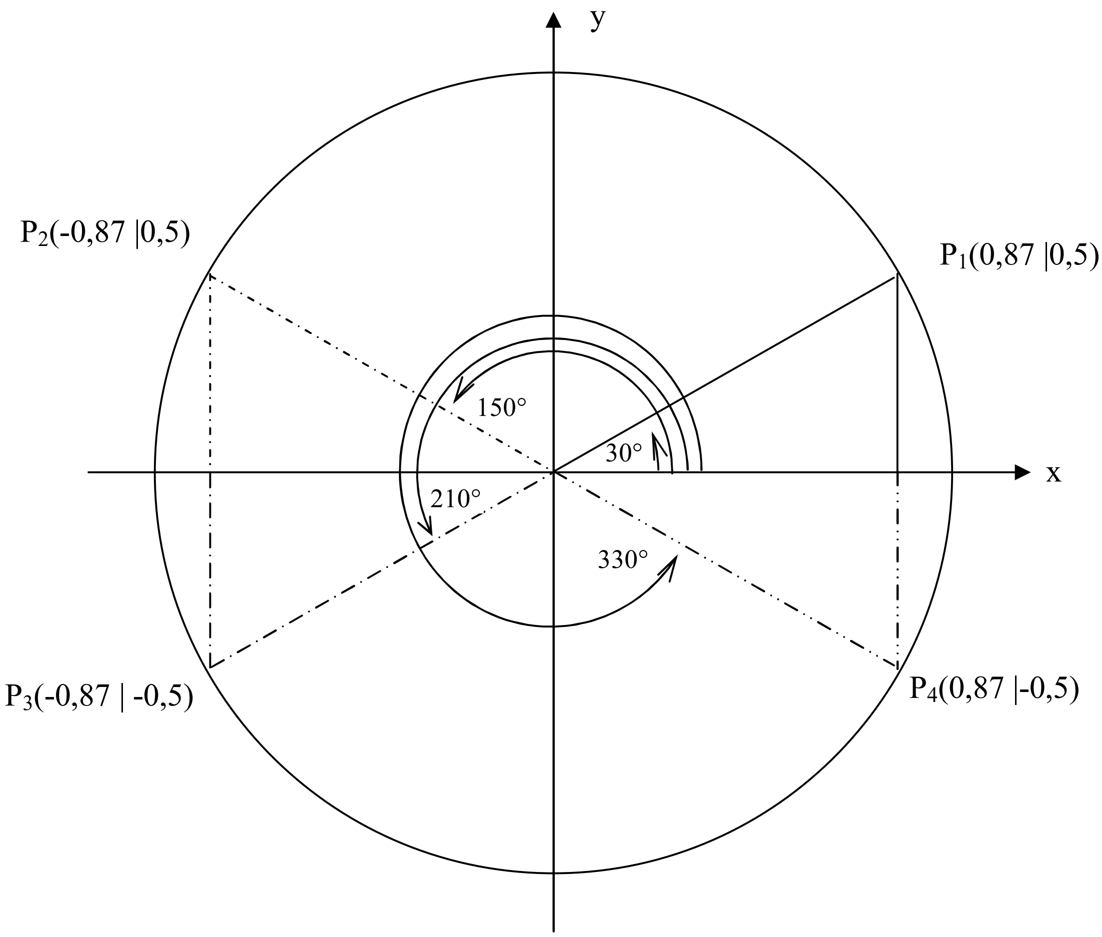
Bemerkung:

positiver Winkel: gegen den Uhrzeigersinn

negativer Winkel: mit dem Uhrzeigersinn

16.3.2 Beispiele

Einheitskreis (r = 1 LE)
Welche Winkel liefern - vom Vorzeichen abgesehen - die gleichen Ergebnisse wie
sin 30°, cos 30°, tan 30°



$$\sin 30° = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

$$\cos 30° \approx \frac{0{,}87}{1} = 0{,}87$$

$$\tan 30° \approx \frac{0{,}5}{0{,}87} = 0{,}58$$

$$\sin 150° = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

$$\cos 150° \approx \frac{-0{,}87}{1} = -0{,}87$$

$$\tan 150° \approx \frac{0{,}5}{-0{,}87} = -0{,}58$$

$$\sin 210° = \frac{-0{,}5}{1} = -0{,}5$$

$$\cos 210° \approx \frac{-0{,}87}{1} = -0{,}87$$

$$\tan 210° \approx \frac{-0{,}5}{-0{,}87} = 0{,}58$$

$$\sin 330° = \frac{-0{,}5}{1} = -0{,}5$$

$$\cos 330° \approx \frac{0{,}87}{1} = 0{,}87$$

$$\tan 330° \approx \frac{-0{,}5}{0{,}87} = -0{,}58$$

Arbeitsblatt

Standard-Aufgabe:

