1 Zitat

"Eine Wissenschaft ist erst dann als voll entwickelt anzusehen, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können."
Karl Marx, nach Paul Lafargue 'Persönliche Erinnerungen' In: Erinnerungen an Karl Marx. Berlin 1953. Seite 155.

2 Grundlagen

2.1 Motivation

Setzen Sie in die Formel $n^2 - n + 41$ für n die Zahlen 0, 1, 2, 3, usw.
Liefert die Formel lauter Primzahlen ?

Antwort:
Nein, z.B. liefert $n = 41$ keine Primzahl: $41^2 - 41 + 41 = 41^2$
41^2 ist aber keine Primzahl, da diese Zahl durch 41 teilbar ist.

2.2 Grundlagen des Aussagenlogik

2.2.1 Aussage

Ein sprachliches Gebilde heißt **Aussage**, wenn es entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

2.2.1.1 Beispiele

1) Kirchheim liegt an der Donau (f)
2) Hallo, wie geht es ? (keine Aussage)
3) $83 < 125$ (w)
4) $7 - 8$ (keine Aussage)
5) $x + 5$ (keine Aussage)

2.2.2 Aussageform

Ein sprachliches Gebilde heißt **Aussageform**, wenn es Variable (Leerstellen, Platzhalter) enthält und durch Einsetzung in eine Aussage übergeht. In Abhängigkeit von den Variablen schreibt man auch A(x) bzw. A(x,y), bzw. A(x,y,z) usw.

2.2.2.1 Beispiele

1) x liegt an der Donau.	Kurzschreibweise: A(x)
2) $3z = 21$	Kurzschreibweise: B(z)
3) $x + y > z$	Kurzschreibweise: C(x,y,z)
4) $a – b$	(keine Aussagenform)

2.2.3 Verneinung (Negation)

Die Verneinung einer Aussage wird durch das Zeichen $\neg$ realisiert.
Die Verneinung einer Aussage ist wahr, wenn die Aussage falsch ist.
Die Verneinung einer Aussage ist falsch, wenn die Aussage wahr ist.
Bem: Analoges gilt für die Aussageform

2.2.4 Und-Aussage (Konjunktion)

Eine Und-Aussage (Konjunktion), ist eine durch "und" verknüpfte zusammengesetzte Aussage (von Teilaussagen). Man schreibt statt "und": $\wedge$
Eine Und-Aussage ist wahr, wenn alle Teilausagen wahr sind, sonst falsch.
Bem: Analoges gilt für die Aussageform

2.2.5 Oder-Aussage (Disjunktion)

Eine Oder-Aussage (Disjunktion), ist eine durch "oder" verknüpfte zusammengesetzte Aussagen (von Teilaussagen). Man schreibt statt "oder": $\vee$
Eine Oder-Aussage ist falsch, wenn alle Teilaussagen falsch sind, sonst wahr.
D.h., wenn mindestens eine Teilaussage wahr ist, ist die Oder-Aussage wahr.
Bem: Analoges gilt für die Aussageform

2.2.5.1 Beispiele

1) Rom ist Hauptstadt von England (f)
2) $\neg$ (Rom ist Hauptstadt von England) (w)
3) Rom ist Hauptstadt von Italien oder England (sinnlos)
4) Rom ist Hauptstadt von Italien oder Rom ist Hauptstadt von England (w)
5) $1 + 1 = 3 \wedge 2 + 2 = 4$ (f)
6) $3 < 5 \wedge 5 < 3$ (f)
7) $1 + 1 = 3 \vee 2 + 2 = 4$ (w)
8) $3 < 5 \vee 5 < 3$ (w)

2.2.6 Wahrheitstafel

A	$\neg$ A
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	W	w
w	f	F	w
f	w	F	w
f	f	F	f

2.2.7 allgemeingültig

Eine Aussageform ist allgemeingültig und damit eine wahre Aussage, wenn bei der Einsetzung der Variablen immer wahre Aussagen entstehen.

Bemerkung:
Eine Zahl z ist durch t teilbar, wenn bei der Division durch t kein Rest entsteht. Man sagt statt "z ist durch t teilbar" auch "t teilt z" und schreibt dafür $t \mid z$
Es gilt zum Beispiel:
$5 \mid 20$, aber nicht $4 \mid 13$

2.2.7.1 Beispiele

1) x > 5 (nicht allgemeingültig)
2) (3 | z) $\vee$ $\neg$ (3 | z) (allgemeingültig)
3) (3 | z) $\wedge$ $\neg$ (3 | z) (nicht allgemeingültig)
4) $\neg$ ((3 | z) $\wedge$ $\neg$ (3 | z)) (allgemeingültig)
5) $\sqrt{x^2} = x$ (nicht allgemeingültig); wähle z.B. x = -3
6) $\sqrt{x^2} = x \vee \sqrt{x^2} = -x$ (allgemeingültig)

2.2.8 Die "Wenn-dann-Aussage" (Implikation)

Eine "Wenn-dann-Aussage" ist eine durch "wenn-dann" verknüpfte zusammengesetzte Aussage. Man schreibt statt "wenn-dann": $\rightarrow$
Eine Implikation ist nur dann falsch, wenn aus "etwas Wahrem etwas Falsches" folgt.
Bem: Analoges gilt für die Aussageform

2.2.8.1 Wahrheitstafel

A	B	A $\rightarrow$ B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Bemerkungen:
1) Wenn aus etwas Falschem etwas Wahres folgt, dann ist dies also wahr.
2) Um zu überprüfen, ob eine Aussage allgemeingültig ist, muss man also nur abprüfen, ob aus etwas Wahrem etwas Falsches folgen kann.

2.2.8.2 Beispiele

1) $x = y \rightarrow x^2 = y^2$
Ist diese Aussageform allgemeingültig ?
a) 1. Zeile der Wahrheitstafel:
$7 = 7 \rightarrow 7^2 = 7^2$ (w)

b) 2. Zeile der Wahrheitstafel:
Wenn x = y wahr ist, ist $x^2 = y^2$ auch immer wahr.
Deshalb kann man die 2. Zeile in der Wahrheitstafel nicht konstruieren.

c) 3. Zeile der Wahrheitstafel:
$7 = -7 \rightarrow 7^2 = (-7)^2$ (w)

d) 4. Zeile der Wahrheitstafel:
$7 = 9 \rightarrow 7^2 = 9^2$ (w)

2) x ist ein Rechteck $\rightarrow$ x ist ein Viereck

3) z ist teilbar durch 3 $\rightarrow$ z ist teilbar durch 6 (nicht allgemeingültig)
Begründung:
9 ist teilbar durch 3 $\rightarrow$ 9 ist teilbar durch 6 (f)
w f

4) z ist teilbar durch 6 $\rightarrow$ z ist teilbar durch 3 (allgemeingültig)

5) $x^2 = y^2 \rightarrow x = y$
a) 1. Zeile der Wahrheitstafel:
$7^2 = 7^2 \rightarrow 7 = 7$ (w)

b) 2. Zeile der Wahrheitstafel:
$(-7)^2 = 7^2 \rightarrow -7 = 7$ (f)
w f

b) 3. Zeile der Wahrheitstafel:
Wenn $x^2 = y^2$ falsch ist, ist $x = y$ auch immer falsch.
Deshalb kann man die 3. Zeile in der Wahrheitstafel nicht konstruieren.

c) 4. Zeile der Wahrheitstafel:
$8^2 = 7^2 \rightarrow 8 = 7$ (w)
f f
also ist diese Aussageform nicht allgemeingültig.

2.2.8.3 Sprechweise

Wenn gilt A $\rightarrow$ B, dann sagt man, A ist eine hinreichende Bedingung für B.

2.2.9 Die "Genau-dann-wenn-Aussage" (Äquivalenz)

Eine "Genau-dann-wenn-Aussage" ist eine durch "genau-dann-wenn" verknüpfte zusammengesetzte Aussage. Man schreibt statt "genau-dann-wenn": $\leftrightarrow$
Eine Äquivalenz ist eine Implikation, die in alle zwei Richtungen geht, d.h. die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ ist gleichbedeutend mit $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
Deshalb ergibt sich die folgende Wahrheitstafel:

2.2.9.1 Wahrheitstafel

A	B	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

Bemerkungen:
Wenn aus einer wahren Aussage A eine wahre Aussage B folgt und wenn aus einer wahren Aussage B eine wahre Aussage A folgt, dann ist die Äquivalenz wahr.

2.2.9.2 Beispiele

1) $x = y \leftrightarrow x^2 = y^2$
Nein !
Begründung:
$7 = -7 \leftrightarrow 7^2 = (-7)^2$
f w

2) $6 \mid z \leftrightarrow 2 \mid z \wedge 3 \mid z$
Ist diese Aussageform allgemeingültig ?
a) wähle $z = 12$
$6 \mid 12 \leftrightarrow 2 \mid 12 \wedge 3 \mid 12$

"Viele" Beispiele lassen vermuten, das diese Aussageform allgemeingültig ist.