1) Füllen Sie die Tabelle **ohne** Benutzung des Taschenrechners aus und zeichnen Sie die Schaubilder der trigonometrischen Funktionen (x-Achse: Winkel im Bogenmaß).

Bemerkung: α im Gradmaß und x im Bogenmaß angeben.

Vorgehensweise:
Betrachten Sie z.B. die Spalte mit $\alpha = 18°$ und überlegen Sie (Einheitskreis anschauen), für welche weitere Winkel (außer für 18°) auch noch gilt: $\sin(\alpha) = 0{,}31$ und füllen mit Hilfe dieser Überlegung weitere Spalten der Tabelle aus.

α	-360°	-342°	-324°	-306°	-288°	-270°	-252°	-234°	-216°	-198°
x										
sin x										
cos x										
tan x										

α	-180°	-162°	-144°	-126°	-108°	-90°	-72°	-54°	-36°	-18°
x										
sin x										
cos x										
tan x										

α	0°	18°	36°	54°	72°	90°	108°	126°	144°	162°
x	0,00	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57				
sin x	0,00	0,31	0,59	0,81	0,95	1,00				
cos x	1,00	0,95	0,81	0,59	0,31	0,00				
tan x	0,00	0,32	0,73	1,38	3,08	∞				

α	180°	198°	216°	234°	252°	270°	288°	306°	324°	342°	360°
x											
sin x											
cos x											
tan x											

2) Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktionen
$f_1(x) = \sin(x)$
$f_2(x) = \cos(x)$
$f_3(x) = \tan(x)$
im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$ in **ein** Koordinatensystem ein.
Der Winkel auf der x-Achse muss im Bogenmaß aufgetragen werden.

16.4 Die Schaubilder der trigonometrischen Funktionen

16.4.1 Standard-Aufgabe (siehe Arbeitsblatt)

füllen Sie die Tabelle ohne Benutzung des Taschenrechners aus und zeichnen Sie die Schaubilder der trigonometrischen Funktionen (x-Achse: Winkel im Bogenmass).

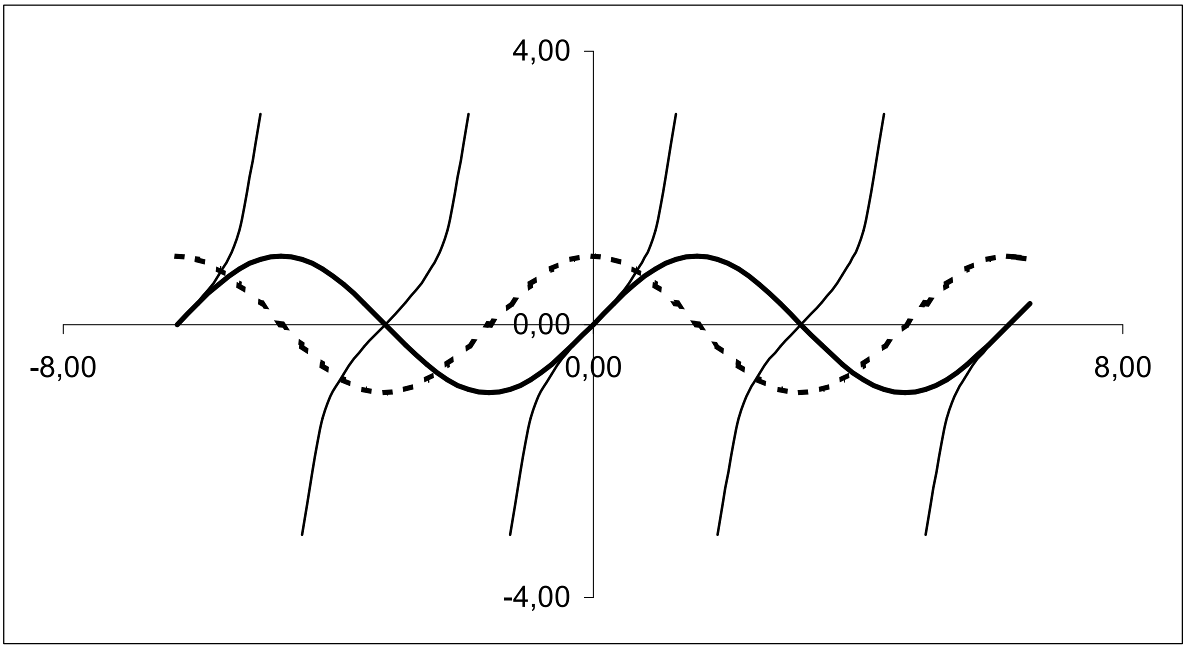
α	-360°	-342°	-324°	-306°	-288°	-270°	-252°	-234°	-216°	-198°
x	-6,28	-5,97	-5,65	-5,34	-5,03	-4,71	-4,40	-4,08	-3,77	-3,46
sin x	0,00	0,31	0,59	0,81	0,95	1,00	0,95	0,81	0,59	0,31
cos x	1,00	0,95	0,81	0,59	0,31	0,00	-0,31	-0,59	-0,81	-0,95
tan x	0,00	0,32	0,73	1,38	3,08	∞	-3,08	-1,38	-0,73	-0,32

α	-180°	-162°	-144°	-126°	-108°	-90°	-72°	-54°	-36°	-18°
x	-3,14	-2,83	-2,51	-2,20	-1,88	-1,57	-1,26	-0,94	-0,63	-0,31
sin x	0,00	-0,31	-0,59	-0,81	-0,95	-1,00	-0,95	-0,81	-0,59	-0,31
cos x	-1,00	-0,95	-0,81	-0,59	-0,31	0,00	0,31	0,59	0,81	0,95
tan x	0,00	0,32	0,73	1,38	3,08	∞	-3,08	-1,38	-0,73	-0,32

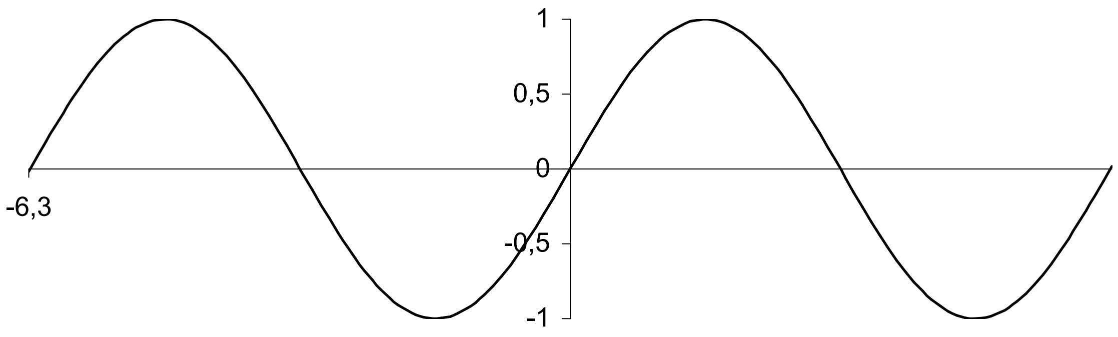
α	0°	18°	36°	54°	72°	90°	108°	126°	144°	162°
x	0,00	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57	1,88	2,20	2,51	2,83
sin x	0,00	0,31	0,59	0,81	0,95	1,00	0,95	0,81	0,59	0,31
cos x	1,00	0,95	0,81	0,59	0,31	0,00	-0,31	-0,59	-0,81	-0,95
tan x	0,00	0,32	0,73	1,38	3,08	∞	-3,08	-1,38	-0,73	-0,32