3) $x^2 = y^2 \leftrightarrow x = y \vee x = -y$
allgemeingültig

4) $x = y \leftrightarrow x + 10 = y + 10$
allgemeingültig

5) A, B sind Aussagen. Dann ist folgende Formel allgemeingültig:
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

2.2.10 Priorität

Wie bei den mathematischen Operatoren, gibt es auch in der Logik sogenannte Prioritäten.
Die Multiplikation "·" bindet z.B. stärker als die Addition "+" ("Punkt vor Strich).
Die Priorität in der Logik (in absteigender Reihenfolge):

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

Beispiel:
$A \wedge B \vee C \leftrightarrow X \rightarrow Y$
ist eine abkürzende Darstellung von:
$((A \wedge B) \vee C) \leftrightarrow (X \rightarrow Y)$

2.2.11 Schlussweisen

2.2.11.1 Beispiele

1) Kann man aus der folgenden Aussage in der Schulordnung:
s befindet sich innerhalb des Schulgeländes →
es ist s verboten illegale Drogen zu konsumieren

Kann man von dieser Aussage auf folgende Aussage schließen ?
s befindet sich nicht innerhalb des Schulgeländes →
es ist s nicht verboten illegale Drogen zu konsumieren

2) Kann man von der Aussage
$6 \mid z \rightarrow 3 \mid z$
auf folgende Aussage schließen:
$\neg (6 \mid z) \rightarrow \neg (3 \mid z)$

Nein, Begründung:
$\underbrace{\neg (6 \mid 9)}_{w} \rightarrow \underbrace{\neg (3 \mid 9)}_{f}$

Damit ergibt sich kurz:

2.2.11.2 Satz

$A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$ falsche Schlussweise

2.2.11.3 Beispiele

Kann man von der Aussage
$(6 \mid z) \rightarrow (3 \mid z)$
auf folgende Aussage schliessen:
$\neg (3 \mid z) \rightarrow \neg (6 \mid z)$

Ja (es lässt sich kein Gegenbeispiel finden):

Damit ergibt sich kurz:

2.2.11.4 Satz

$A \rightarrow B \Rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$ richtige Schlussweise

2.2.11.5 Sprechweise

Wenn gilt $A \rightarrow B$, dann sagt man, B ist eine notwendige Bedingung für A.
Wenn nämlich B nicht gelten würde, dann gilt auch nicht A.

Beispiel:
$6 \mid z$ ist eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für $3 \mid z$.
$3 \mid z$ ist eine notwendige, aber keine notwendige Bedingung für $6 \mid z$.

2.2.12 Programmieraufgabe

1) Schreiben Sie ein Programm, das von zwei über Tastatur eingegebenen Wahrheitswerten den Wahrheitswert der Oder-Aussage und der Und-Aussage berechnet und ausgibt.

2) Schreiben Sie ein Programm, das von den über Tastatur eingegebenen Wahrheitswerten der Aussagen A und B den Wahrheitswert der folgenden Aussagen berechnet:
a) $\neg (A \wedge B)$
b) $\neg A \vee \neg B$
c) $\neg (A \vee B)$
d) $\neg A \wedge \neg B$

2.3 Grundlagen der Mengenlehre

2.3.1 Definition

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen.

praktisch:
Eine **Menge** ist gegeben, wenn man weiß aus welchen Elementen sie besteht.

2.3.2 Mengendarstellungen

2.3.2.1 Aufzählende Form

U = {1; 3; 5; 9 }
|**N** = {0; 1; 2; 3; 4; 5; ...}

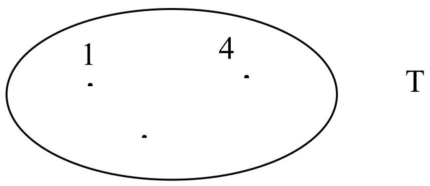
Beispiele:
1) $7 \notin U$
2) $678 \in$ |N

Bemerkungen:
1)
$\in$ bedeutet "Element von"
$\notin$ bedeutet "nicht Element von"

2)
|**R** = Menge der reellen Zahlen = Menge aller "Kommazahlen" (periodisch und aperiodisch), wie z.B:
$\pi = 3{,}1415...$ (aperiodisch)
$\frac{4}{3} = 1{,}333333...$ (periodisch)
$10 = 10{,}0000...$ (periodisch)

|**N** = Menge der natürlichen Zahlen, einschließlich der 0 =
{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4, ...}

2.3.2.2 Venn-Diagrammme



2.3.2.3 Beschreibende Form

Bei dieser Form der Beschreibung werden aus einer gegebenen Menge, die Grundmenge genannt wird, diejenigen Elemente ausgewählt, die aus einer bestimmten Aussageform (durch Einsetzung) eine **wahre** Aussage machen.

2.3.2.3.1 Bemerkungen zu einigen mathematischen Notationen

$x \leq 17$ ist eine mathematische Kurzschreibweise für: $x < 17 \;\vee\; x = 17$
$15 \leq x < 19$ ist eine mathematische Kurzschreibweise für: $15 \leq x \;\wedge\; x < 19$

2.3.2.3.2 Beispiele

1)
$T = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 7\}$
bedeutet:
Die Menge aller x aus einer Grundmenge, für die die Aussageform $x > 7$ zu einer wahren Aussage wird. Also ist:
$T = \{8; 9; 10; 11; ...\}$

2)
S = {x ∈ Menge aller Schüler der Klasse 2BKI1 | x spielt Fußball}

2.3.2.4 Beispiele

1) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 10\} = \{6; 7; 8; 9\}$
also:
$7 \in C$
$123 \notin C$

2) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ist gerade und $x <= 7\} = \{0; 2; 4; 6\}$

2.3.3 Definition

Die **leere Menge** ist die Menge, die kein Element enthält.
Bezeichnung:
$\emptyset$ oder $\{\}$

2.3.3.1 Beispiele

$X = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7 \wedge x > 7\} = \{\} = \emptyset$
Y = Menge aller rechteckigen Kreise = $\emptyset$
M = Menge aller Schüler des BKI1, die mehr als 27 Stunden am Tag arbeiten = $\emptyset$

2.3.4 Beziehungen zwischen Mengen

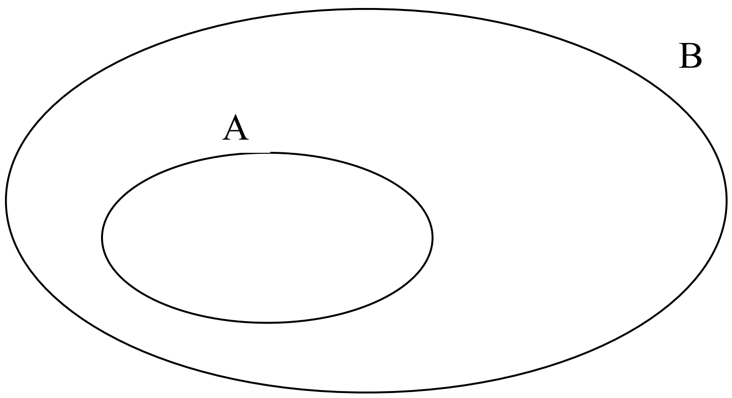
2.3.4.1 Definition

Enthalten zwei Mengen A und B dieselben Elemente, so sind sie gleich.
Man schreibt: $A = B$

2.3.4.2 Definition

Sind alle Elemente einer Menge A zugleich Elemente einer Menge B, so nennt man A eine **Teilmenge** von B. Man schreibt: $A \subset B$
formale Schreibweise:
$A \subset B$ genau dann wenn $x \in A \rightarrow x \in B$

2.3.4.2.1 Veranschaulichung durch ein Venn-Diagramm



2.3.4.2.2 Beispiele

1) $A = \{3; 5\}$
$F = \{10; 3; 5\}$
$A \subset F$

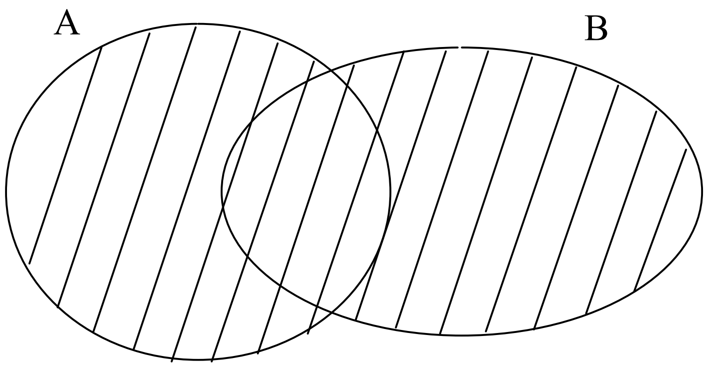
2) $Z = \{2; 5; 9\}$
$Z \subset \mathbb{N}$

2.3.5 Verknüpfungen von Mengen

2.3.5.1 Definition

Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist die Menge jener Elemente, die zu A oder B gehören.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

2.3.5.1.1 Veranschaulichung durch ein Venn-Diagramm



Die Menge $A \cup B$ entspricht der schraffierten Fläche

2.3.5.1.2 Beispiele

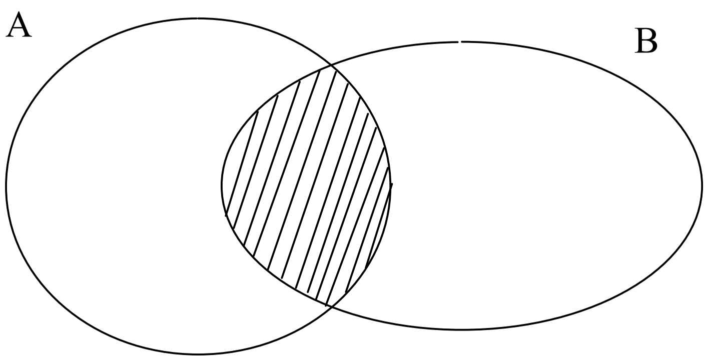
1) $G = \{1; 2; 3\}$
$H = \{6; 2; 8\}$
$G \cup H = \{1; 2; 3; 6; 8\}$