α	180°	198°	216°	234°	252°	270°	288°	306°	324°	342°	360°
x	3,14	3,46	3,77	4,08	4,40	4,71	5,03	5,34	5,65	5,97	6,28
sin x	0,00	-0,31	-0,59	-0,81	-0,95	-1,00	-0,95	-0,81	-0,59	-0,31	0,00
cos x	-1,00	-0,95	-0,81	-0,59	-0,31	0,00	0,31	0,59	0,81	0,95	1,00
tan x	0,00	0,32	0,73	1,38	3,08	∞	-3,08	-1,38	-0,73	-0,32	0,00

Zeichnung:



16.4.2 Die Sinusfunktion f(x) = sin x



Frage:
Wo kommt das Flächenstück, das durch die obige Sinuskurve und dem auf der x-Achse liegenden Intervall [0, π/2] begrenzt wird, nochmals auf der Sinuskurve vor ?

Antwort:
Auf der restlichen Sinuskurve.

Standard-Aufgabe:
1) Welche Eigenschaften hat die Sinusfunktion (Periode, Symmetrie) ?
2) Versuchen Sie diese Eigenschaften der obigen Sinuskurve als Formel anzugeben.

16.4.2.1 Satz (Eigenschaften der Sinuskurve)

1) Periode 2π
formal: sin (x + 2π) = sin x

2) Achsensymmetrie bzgl. einer beliebigen Parallelen zur y-Achse
(mit der Gleichung $x = \frac{(2k+1)}{2} \cdot \pi$; k∈ Z) durch einen Extrempunkt

formal: $\sin((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} + x = \sin((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} - x$; k∈ Z = {..., -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ;...}

3) Punktsymmetrie bzgl. einer beliebigen Nullstelle N(kπ | 0); k∈ Z (speziell dem Ursprung):
formal: sin (kπ + x) = -sin (kπ - x), k∈ Z

16.4.2.2 Standard-Aufgabe

Bem:
Benutzen Sie für diese Standard-Aufgabe eine Skizze der Sinuskurve.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge ohne TR !
Machen Sie die Probe mit TR

Für welche Winkel x zwischen -2π und 3π gilt: (Probe machen)

a) $\sin x = 0{,}5$ (eine Lösung: $x_1 = 30°$)

b) $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ (eine Lösung: $x_1 = -60°$)

c) $\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (eine Lösung: $x_1 = 15°$)

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (eine Lösung: $x_1 = -45°$)

e) $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lösung:

a) $x_1 = 30°$, $x_2 = 180°-30°=150°$, $x_3 = 360°+30°=390°$, $x_4 = 540°-30°=510°$,
$x_5 = -180-30° = -210°$, $x_6 = -360° + 30° = -330°$,
also Lösungsmenge L1 = {-330° ; -210° ; 30° ; 150° ; 390° ; 510° }

b) $x_1 = -60°$, $x_2 = -180°+60° = -120°$, $x_3 = 180°+60°=240°$, $x_4 = 360°-60° = 300°$
also Lösungsmenge L2 = {-120° ; -60° ; 240° ; 300° }

c) $x_1 = 15°$, $x_2 = 180°-15°=165°$, $x_3 = 360°+15°=375°$, $x_4 = 540°-15° = 525°$
$x_5 = -180-15° = -195°$, $x_6 = -360° + 15° = -345°$,
also Lösungsmenge L3 = {-345° ; -195° ; 15° ; 165° ; 375° ; 525° }

d) $x_1 = -45°$, $x_2 = -180°+45° = -135°$, $x_3 = 180°+45°=225°$, $x_4 = 360°-45° = 315°$

e) Setze u = 3x. Dann gilt:

$\sin u = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, also (siehe b):

Einfache Lösung (aber nicht ganz korrekt):
$u_1 = -60°$, $u_2 = -180°+60° = -120°$, $u_3 = 180°+60°=240°$, $u_4 = 360°-60° = 300°$
x = u/3. Damit gilt:
$x_1 = -60°/3 = -20°$, $x_2 = -120°/3 = -40°$, $x_3 = 240°/3 = 80°$, $x_4 = 300°/3 = 100°$
Was stimmt hier nicht ganz?
Man bekommt nicht alle (sondern nur eine Teil) Winkel im vorgegeben Intervall.

Bessere Lösung:
$u_1 = -60°$, $u_2 = -180°+60° = -120°$,
allgemein:
$u_{1k} = -60 + k \cdot 360°$, k ist eine ganze Zahl
$u_{2k} = -120 + k \cdot 360°$, k ist eine ganze Zahl
und u_{1k} und u_{2k} liegen im Intervall
Also muss u im Intervall $[-3 \cdot 360°, 3 \cdot 540°] = [-1080°, 1800°]$ liegen.

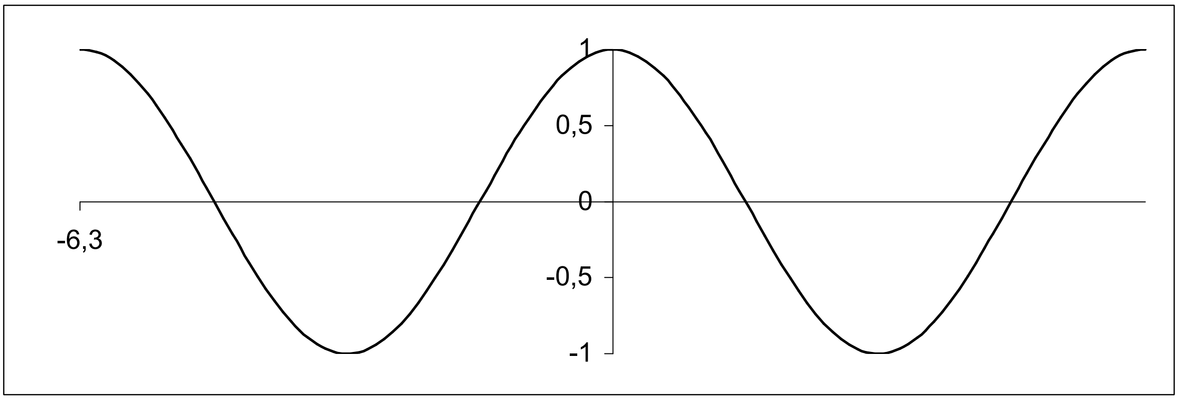
Aufzählung der u:
$-2\cdot 360° -60°$, $-1\cdot 360° -60°$, $0\cdot 360° -60°$, $1\cdot 360° -60°$, $2\cdot 360° -60°$, $3\cdot 360° -60°$, $4\cdot 360° -60°$, $5\cdot 360° -60°$ und
$-2\cdot 360° -120°$, $-1\cdot 360° -120°$, $0\cdot 360° -120°$, $1\cdot 360° -120°$, $2\cdot 360° -120°$, $3\cdot 360° -120°$, $4\cdot 360° -120°$, $5\cdot 360° -120°$

ausgerechnet:

-780°, -420° -60°, 300°, 660°, 120°, 1380°, 1740° und
-840°, -480°, -120°, 240°, 600°, 960°, 1320°, 1680°

Da $x = u/3$, gilt für die Menge aller Winkel W:
W = {-260°, -140° -20°, 100°, 220°, 40°, 460°, 580°,
-280°, -160°, -40°, 80°, 200°, 320°, 440°, 560° }

16.4.3 Die Kosinusfunktion



Frage:
Wo kommt das Flächenstück, das durch die obige Kosinuskurve und dem auf der x-Achse liegenden Intervall [0, π/2] begrenzt wird, nochmals auf der Kosinuskurve vor ?

Antwort:
Auf der restlichen Kosinuskurve.

Standard-Aufgabe:
1) Welche Eigenschaften hat die Kosinusfunktion (Periode, Symmetrie) ?
2) Versuchen Sie diese Eigenschaften der obigen Kosinuskurve als Formel anzugeben.

16.4.3.1 Satz (Eigenschaften der Kosinuskurve)

1) Periode 2π
formal: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

2) Achsensymmetrie bzgl. einer beliebigen Parallelen zur y-Achse durch einen Extrempunkt (speziell der y-Achse) (mit der Gleichung $x = k\pi$; $k \in Z$)
formal: $\cos(k\pi + x) = \cos(k\pi - x)$, $k \in Z$

3) Punktsymmetrie bzgl. einer beliebigen Nullstelle $N((2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}|0)$; $k \in Z$)

formal: $\cos((2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} - x) = \cos((2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} + x)$; $k \in Z$