2) $A = \{x \in |N \mid x < 70\}$
$B = \{x \in |N \mid x >= 70\}$
$A \cup B = \{x \in |N \mid x < 70 \vee x >= 70\} = |N$

2.3.5.2 Definition

Der **Durchschnitt** (Schnittmenge) zweier Mengen A und B ist die Menge jener Elemente, die zu A und zugleich zu B gehören.
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

2.3.5.2.1 Veranschaulichung durch ein Venn-Diagramm



Die Menge $A \cap B$ entspricht der schraffierten Fläche

2.3.5.2.2 Beispiele

1) $K = \{4; 6; 9\}$
$L = \{3; 6; 9\}$
$K \cap L = \{6; 9\}$

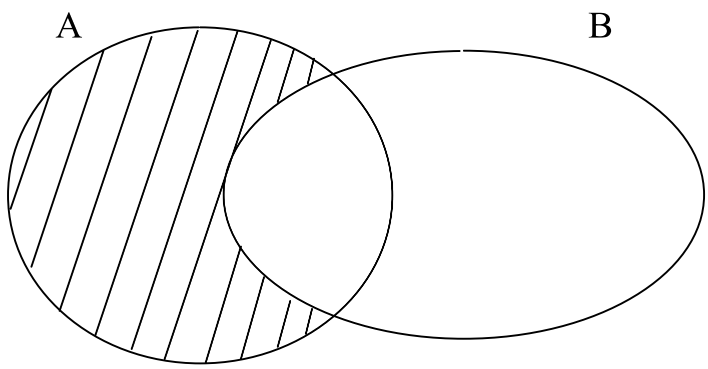
2) $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 79\}$
$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x >= 87\}$
$K \cap L = \{\}$

3) Die Menge aller Raucher $\cap$ Menge aller Nichtraucher = {}

2.3.5.3 Definition

Die **Differenzmenge** A \ B der Mengen A und B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

2.3.5.3.1 Veranschaulichung durch ein Venn-Diagramm



Die Menge A \ B entspricht der schraffierten Fläche

2.3.5.3.2 Beispiele

1) $M = \{1; 2; 3 ;4; 5; 6\}$
$P = \{2; 4; 8; 16\}$
$M \setminus P = \{1; 3; 5; 6\}$

2) $Q = \{1; 2; 3; 4\}$
$R = \{5; 6; 7; 8\}$
$Q \setminus R = \{1; 2; 3; 4\}$

3) Die Klasse K wird in die 2 Gruppen A und B unterteilt.
Wie kann man dies mengentheoretisch beschreiben ?
$K = A \cup B$
$A \cap B = \emptyset$
$K \setminus A = B$
$K \setminus B = A$
$A \setminus K = \emptyset$
$B \setminus K = \emptyset$
$A \subset K$
$B \subset K$

2.3.6 Programmieraufgabe

1) Schreiben Sie ein Programm das von 2 Mengen folgendes berechnet:
a) den Durchschnitt
b) die Vereinigung
c) die Differenz

2) Schreiben Sie ein Programm das von 2 Mengen A und B angibt, welche der 3 folgenden Behauptungen richtig ist:
$A \subset B$
$B \subset A$
nicht ($A \subset B$) und nicht ($B \subset A$)

2.4 Terme und Gleichungen

2.4.1 Definition

Ein **Term** ist
a) entweder eine Zahl oder
b) ein Gebilde, das aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen besteht und das in eine Zahl übergeht, wenn man für die Variablen Zahlen einsetzt.

2.4.1.1 Beispiele

1) 34
2) $x + 5$
3) $x + x = 8$ (kein Term)
4) $(e + f)^2 - 7$
5) $a + \cdot\, b//7-$ (kein Term)
6) $x + y = 5$ (kein Term)

2.4.2 Definition

Zwei durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbundene Terme sind eine Gleichung.

2.4.2.1 Beispiele

1) $10 - 5 = 2 + 3$
2) $a + b = b + a$
3) $2x - 3 = 1$
4) $x^2 - 6x + 27 = 0$

Frage:
Welche Eigenschaften haben diese Gleichungen ?

Antwort:
Sie sind entweder Aussagen oder Aussageformen.

2.4.3 Satz

Gleichungen sind entweder Aussagen oder Aussageformen, die mit Hilfe der Gleichheitsrelation = gebildet werden.

2.4.4 Definition

Die **Grundmenge** G einer Gleichung ist die Menge, die zunächst zum Ersetzen der Variablen in der Gleichung vorgesehen ist.

2.4.4.1 Beispiele

1)

$$\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-2} = \frac{3x}{x-3}$$

G = |R

2.4.5 Definition

Die **Definitionsmenge** einer Gleichung bzgl. der Grundmenge G ist die Menge aller Zahlen (aus der Grundmenge G) für die beim Einsetzen (in die Variablen) in die Gleichung Aussagen entstehen.

2.4.5.1 Beispiele

1)

$$\frac{5}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-2} = \frac{3x}{x-3}$$

G = |R
D = |R \ {1; 2; 3; 0}

2)

$$\frac{x}{0} = 123$$

G = |R
D = {}

2.4.6 Definition

Die **Lösungsmenge** L einer Gleichung bzgl. der Grundmenge G ist die Menge aller Zahlen (aus der Definitionsmenge D), für die die Einsetzungen (in die Variablen) in die Gleichung **wahre** Aussagen ergeben.
Eine Gleichung lösen bedeutet, die Lösungsmenge L einer Gleichung zu bestimmen.

2.4.6.1 Beispiele

1) $x + 6 = 10$
G = |R
D = |R
L = {4}

2) $x = 4$
G = |R
D = |R
L = {4}

3) $x + x = 2x$
G = |R
D = |R
L = |R

4)
$$\frac{7x}{10} - \frac{2}{5} = \frac{x}{2}$$
G = |R
D = |R
|L = ?

2.4.7 Methode zur Bestimmung der Lösungsmenge einer Gleichung

Bei einfachen Gleichungen, wie in den Beispielen 1), 2), 3) kann man die Lösungen unmittelbar angeben.
Bei einer komplizierteren Gleichungen, wie im Beispiel 4) muss diese so lange "umgeformt" werden, bis die Lösungsmenge unmittelbar abgelesen werden kann.

Frage:
Welche Eigenschaften muss so eine "Umformung" besitzen ?

Antwort:
Bei einer "Umformung" darf die Lösungsmenge der umzuformenden Gleichung nicht verändert werden. D.h. die Lösungsmenge der umzuformenden Gleichung und die Lösungsmenge der umgeformten Gleichung müssen dieselbe (gleich) sein.
Die Lösungsmenge darf sich also bei einer "Umformung" nicht verändern.

2.4.7.1 Definition

Wenn bei einer Umformung die umzuformende Gleichung und die umgeformte Gleichung dieselbe Lösungsmenge haben, dann heißt diese Umformung eine Äquivalenzumformung.
Eine Äquivalenzumformung wird durch den Doppelpfeil <===> abgekürzt.

2.4.7.2 Regeln für Äquivalenzumformungen

Wenn man folgende Regeln einhält, erhält man jeweils eine Äquivalenzumformungen:
(A1) Addieren bzw. Subtrahieren desselben Terms auf jeder Seite einer Gleichung.
(A2) Multiplizieren bzw. Dividieren desselben Terms $\neq 0$ auf jeder Seite einer Gleichung.
(A3) Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung.

2.4.7.2.1 Beispiele

$3x + 5 = 26$
G = |R
D = |R
$3x + 5 = 26$
$\Longleftrightarrow$ $3x + 5 - 5 = 26 - 5$
$\Longleftrightarrow$ $3x = 21$
$\Longleftrightarrow$ $3x / 3 = 21 / 3$
$\Longleftrightarrow$ $x = 7$
Die Lösungsmenge (dies ist leicht ablesbar) der Gleichung $x = 7$ ist $L = \{7\}$

Wichtiger logischer Schluss:
Da alle Umformungen **Äquivalenzumformungen** sind, ist die Lösungsmenge der Gleichung $3x + 5 = 26$ **auch** $L = \{7\}$

2.4.8 Definition

Eine Gleichung heißt **allgemeingültig**, wenn alle Einsetzungen (aus der Definitionsmenge D) wahre Aussagen ergeben.

2.4.8.1 Beispiele allgemeingültiger Gleichungen (G = |R, D = |R)

2.4.8.1.1 Kommutativgesetz (KG)

$a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$

2.4.8.1.2 Assoziativgesetz (AG)

$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2.4.8.1.3 Distributivgesetz (DG)

$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$
$(b + c) : a = b :\cdot a + c : a$ oder anders formuliert:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Daraus folgt:
$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

2.4.9 Programmieraufgabe

Schreiben Sie ein Programm (Rechentrainer), das Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert, wobei mindestens eine der Zahlen ein Bruch sein muss.
Das Programm muss also mit Brüchen (nicht Dezimalzahlen) arbeiten können (das Ergebnis darf nicht als Dezimalzahl, sondern muß als Bruch ausgegeben werden (außer es ist eine ganze Zahl).