16.4.3.2 Standard-Aufgabe

Bem:
Benutzen Sie für diese Standard-Aufgabe eine Skizze der Kosinuskurve.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge ohne TR !
Machen Sie die Probe mit TR

Für welche Winkel x zwischen -2π und 3π gilt:

a) $\cos x = 0{,}5$ (eine Lösung: $x_1 = 60°$)

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (eine Lösung: $x_1 = 150°$)

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (eine Lösung: $x_1 = 45°$)

d) $\cos x = -0{,}5$ (eine Lösung: $x_1 = 120°$)

Lösung:

a) $x_1 = 60°$, $x_2 = -360° + 60° = -300°$, $x_3 = -60°$, $x_4 = 360° - 60° = 300°$,
$x_5 = 360° + 60° = 420°$
also Lösungsmenge L1 = {-60° ; -300° ; -60° ; 300° ; -420° }

b) $x_1 = 150°$, $x_2 = -270° + 60° = -210°$, $x_3 = -90° -60° = - 150°$, $x_4 = 270° - 60° = 210°$
$x_5 = 450° + 60° = 510°$
also Lösungsmenge L2 = {-210° ; -150° ; 150° ; 210° ; 510° }

c) $x_1 = 45°$, $x_2 = -360° + 45° = - 315°$, $x_3 = -45°$, $x_4 = 360° - 45° = 315°$
$x_5 = 360° + 45° = 405°$
also Lösungsmenge L3 = {-315° ; -45° ; 45° ; 315° ; 405° }

d) $x_1 = 120°$, $x_2 = -270° + 30° = -240°$, $x_3 = - 90° - 30° = - 120°$, $x_4 = 270° - 30° = 240°$
$x_5 = 450° + 30° = 480°$
also Lösungsmenge L4 = {-240° ; -120° ; 120° ; 240° ; 480° }

16.4.4 Zusammenhang zwischen der Sinus- und der Kosinusfunktion

1) Die Sinuskurve ergibt sich durch Rechtsverschiebung der Kosinuskurve um $\frac{\pi}{2}$

2) Die Kosinuskurve ergibt sich durch Linksverschiebung der Sinuskurve um $\frac{\pi}{2}$

genauer:

1) Das Schaubild der Sinusfunktion ergibt sich aus dem Schaubild der Kosinusfunktion, indem man die Kosinuskurve um π/2 nach rechts verschiebt.

2) Das Schaubild der Kosinusfunktion ergibt sich aus dem Schaubild der Sinusfunktion, indem man die Sinuskurve um π/2 nach links verschiebt.

Frage:
Wie kann man dies formal ausdrücken ?

Aufgabe:
Welche der folgenden Aussagen gelten ?

a) $\cos x = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ falsch

b) $\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ falsch

c) $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ wahr

d) $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ wahr

e) $-\cos x = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ wahr (Zeichnen Sie dazu vorher die Kurve zu -cos(x))

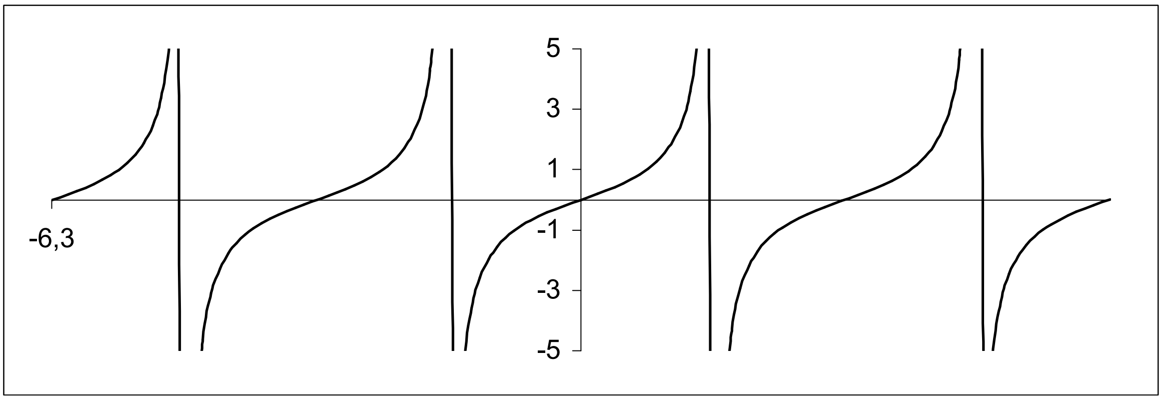
f) $-\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ wahr (Zeichnen Sie dazu vorher die Kurve zu -sin(x))

g) $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ wahr (Zeichnen Sie dazu in einem rechtwinkligen Dreieck die Winkel x und 90°- x ein)

h) $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ wahr (Zeichnen Sie dazu in einem rechtwinkligen Dreieck die Winkel x und 90°- x ein)

i) $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$ wahr
j) $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$ wahr

16.4.5 Die Tangensfunktion



Frage:
Wo kommt das Flächenstück, das durch die obige Tangenskurve und dem auf der x-Achse liegenden Intervall [0, π/2] begrenzt wird, nochmals auf der Tangenskurve vor ?

Antwort:
Auf der restlichen Tangenskurve.

Standard-Aufgabe:
1) Welche Eigenschaften hat die Tangensfunktion (Periode, Symmetrie, Asymptoten) ?
2) Versuchen Sie diese Eigenschaften als Formel anzugeben.

16.4.5.1 Satz (Eigenschaften der Tangenskurve)

1) Periode π:
formal: tan (x + π) = tan x

2) Punktsymmetrie bzgl. eines beliebigen Punktes S($n \cdot \frac{\pi}{2}$ | 0); n∈ Z:

formal: $\tan(n \cdot \frac{\pi}{2} + x) = -\tan(n \cdot \frac{\pi}{2} - x)$, n∈ Z

3) Die Geraden mit der Gleichung x = $(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$; n∈ Z
sind Asymptoten der Tangenskurve.

16.4.5.2 Standard-Aufgabe

Bem:
Benutzen Sie für diese Standard-Aufgabe eine Skizze der Tangenskurve.
Machen Sie die Probe !!

Für welche Winkel x zwischen -2π und 3π gilt:

a) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\tan x = -\sqrt{3}$

c) $\tan x = \sqrt{3}$

d) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lösung:
a) $x_1 = 30°$, $x_2 = -30° - 180° = -150°$, $x_3 = -150° - 180° = -330°$, $x_4 = 30° + 180° = 210°$,
$x_5 = 210° + 180° = 390°$
b) $x_1 = - 60°$, $x_2 = -60° - 180° = -240°$, $x_3 = -60° + 180° = 120°$, $x_4 = 120° + 180° = 300°$
$x_5 = 300° + 180° = 480°$
c) $x_1 = 60°$, $x_2 = 60° - 180° = -120°$, $x_3 = -120° - 180° = 300°$, $x_4 = 60° + 180° = 240°$.
$x_5 = 240° + 180° = 420°$
d) $x_1 = - 30°$, $x_2 = -30° - 180° = -210°$, $x_3 = -30° + 180° = 150°$, $x_4 = 150° + 180° = 330°$
$x_5 = 330° + 180° = 510°$

16.4.6 Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

$$f_1(x) = \sin x$$
$$f_1'(x) = \cos x$$

$$f_2(x) = \cos x$$
$$f_2'(x) = -\sin x$$

$$f_3(x) = \tan x$$
$$f_3'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

16.4.7 Kurvendiskussion der Sinuskurve im Bereich B = [0; 2π]

1) Ableitungen:

$f(x) = \sin(x)$ $\quad$ $f''(x) = -\sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$ $\quad$ $f'''(x) = -\cos(x)$

2) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$\cos(x_e) = 0 \iff$

$$x_{e1} = \frac{\pi}{2}$$

$$x_{e2} = \frac{3\pi}{2}$$

$f''(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(\frac{3\pi}{2}) = -\sin(\frac{3\pi}{2}) = 1 > 0$ ==> Tiefpunkt

$$y_{e1} = f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$y_{e2} = f(\frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$$

damit:

$H(\frac{\pi}{2} \mid 1)$ ist Hochpunkt ; $T(\frac{3\pi}{2} \mid -1)$ ist Tiefpunkt

3) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$-\sin(x_w) = 0 \iff \sin(x_w) = 0$