2.4.10 Programmieraufgabe

Schreiben Sie ein Programm, das die Lösungsmenge der Gleichung:
$a\,x = b$ (a, b sind beliebige reelle Zahlen)
ermittelt und auf dem Bildschirm ausgibt.

3 Das Gauss-Verfahren zur Lösung von LGS

3.1 Motivierende Aufgabe

Ein Bauer will für genau 100 Euro Pferde, Kühe und Henne kaufen (kein Rückgeld). Eine Henne kostet 0,25Euro, eine Kuh 1 Euro und ein Pferd 15 Euro. Da er nur einen kleinen Bauernhof besitzt, muss die Anzahl der Pferde, Kühe und Hennen zusammen 100 ergeben. Der Bauer muss außerdem von jeder Tierart mindestens ein Tier kaufen.

3.2 Einfaches Beispiel

Frage:
Warum ist die Bestimmung der Lösung des folgenden LGS besonders einfach ?

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 10 \\
0 \cdot x_1 & + & x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 20 \\
0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 30
\end{array}
$$

Antwort:
Weil die Lösung praktisch schon da steht !
D.h. unser Ziel ist es in jeder Spalte die entsprechenden Nullen zu produzieren.

3.3 Beispiel

Gleichungssystem	Als Matrix						
	x_1	x_2	x_3	b	Op	KS	
$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 22$	6	2	4	22	G1	34	←
$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$	2	1	-1	1	G2	3	
$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5$	3	2	-4	-5	G3	-4	
$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 22$	6	2	4	22	G4=G1	34	
$-x_2 + 7x_3 = 19$	0	-1	7	19	G5=-3G2+G1	25	←
$-2x_2 + 12x_3 = 32$	0	-2	12	32	G6=-2G3+G1	42	
$6x_1 \quad 18x_3 = 60$	6	0	18	60	G7=2G5+G4	84	
$-x_2 + 7x_3 = 19$	0	-1	7	19	G8=G5	25	
$-2x_3 = -6$	0	0	-2	-6	G9=-2G5+G6	-8	←
$6x_1 = 6$	6	0	0	6	G10=9G9+G7	12	
$-2x_2 = -4$	0	-2	0	-4	G11=2G8+7G9	-6	
$-2x_3 = -6$	0	0	-2	-6	G12=G9	-8	
$x_1 = 1$	1	0	0	1	G13=G10/6	2	
$x_2 = 2$	0	1	0	2	G14=G11/-2	3	
$x_3 = 3$	0	0	1	3	G15=G12/-2	4	

$L = \{(1;\ 2;\ 3)\}$

Bemerkung:
Die sogenannten Leitzeilen (Begriff wird gleich erklärt) sind in diesem Beispiel grau schraffiert bzw. durch einen Pfeil gekennzeichnet.

3.3.1 Vorgehensweise

1) Die 1. Gleichung G1 wird als sogenannte Leitzeile gewählt, d.h. sie wird mit den restlichen Gleichungen (d.h. G2 und G3) durch Additionsverfahren so "kombiniert", dass sich in der 1. Spalte (außerhalb der Leitzeile) nur Nullen befinden.

2) Dann wird die 2. Gleichung G5 als Leitzeile gewählt, d.h. sie wird mit den restlichen Gleichungen (d.h. G4 und G6) durch Additionsverfahren so "kombiniert", dass sich in der 2. Spalte (außerhalb der Leitzeile) nur Nullen befinden.

3) Dann wird die 3. Gleichung G9 als Leitzeile gewählt, d.h. sie wird mit den restlichen Gleichungen (d.h. G8 und G7) durch Additionsverfahren so "kombiniert", dass sich in der 3. Spalte (außerhalb der Leitzeile) nur Nullen befinden.

4) In der letzten Spalte wird die Kontrollsumme (KS) gebildet (Zeilensumme).

$-2x_2 +12x_3 = 32$	0	-2	12	32	G6=-2G3+G1	$\boxed{42}$

Beispiel:
In der Zeile G6 = -2G3 +G1 ist die Kontrollsumme = 0 +-2 + 12 + 32 = 42.
Die Zahl 42 muß sich aber gleichzeitig als -2 KS(G3) + KS(G1) =
-2 KS(-4) + KS(34) = -42 sein.
Ist dies nicht der Fall, dann wurde ein Rechenfehler gemacht.

Das Ziel ist es, zuerst in jeder Spalte die entsprechenden Nullen zu produzieren, um dann die Lösungsmenge einfach ablesen zu können.

In Zukunft werden wir diesen sogenannten Gausschen Algorithmus immer benutzen, um ein LGS zu lösen.
Dabei wird nur die Matrixschreibweise benutzt, d.h. man verzichtet in jeder Zeile darauf, die Variablen aufzuführen.

3.3.2 Satz

Jedes LGS läßt sich mit den folgenden Äquivalenzumformungen auf die **diagonale Stufenform** bringen:
1) Gleichungen miteinander vertauschen.
2) Eine Gleichung mit einer Zahl ($c \neq 0$) multiplizieren.
3) Eine Gleichung durch die Summe eines Vielfachen ($c \neq 0$) von ihr und einem Vielfachen einer anderen Gleichung ersetzen. (Bekannt vom Additionsverfahren !!!)

3.3.3 Weitere Beispiele

3.3.3.1 Beispiel

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
2	-4	5	3	G1	6
3	3	7	13	G2	26
4	-2	-3	-1	G3	-2
2	-4	5	3	G4=G1	6
0	18	-1	17	G5=-3*G1+2*G2	34
0	6	-13	-7	G6=-2*G1+G3	-14
18	0	43	61	G7=9G4+2G5	122
0	18	-1	17	G8=G5	34
0	0	38	38	G9=G5-3G6	76
-684	0	0	-684	G10=-38G7+43G9	-1368
0	684	0	684	G11=G9+38G8	1368
0	0	38	38	G12=G9	76
1	0	0	1	G13=G10/-684	2
0	1	0	1	G14=G11/684	2
0	0	1	1	G15=G12/38	2

L = {(1;1;1)}

3.3.3.2 Beispiel

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
-1	7	-1	5	G1	10
4	-1	1	1	G2	5
5	-3	1	-1	G3	2
-1	7	-1	5	G4=G1	10
0	27	-3	21	G5=4*G1+G2	45
0	32	-4	24	G6=5*G1+G3	52
27	0	6	12	G7=-27G4+7G5	45
0	27	-3	21	G8=G5	45
0	0	-12	-24	G9=-32G5+27G6	-36
54	0	0	0	G10=2G7+G9	54
0	-108	0	-108	G11=-4G8+G9	-216
0	0	-12	-24	G12=G9	-36
1	0	0	0	G13=G10/54	1
0	1	0	1	G14=G11/-108	2
0	0	1	2	G15=G12/-12	3

L = {(0;1;2)}

3.3.3.3 Beispiel

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
2	1	1	6	G1	10
1	-2	1	0	G2	0
2	-1	2	6	G3	9
2	1	1	6	G4=G1	10
0	5	-1	6	G5=G1-2G2	10
0	2	-1	0	G6=G1-G3	1
-10	0	-6	-24	G7=-5G4+G5	-40
0	5	-1	6	G8=G5	10
0	0	-3	-12	G9=-2G5+5G6	-15
-10	0	0	0	G10=-2G9+G7	-10
0	-15	0	-30	G11=-3G8+G9	-45
0	0	-3	-12	G12=G9	-15
1	0	0	0	G13=G10/-10	1
0	1	0	2	G14=G11/-15	3
0	0	1	4	G15=G12/-3	5

L = {(0;2;4)}

3.3.3.4 Beispiel

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Op	KS
1	2	3	-2	-2	G1	2
2	-1	1	-1	-3	G2	-2
0	3	-2	1	0	G3	2
-1	1	1	0	2	G4	3
1	2	3	-2	-2	G5=G1	2
0	-5	-5	3	1	G6=-2G1+G2	-6
0	3	-2	1	0	G7=0G1+G3	2
0	3	4	-2	0	G8=G1+G4	5
5	0	5	-4	-8	G9=2G6+5G5	-2
0	-5	-5	3	1	G10=G6	-6
0	0	-25	14	3	G11=3G6+5G7	-8
0	0	5	-1	3	G12=3G6+5G8	7
25	0	0	-6	-37	G13=G11+5G9	-18
0	25	0	-1	-2	G14=G11-5G10	22
0	0	-25	14	3	G15=G11	-8
0	0	0	9	18	G16=G11+5G12	27
75	0	0	0	-75	G17=2G16+3G13	0
0	225	0	0	0	G18=G16+9G14	225
0	0	225	0	225	G19=14G16-9G15	450
0	0	0	9	18	G20=G16	27
1	0	0	0	-1	G21=G17/75	0
0	1	0	0	0	G22=G18/225	1
0	0	1	0	1	G23=G19/225	2
0	0	0	1	2	G24=G20/9	3