$x_{w1} = 0$

$x_{w2} = \pi$

$x_{w3} = 2\pi$

$f'''(0) = -\cos 0 = -1 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$f'''(\pi) = -\cos \pi = 1 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$f'''(2\pi) = -\cos(2\pi) = -1 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_{w1} = f(0) = \sin 0 = 0$

$y_{w2} = f(\pi) = \sin \pi = 0$

$y_{w3} = f(2\pi) = \sin(2\pi) = 0$

damit:

$W_1(0 \mid 0)$ ist Wendepunkt; $W_2(\pi \mid 0)$ ist Wendepunkt; $W_3(2\pi \mid 0)$ ist Wendepunkt.

16.4.8 Kurvendiskussion der Kosinuskurve im Bereich B = [0; 2π]

1) Ableitungen:

$f(x) = \cos(x)$ $\qquad f''(x) = -\cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$ $\qquad f'''(x) = \sin(x)$

2) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$-\sin(x_e) = 0 \Longleftrightarrow \sin(x_e) = 0$

$x_{e1} = 0$

$x_{e2} = \pi$

$x_{e3} = 2\pi$

$f''(0) = -\cos(0) = -1 < 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt

$f''(\pi) = -\cos(\pi) = 1 > 0 \Longrightarrow$ Tiefpunkt

$f''(2\pi) = -\cos(2\pi) = -1 < 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt

$y_{e1} = f(0) = \cos(0) = 1$

$y_{e2} = f(\pi) = \cos(\pi) = -1$

$y_{e3} = f(2\pi) = \cos(2\pi) = 1$

damit:

$H_1(0 \mid 1)$ ist Hochpunkt ; $T(\pi \mid -1)$ ist Tiefpunkt, $H_2(2\pi \mid 1)$ ist Hochpunkt

3) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$-\cos(x_w) = 0 \Longleftrightarrow \cos(x_w) = 0$

$$x_{W1} = \frac{\pi}{2}$$

$$x_{W2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$f'''(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Wendepunkt}$$

$$f'''(\frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Wendepunkt}$$

$$y_{W1} = f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$y_{W2} = f(\frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$$

damit:

$W_1(\frac{\pi}{2} \mid 0)$ ist Wendepunkt; $W_2(\frac{3\pi}{2} \mid 0)$ ist Wendepunkt

16.4.9 Standard-Aufgaben zur Flächenberechnung

1)
a) Berechnen Sie mathematisch:

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx$$

Können Sie den errechneten Wert auch anschaulich begründen ?

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse, dem Schaubild der Kosinusfunktion und den Geraden mit den Gleichungen x=0 und x=2π.
- durch Berechnen der negativen und positiven Flächeninhalte.
- durch Ausnutzen der Symmetrie

2)
a) Berechnen Sie mathematisch:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$$

Können Sie den errechneten Wert auch anschaulich begründen ?

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse, dem Schaubild der Sinusfunktion und den Geraden mit den Gleichungen x=0 und x=2π
- durch Berechnen der negativen und positiven Flächeninhalte.
- durch Ausnutzen der Symmetrie

Lösung:
1a)

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) = -\sin(0) = 0$$

Anschaulich: Bilanzierte Fläche ist 0, da Kosinuskurve bzgl. der Geraden x = π achsensymmetrisch ist.

1b)

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1$$

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x)dx = [\sin(x)]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \sin(3\pi/2) - \sin(\pi/2) = -1 - 1 = -2$$

$$I_3 = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x)dx = [\sin(x)]_{3\pi/2}^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(3\pi/2) = 0 - (-1) = 1$$

$A = | I_1 | + | I_2 | + | I_3 | = | 1 | + | -2 | + | 1 | = 4$

oder alternativ

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = 4 \cdot [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \left(\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) \right) = 4$$

2a)

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$

2b)

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

$$I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(\pi)) = -1 - 1 = -2$$

A = | I_1 | + | I_2 | = | 2 | + | -2 | + = 4

oder alternativ:

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = 4 \cdot [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \left(-\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0))\right) = 4 \cdot \left(-\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0)\right)$$

$$= 4 \cdot (0 + 1) = 4$$

Anschaulich: Bilanzierte Fläche ist aus Gründen der Symmetrie gleich 0.