L = {(-1; 0; 1; 2)}

ARBEITSBLATT

X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Op	KS
1	2	1	-1	2	9	G1	14
-1	-1	1	2	-1	-5	G2	-5
2	1	-2	-1	1	2	G3	3
1	-3	-2	-1	2	8	G4	5
3	1	-1	1	1	1	G5	6
						G6	
						G7	
						G8	
						G9	
						G10	
						G11	
						G12	
						G13	
						G14	
						G15	
						G16	
						G17	
						G18	
						G19	
						G20	
						G21	
						G22	
						G23	
						G24	
						G25	
						G26	
						G27	
						G28	
						G29	
						G30	
						G31	
						G32	
						G33	
						G34	
						G35	

Lösung:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Op	KS
1	2	1	-1	2	9	G1	14
-1	-1	1	2	-1	-5	G2	-5
2	1	-2	-1	1	2	G3	3
1	-3	-2	-1	2	8	G4	5
3	1	-1	1	1	1	G5	6
1	2	1	-1	2	9	G6=G1	14
0	1	2	1	1	4	G7=G1+G2	9
0	-3	-4	1	-3	-16	G8=-2*G1+G3	-25
0	-5	-3	0	0	-1	G9=-G1+G4	-9
0	-5	-4	4	-5	-26	G10=-3*G1+G5	-36
1	0	-3	-3	0	1	G11=-2G7+G6	-4
0	1	2	1	1	4	G12=G7	9
0	0	2	4	0	-4	G13=3G7+G8	2
0	0	7	5	5	19	G14=5G7+G9	36
0	0	6	9	0	-6	G15=5G7+G10	9
2	0	0	6	0	-10	G16=2G11+3G13	-2
0	-1	0	3	-1	-8	G17=-G12+G13	-7
0	0	2	4	0	-4	G18=G13	2
0	0	0	18	-10	-66	G19=7G13-2G14	-58
0	0	0	-3	0	6	G20=-3G13+G15	3
-6	0	0	0	-10	-36	G21=-3G16+G19	-52
0	6	0	0	-4	-18	G22=-6G17+G19	-16
0	0	-18	0	-20	-96	G23=-9G18+2G19	-134
0	0	0	18	-10	-66	G24=G19	-58
0	0	0	0	-10	-30	G25=6G20+G19	-40
6	0	0	0	0	6	G26=-G21+G25	12
0	-60	0	0	0	60	G27=-10G22+4G25	0
0	0	-18	0	0	-36	G28=G23-2G25	-54
0	0	0	-18	0	36	G29=-G24+G25	18
0	0	0	0	-10	-30	G30=G25	-40
1	0	0	0	0	1	G31=G26/6	2
0	1	0	0	0	-1	G32=G27/-60	0
0	0	1	0	0	2	G33=G28/-36	3
0	0	0	1	0	-2	G34=G29/-18	-1
0	0	0	0	1	3	G35=G30/-10	4

L = {(1; -1; 2; -2; 3)}

ARBEITSBLATT

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Op	KS
5	2	-8	-2	0	G1	-3
4	-4	3	1	9	G2	13
-2	1	1	1	0	G3	1
2	2	-3	1	5	G4	7
5	2	-8	-2	0	G5=G3	-3
0	-2	5	3	9	G6=2*G3+G2	15
0	3	-2	2	5	G7=G3+G4	8
0	-8	9	-1	-1	G8=-2*G4+G2	1
5	2	-8	-2	0	G9=G5	-3
0	-2	5	3	9	G10=G6	15
0	0	11	13	37	G11=3*G6+2*G7	61
0	0	-11	-13	-37	G12=-4*G6+G8	-61
5	2	-8	-2	0	G13=G9	-3
0	-2	5	3	9	G14=G10	15
0	0	11	13	37	G15=G11	61
0	0	0	0		G16=G11+G12	0
1	2/5	-8/5	-2/5	0	G17=G13/5	-3/5
0	1	-5/2	-3/2	-9/2	G18=G14/-2	-15/2
0	0	1	13/11	37/11	G19=G15/11	61/11

1) Sind die Umformungen des linearen Gleichungssystems (kurz. LGS), bestehend aus (G1) ... (G4) in das LGS (G17) ... (G19) Umformungen nach dem Gausschen Algorithmus ? Begründen Sie.

2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS (G1) ... (G4).

3) Geben Sie ein paar Lösungen von (G17) ... (G19) an.

4) Geben Sie die Lösungsmenge von (G17) ... (G19) an.

Lösung:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Op	KS
5	2	-8	-2	0	G1	-3
4	-4	3	1	9	G2	13
-2	1	1	1	0	G3	1
2	2	-3	1	5	G4	7
!! Keine Äquivalenzumformung mehr !!						
5	2	-8	-2	0	G5=G3	-3
0	-2	5	3	9	G6=2*G3+G2	15
0	3	-2	2	5	G7=G3+G4	8
0	-8	9	-1	-1	G8=-2*G4+G2	1
5	2	-8	-2	0	G9=G5	-3
0	-2	5	3	9	G10=G6	15
0	0	11	13	37	G11=3*G6+2*G7	61
0	0	-11	-13	-37	G12=-4*G6+G8	-61
5	2	-8	-2	0	G13=G9	-3
0	-2	5	3	9	G14=G10	15
0	0	11	13	37	G15=G11	61
0	0	0	0		G16=G11+G12	0

Lösungsmenge des nicht umgeformten LGS:
$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$

Einige Elemente der Lösungsmenge des umgeformten LGS:
$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$
$x_1 = 42/11,\ x_2 = 43/11,\ x_3 = 37/11,\ x_4 = 0$
...

Bemerkung: (Tabelle weiter umgeformt)

...						
1	0	0	10/11	42/11		
0	1	0	16/11	43/11		
0	0	1	13/11	37/11		

3.3.3.5 Tipps zur Herstellung eigener Übungsaufgaben

Geben Sie selbst die Lösung z.B. eines LGS mit 3 Unbekannten und 3 Gleichungen vor.

3.3.3.5.1 Beispiel (LGS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten)

1. Schritt:
a) Man gibt die Lösungen vor, z.B: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$
b) Man gibt die Koeffizienten jeder Gleichung vor, z.B:

5	7	-2
4	-2	3
3	4	-4

also:

$$5 \cdot \mathbf{1} + 7 \cdot \mathbf{2} - 2 \cdot \mathbf{3}$$
$$4 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{2} + 3 \cdot \mathbf{3}$$
$$3 \cdot \mathbf{1} + 4 \cdot \mathbf{2} - 4 \cdot \mathbf{3}$$

2. Schritt:
Nun berechnet man die Ergebnisse der jeweiligen Zeile

$$5 \cdot \mathbf{1} + 7 \cdot \mathbf{2} - 2 \cdot \mathbf{3} = 13$$
$$4 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{2} + 3 \cdot \mathbf{3} = 9$$
$$3 \cdot \mathbf{1} + 4 \cdot \mathbf{2} - 4 \cdot \mathbf{3} = -1$$

3. Schritt:
Daraus ergibt sich dann die folgenden Aufgabe:

$$5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 13$$
$$4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 9$$
$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = -1$$

4. Schritt:
Nun löst man die Aufgabe, deren Lösung man kennt !

3.3.3.6 Beispiel (Besonderheit: Nullzeile weglassen)

x_1	X_2	b	Op	KS
2	1	4	G1	7
-1	3	5	G2	7
-1	10	19	G3	28
-2	-1	-4	G4	-7
2	1	4	G5=G1	7
0	7	14	G6=G1+2*G2	21
0	21	42	G7=G1+2*G3	63
0	0	0	G8=G1+G4	0
2	1	4	G9=G5	7
0	7	14	G10=G6	21
0	21	42	G11=G7	63
Nullzeile wird weggelassen				
-14	0	-14	G12=G10-7*G9	-28
0	7	14	G13=G10	21
0	0	0	G14=-3*G10+G11	0
-14	0	-14	G15=G12	-28
0	7	14	G16=G13	21
Nullzeile wird weggelassen				
1	0	1	G17=G15/-14	2
0	1	2	G18=G16/7	3

L = {(1; 2)}

Bemerkung:
Die sogenannte Nullzeile darf weggelassen werden, da sie als Informationen die folgende Binsenweisheit enthält:
$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$

3.3.3.7 Beispiel (Besonderheit: Lösungsmenge ist leere Menge)

Besonderheit:
Das letzte Beispiel unterscheidet sich vom folgenden nur dadurch, dass in der Zeile G4 statt -4 die Zahl 10 steht.

x_1	X_2	b	Op	KS
2	1	4	G1	7
-1	3	5	G2	7
-1	10	19	G3	28
-2	-1	**10**	G4	7
2	1	4	G5=G1	7
0	7	14	G6=G1+2*G2	21
0	21	42	G7=G1+2*G3	63
0	**0**	**14**	G8=G1+G4	14

L = ∅

Bemerkung:
Wenn in einer Zeile lauter Nullen und ganz rechts eine Zahl $c \neq 0$ steht, dann hat das LGS als Lösung die leere Menge:
$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = c$

3.4 Nichtdiagonale Stufenform

3.4.1 Beispiel

x_1	x_2	x_3	b
0	1	0	5
0	0	1	6
1	0	0	7

Fragen:
1) Kann diese LGS ohne Vertauschung der Zeilen auf die diagonale Stufenform gebracht werden ?
Antwort:
Nein, da die 1. Spalte in der 1. Zeile aus einer 0 besteht.

2) Kann trotzdem die Lösungsmenge angegeben (abgelesen) werden ?
$x_2 = 5$
$x_3 = 6$
$x_1 = 7$

also:
L = {(7 ; 5 ; 6)}

3.4.2 Satz

Wenn das LGS in Stufenform vorliegt, so dass jede Spalte genau aus einer 1 und sonst lauter Nullen besteht, wobei die Einsen an jeweils verschiedenen Stellen (Zeilen) vorliegen, dann kann die Lösungsmenge sofort abgelesen werden.

3.4.3 Beispiel

1) Taucht - wie hier - in der 1. Zeile keine Zahl $\neq 0$ in der 1. Spalte auf, dann nimmt man die Spalte rechts davon, in der das erste Mal eine 0 auftaucht und füllt dann unterhalb dieser Zahl diese Spalte (mit dem GA) mit Nullen auf.

2) Das Ähnliche macht man, wenn in der 2. bzw. 3. Zeile in der entsprechenden Spalte keine 0 vorkommt.

3) Wenn in der 1. Zeile in der 1. Spalte eine 1 steht und in den Spalten darunter sich lauter Nullen befinden, entfällt der 1. Schritt des des GA. Analoges gilt für andere Fälle.

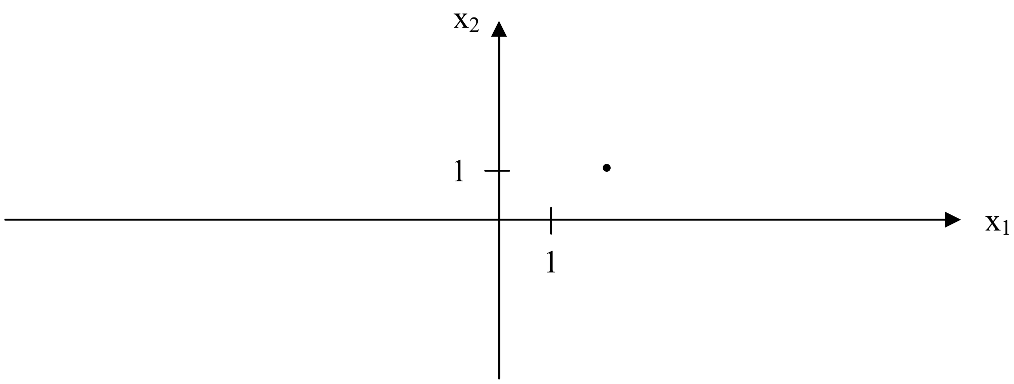
x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
0	0	**3**	-3	G1	0
2	-1	6	1	G2	8
4	-8	-9	5	G3	-8
0	0	3	-3	G4=G1	0
2	-1	0	7	G5=-2G1+G2	8
4	-8	0	-4	G6=3G1+G3	-8
0	0	3	-3	G7=G5	0
2	-1	0	7	G8=G5	8
0	-6	0	-18	G9=-2G5+G6	-24
0	0	3	-3	G10=G7	0
-12	0	0	-60	G11=-6G8+G9	-72
0	-6	0	-18	G12=G9	-24
0	0	1	-1	G13=G10/3	
1	0	0	5	G14=G11/-12	
0	1	0	3	G15=G12/-6	

L = {(5; 3; -1)}

3.5 Anzahl der Lösungen von linearen Gleichungssystemen

3.5.1 Gleichungssysteme mit genau einer Lösung

Beispiel:
$x_1 + x_2 = 3$
$2x_2 = 2$
L = {(2;1)}
Einzeichnen in ein Koordinatensystem:
Jedem Element der Lösungsmenge entspricht einem Punkt im Koordinatensystem



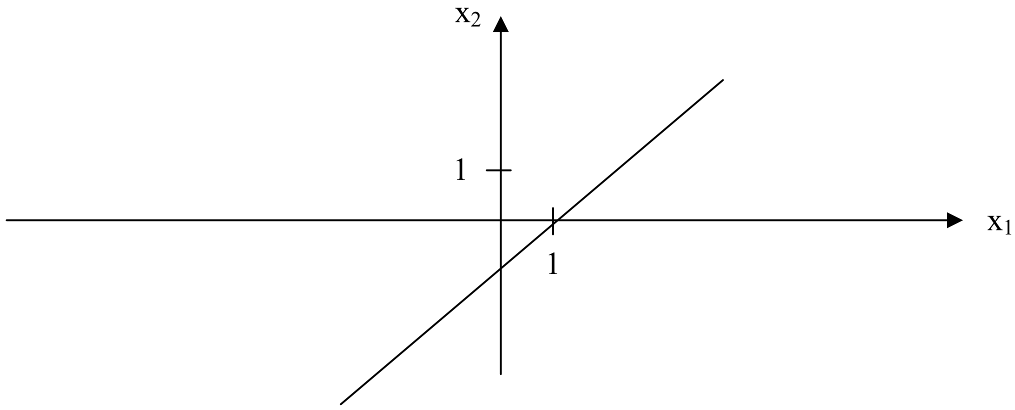
3.5.2 Gleichungssysteme mit keiner Lösung

Beispiel:
$x_1 + x_2 = 3$
$0 \cdot x_2 = 2$

3.5.3 Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen

Frage:
Kennen Sie ein einfaches Schaubild, das aus unendlich vielen Punkten besteht.

$x_1 - x_2 = 1$
daraus folgt:
$x_2 = x_1 - 1$
Man kann also x_1 beliebig wählen und x_2 danach als $x_2 = x_1 - 1$ ausrechnen.
$L = \{(x_1; x_2) \mid x_2 = x_1 - 1 \wedge x_1 \in R\}$

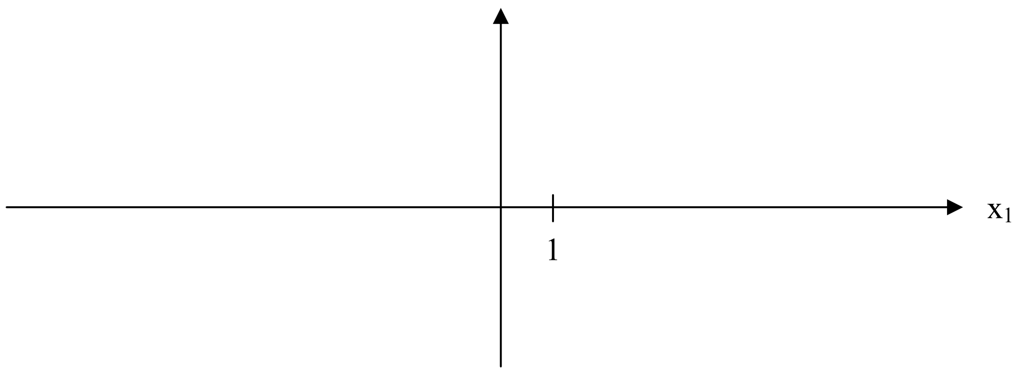


3.5.4 Weiteres Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen

Frage:
Kennen Sie ein einfaches Schaubild, das aus unendlich vielen Punkten besteht, die sich nicht auf einer Geraden befinden?

$0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 = 0$
$L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 \in R \wedge x_2 \in R\}$

Alle Punkte der Lösungsmenge bedecken die komplette Ebene des Koordinatensystems.



3.5.4.1 Weitere Beispiele

3.5.4.1.1 Beispiel

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
9	-6	-15	-12	G1	-24
-6	4	10	8	G2	16
-3	-4	6	12	G3	11
9	-6	-15	-12	G4=G1	-24
0	0	0	0	G5=2*G1+3*G2	0
0	-18	3	24	G6=G1+3G3	9
9	-6	-15	-12	G7=G4	-24
0	-18	3	24	G8=G6	9
-27	0	48	60	G9=-3G7+G8	81
0	-18	3	24	G10=G8	9
1	0	-16/9	-20/9	G11=G9/-27	
0	1	-1/6	-4/3	G12=G10/-18	

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1=-20/9+16/9\cdot x_3 \wedge x_2=-4/3+1/6\cdot x_3 \wedge x_3 \in R\}$

3.5.4.1.2 Beispiel

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
6	-2	4	8	G1	16
-3	1	-2	-4	G2	-8
9	-3	6	12	G3	24
6	-2	4	8	G4=G1	16
0	0	0	0	G5=G1+2*G2	0
0	0	0	0	G6=3G1-2G3	0
6	-2	4	8	G7=G4	16
1	-1/3	2/3	4/3	G8=G7/-6	

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1=4/3+1/3\cdot x_2-2/3\cdot x_3 \wedge x_2 \in R \wedge x_3 \in R\}$

3.5.4.1.3 Beispiel

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	-2	3	4	G1	6
2	-1	1	-2	G2	0
7	-8	11	8	G3	18
1	-2	3	4	G4=G1	6
0	3	-5	-10	G5=-2G1+G2	-12
0	6	-10	-20	G6=-7G1+G3	-24
3	0	-1	-8	G7=3G4+2G5	-6
0	3	-5	-10	G8=G5	-12
0	0	0	0	G9=2G5-G6	0
3	0	-1	-8	G10=G7	-6
0	3	-5	-10	G11=G8	-12
1	0	-1/3	-8/3	G12=G10/3	
0	1	-5/3	-10/3	G13=G11/3	

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1=-8/3+1/3\cdot x_3 \wedge x_2=-10/3+5/3\cdot x_3 \wedge x_3\in R\}$

ARBEITSBLATT

1)

1	0	2	8
0	1	3	5

2)

7	0	1	3
8	1	0	5

3)

0	6	1	9
1	7	0	8

4)

0	1	5	7
1	0	8	9

5)

3	2	1	7

6)

4	1	6	2

7)

1	0	2	3	7
0	1	4	5	6

8)

1	0	0	2	3	9
0	1	0	5	7	10
0	0	1	8	6	11

9)

1	3	5	0	7	9
0	4	6	1	8	2

10)

0	9	4	1	8	2
1	5	6	0	7	3

11)

0	2	3	0	4	0	1	6	7
0	9	8	1	0	12	0	11	13
1	14	0	0	17	0	0	16	15

12)

1	2	0	3	6	1	-2	0	4	8
2	3	1	2	7	0	-1	0	2	9
3	4	0	1	8	0	0	1	6	1

13)

2	1	1	-2
-1	-1	-2	3
6	3	3	-6

14)

2	1	3	-1
4	2	6	-2
6	3	9	-3

15)

1	2	1	1
2	4	2	-1
1	2	3	4

16)

1	2	-1	2	1
0	0	1	-1	-1
0	0	2	1	2

17)

0	0	-1	-1	-2	1
0	0	0	2	1	2
2	2	2	1	0	-1

18) Textaufgabe
Gegeben sind 3 Zahlen. Die Summe aus der 1. Zahl, dem doppelten der 2. Zahl und dem dreifachen der 3. Zahl ist -1.
Die Summe aus der 3. Zahl, dem dreifachen der 2. Zahl und dem doppelten der 1. Zahl ist 1.
Wie gross sind die 3 Zahlen ?

19) Textaufgabe
Die Summe dreier verschieden großer Zahlen (Ziffern) ist 10. Wie groß sind die 3 Zahlen ?

20) Zahlenrätsel

```
  E R
+ N E
-----
  R U
```

oder anders dargestellt:

$$\begin{array}{rcc} & x_1 & x_2 \\ + & x_3 & x_1 \\ & x_5 & \\ \hline & x_2 & x_4 \end{array}$$

21)
Ein Bauer will für genau 100 Euro Pferde, Kühe und Henne kaufen (kein Rückgeld). Eine Henne kostet 0,25Euro, eine Kuh 1 Euro und ein Pferd 15 Euro. Da er nur einen kleinen Bauernhof besitzt, muss die Anzahl der Pferde, Kühe und Hennen zusammen 100 ergeben. Der Bauer muss außerdem von jeder Tierart mindestens ein Tier kaufen.

3.5.5 Lösungen

3.5.5.1 Aufgabe 1

x_1	x_2	x_3	b
1	0	2	8
0	1	3	5

Frage:
Wie kann man ein Element der Lösungsmenge angeben ?

Antwort:
Man sieht, dass man für x_3 eine beliebige Zahl einsetzen darf, z.B:
$x_3 = 1$,
also:

$x_1 = 8 - 2x_3 = 8 - 2 = 6$
$x_2 = 5 - 3x_3 = 5 - 3 = 2$
$x_3 = 1$

also:
$(6, 2, 1) \in L$

3.5.5.1.1 Erste Darstellung der Lösung

Damit ergibt sich die gesamte Lösungsmenge, wenn man $x_3 = s$ beliebig wählt:
setze:
$x_3 = s$

also:
$x_1 = 8 - 2s$
$x_2 = 5 - 3s$
$x_3 = s$

also:
$L = \{(8-2s; 5-3s; s) \mid s \in R\}$

3.5.5.1.1.1 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: $s = 1$:
also: $(6; 2; 1) \in L$

2) Probe machen:
$1 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$ w
$0 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$ w

3.5.5.1.2 Zweite Darstellung der Lösung

wähle x_3 beliebig

also:

$x_1 = 8 - 2x_3$

$x_2 = 5 - 3x_3$

also:

$L = \{(8-2x_3;\ 5-3x_3;\ x_3) \mid x_3 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1 = 8-2x_3 \wedge x_2 = 5-3x_3 \wedge x_3 \in R\}$

3.5.5.1.3 Dritte Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 8 - 2 \cdot x_3$

$x_2 = 5 - 3 \cdot x_3$

$x_3 = 0 + 1 \cdot x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in R$$

Frage:
Warum kann man z.B. nicht x_1 beliebig wählen und dann x_2 und x_3 nur noch in Abhängigkeit von x_1 darstellen?

Antwort:
Weil in der 1. Zeile x_3 zwar von x_1 abhängt (und nicht von x_3) , aber in der 2. Zeile hängt x_2 wieder von x_3 ab und nicht von x_1.

3.5.5.2 Aufgabe 2

X_1	x_2	x_3	b
7	0	1	3
8	1	0	5

3.5.5.2.1 Zweite Darstellung der Lösung

wähle x_1 beliebig
also:
$x_3 = 3 - 7x_1$
$x_2 = 5 - 8x_1$

also:
$L = \{(x_1;\ 5-8x_1;\ 3-7x_1) \mid x_1 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_2 = 5-8x_1 \wedge x_3 = 3-7x_1 \wedge x_1 \in R\}$

3.5.5.3 Aufgabe 3

X_1	x_2	x_3	b
0	6	1	9
1	7	0	8

3.5.5.3.1 Zweite Darstellung der Lösung

wähle x_2 beliebig
also:
$x_3 = 9 - 6x_2$
$x_1 = 8 - 7x_2$

also:
$L = \{(8-7x_2;\ x_2;\ 9-6x_2) \mid x_2 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1 = 8-7x_2 \wedge x_3 = 9-6x_2 \wedge x_2 \in R\}$

3.5.5.4 Aufgabe 4

X_1	x_2	x_3	b
0	1	5	7
1	0	8	9

3.5.5.4.1 Zweite Darstellung der Lösung

wähle x_3 beliebig
also:
$x_2 = 7 - 5x_3$
$x_1 = 9 - 8x_3$

also:
$L = \{(9-8x_3;\ 7-5x_3;\ x_3) \mid x_3 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1 = 9-8x_3 \wedge x_2 = 7-5x_3 \wedge x_3 \in R\}$

3.5.5.5 Aufgabe 5

x_1	x_2	x_3	b
3	2	1	7

3.5.5.5.1 Zweite Darstellung der Lösung

wähle x_1 und x_2 beliebig
also:
$x_3 = 7 - 3x_1 - 2x_2$

also:
$L = \{(x_1;\ x_2;\ 7-3x_1-2x_2) \mid x_1 \in R \wedge x_2 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_3 = 7-3x_1-2x_2 \wedge x_1 \in R \wedge x_2 \in R\}$

3.5.5.6 Aufgabe 6

x_1	x_2	x_3	b
4	1	6	2

3.5.5.6.1 Zweite Darstellung der Lösung

wähle x_1 und x_2 beliebig
also:
$x_2 = 2 - 4x_1 - 6x_3$

also:
$L = \{(x_1;\ 2-4x_1-6x_3\ ;\ x_3) \mid x_1 \in R \wedge x_3 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_2 = 2-4x_1-6x_3 \wedge x_1 \in R \wedge x_3 \in R\}$

3.5.5.7 Aufgabe 7

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	3	7
0	1	4	5	6

3.5.5.7.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:
$x_1 = 7 - 2x_3 - 3x_4$
$x_2 = 6 - 4x_3 - 5x_4$

setze:
$x_3 = s,\ x_4 = t$

also:
$x_1 = 7 - 2s - 3t$
$x_2 = 6 - 4s - 5t$
$x_3 = s$
$x_4 = t$

also:
$L = \{(7-2s-3t;\ 6-4s-5t;\ s;\ t) \mid s \in R \wedge t \in R\}$

3.5.5.7.1.1 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: s = 1, t = 1:
also: $(2; -3; 1; 1) \in L$
2) Probe machen:
$1 \cdot 2 + 0 \cdot -3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7$ w
$0 \cdot 2 + 1 \cdot -3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 6$ w

3.5.5.7.2 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 7 - 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4$
$x_2 = 6 - 4 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4$

damit:
$L = \{(7-2x_3-3x_4;\ 6-4x_3-5x_4;\ x_3;\ x_4) \mid x_3 \in R \wedge x_4 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \mid x_1=7-2x_3-3x_4 \wedge x_2=6-4x_3-5x_4 \wedge x_3 \in R \wedge x_4 \in R\}$

3.5.5.7.3 Dritte Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 7 - 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4$
$x_2 = 6 - 4 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4$
$x_3 = 0 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$
$x_4 = 0 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 \in R,\ x_4 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in R,\ t \in R$$

3.5.5.8 Aufgabe 8

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	2	3	9
0	1	0	5	7	10
0	0	1	8	6	11

3.5.5.8.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:

$x_1 = 9 - 2x_4 - 3x_5$
$x_2 = 10 - 5x_4 - 7x_5$
$x_3 = 11 - 8x_4 - 6x_5$

setze:

$x_4 = s,\ x_5 = t$

also:

$x_1 = 9 - 2s - 3t$
$x_2 = 10 - 5s - 7t$
$x_3 = 11 - 8s - 6t$
$x_4 = s$
$x_5 = t$

also:

$L = \{(9-2s-3t;\ 10-5s-7t;\ 11-8s-6t;\ s;\ t) \mid s \in R \wedge t \in R\}$

3.5.5.8.1.1 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: s = 1, t = 2:

also: $(1; -9; -9; 1; 2) \in L$

2) Probe machen:

$1 \cdot 1 + 0 \cdot -9 + 0 \cdot -9 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$ w

$0 \cdot 1 + 1 \cdot -9 + 0 \cdot -9 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 10$ w

3.5.5.8.2 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 9 - 2x_4 - 3x_5$

$x_2 = 10 - 5x_4 - 7x_5$

$x_3 = 11 - 8x_4 - 6x_5$

damit:

$L = \{(9-2x_4-3x_5;\ 10-5x_4-7x_5;\ 11-8x_4-6x_5;\ x_4;\ x_5) \mid x_4 \in R \wedge x_5 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5) \mid x_1=9-2x_4-3x_5 \wedge x_2=10-5x_4-7x_5 \wedge x_3=11-8x_4-6x_5 \wedge x_4 \in R \wedge x_5 \in R\}$

3.5.5.8.3 Dritte Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 9 - 2 \cdot x_4 - 3 \cdot x_5$

$x_2 = 10 - 5 \cdot x_4 - 7 \cdot x_5$

$x_3 = 11 - 8 \cdot x_4 - 6 \cdot x_5$

$x_4 = 0 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$

$x_5 = 0 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_4 \in R,\ x_5 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in R,\ t \in R$$

3.5.5.9 Aufgabe 9

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	3	5	0	7	9
0	4	6	1	8	2

Fragen:
1) Warum braucht man hier das LGS nicht in die diagonale Stufenform bringen ?

Antwort:
Wenn das LGS in Stufenform vorliegt, so dass jede Spalte genau aus einer 1 und sonst lauter Nullen besteht, wobei die Einsen an jeweils verschiedenen Stellen (Zeilen) vorliegen, dann kann die Lösungsmenge sofort abgelesen werden.

2) Warum sieht man sofort, dass man x_2 , x_3 , x_5 beliebig wählen kann und dass x_1 und x_4 dann nur noch x_2 , x_3 , x_5 abhängen ?

Antwort:
Weil in der 1. Zeile x_1 nicht mehr von x_4 abhängt (Faktor vor x_4 ist 0) und in der 2. Zeile x_4 nicht mehr von x_1 abhängt (Faktor vor x_1 ist 0).

3)
Warum kann man z.B. nicht x_1 , x_4 , x_5 beliebig wählen und man x_2 und x_3 dann nur noch in Abhängigkeit von x_1 , x_3 , x_5 darstellen ?

Antwort:
Weil in der 1. Zeile x_2 zwar von x_3 abhängt (und nicht von x_2) , aber in der 2. Zeile hängt x_3 wieder von x_2 ab.

3.5.5.9.1 Erste Darstellung der Lösung
Durch Umformen ergibt sich:
$x_1 = 9 - 3s - 5t - 7u$
$x_4 = 2 - 4s - 6t - 8u$

setze:
$x_2 = s,\ x_3 = t,\ x_5 = u$

also:
$x_1 = 9 - 3s - 5t - 7u$
$x_2 = s$
$x_3 = t$
$x_4 = 2 - 4s - 6t - 8u$
$x_5 = u$

also:
$L = \{(9-3s-5t-7u;\ s;\ t;\ 2-4s-6t-8u;\ u) \mid s\in R \wedge t\in R \wedge u\in R\}$

3.5.5.9.1.1 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: s = 1, t = 1, u = 1:
also: (-6; 1; 1; -16; 1) $\in$ L
2) Probe machen:
$1 \cdot -6 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot -16 + 7 \cdot 1 = 9$ w
$0 \cdot -6 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot -16 + 8 \cdot 1 = 2$ w

3.5.5.9.2 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:
$x_1 = 9 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5$
$x_4 = 2 - 4x_2 - 6x_3 - 8x_5$

damit:
$L = \{(9-3x_2-5x_3-7x_5;\ x_2;\ x_3;\ 2-4x_2-6x_3-8x_5;\ x_5) \mid x_2 \in R \wedge x_3 \in R \wedge x_5 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5) \mid x_1=9-3x_2-5x_3-7x_5 \wedge x_4=2-4x_2-6x_3-8x_5 \wedge x_2 \in R \wedge x_3 \in R \wedge x_5 \in R\}$

3.5.5.9.3 Dritte Darstellung der Lösung

Es gilt:
$x_1 = 9 - 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 - 7 \cdot x_5$
$x_2 = 0 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5$
$x_3 = 0 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5$
$x_4 = 2 - 4 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 - 8 \cdot x_5$
$x_5 = 0 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_2 \in R, x_3 \in R, x_5 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in R, t \in R, u \in R$$

3.5.5.10 Aufgabe 10

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	9	4	1	8	2
1	5	6	0	7	3

3.5.5.10.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:
$x_1 = 3 - 5s - 6t - 7u$
$x_4 = 2 - 9s - 4t - 8u$

setze:
$x_2 = s,\ x_3 = t,\ x_5 = u$

also:
$x_1 = 3 - 5s - 6t - 7u$
$x_2 = s$
$x_3 = t$
$x_4 = 2 - 9s - 4t - 8u$
$x_5 = u$

also:
$L = \{(3-5s-6t-7u;\ s;\ t;\ 2-9s-4t-8u;\ u) \mid s\in R \wedge t\in R \wedge u\in R\}$

3.5.5.10.1.1 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu, z.B: $s = 2$, $t = 1$, $u = 1$:
also:$(-20; 2; 1; -28; 1) \in L$
2) Probe machen:
$0 \cdot -20 + 9 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot -28 + 8 \cdot 1 = 2$ w
$1 \cdot -20 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot -28 + 7 \cdot 1 = 3$ w

3.5.5.10.2 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:
$x_1 = 3 - 5x_2 - 6x_3 - 7x_5$
$x_4 = 2 - 4x_2 - 6x_3 - 8x_5$

damit:
$L = \{(3-5x_2-6x_3-7x_5;\ x_2;\ x_3;\ 2-4x_2-6x_3-8x_5;\ x_5) \mid x_2\in R \wedge x_3\in R \wedge x_5\in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5) \mid x_1=3-5x_2-6x_3-7x_5 \wedge x_4=2-4x_2-6x_3-8x_5 \wedge x_2\in R \wedge x_3\in R \wedge x_5\in R\ \}$

3.5.5.10.3 Dritte Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 3 - 5 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 - 7 \cdot x_5$
$x_2 = 0 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5$
$x_3 = 0 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5$
$x_4 = 2 - 4 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 - 8 \cdot x_5$
$x_5 = 0 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_2 \in R, x_3 \in R, x_5 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in R, t \in R, u \in R$$

3.5.5.11 Aufgabe 11

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
0	2	3	0	4	0	1	6	7
0	9	8	1	0	12	0	11	13
1	14	0	0	17	0	0	16	15

3.5.5.11.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:

$x_7 = 7 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_5 - 6x_8$
$x_4 = 13 - 9x_2 - 8x_3 - 12x_6 - 11x_8$
$x_1 = 15 - 14x_2 - 17x_5 - 16x_8$

setze:

$x_2 = s,\ x_3 = t,\ x_5 = u,\ x_6 = v,\ x_8 = w$

also:
$x_1 = 15 - 14x_2 - 17x_5 - 16x_8$
$x_2 = s$
$x_3 = t$
$x_4 = 13 - 9s - 8t - 12v - 11w$
$x_5 = u$
$x_6 = v$
$x_7 = 7 - 2s - 3t - 4u - 6w$
$x_8 = w$

also:
$L = \{(15-14s-17u-16w;\ s;\ t;\ 13-9s-8t-12v-11w;\ u;\ v;$
$\quad 7-2s-3t-4u-6w,\ w) \mid s\in R \wedge t\in R \wedge u\in R \wedge v\in R \wedge w\in R\}$

3.5.5.11.1.1 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: s = 1, t = 1, u = 1, v = 1, w = 1:
also: (-32; 1; 1; -27; 1; 1; -8; 1) ∈ L
2) Probe machen:
$0 \cdot -32 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot -27 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot -8 + 6 \cdot 1 = 7$ w
$0 \cdot -32 + 9 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 1 \cdot -27 + 0 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 0 \cdot -8 + 11 \cdot 1 = 13$ w
$1 \cdot -32 + 14 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot -27 + 17 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot -8 + 16 \cdot 1 = 15$ w

3.5.5.11.1.2 Zusammenfassung

Die Spalten, in denen jeweils an einer anderen Stelle die 1 vorkommt (und der Rest der jeweiligen Spalte aus lauter Nullen besteht) werden markiert.
Die den nicht markierten Spalten entsprechenden Variablen x_i werden die frei wählbaren Variablen r, s, t, ... zugeordnet.
Die den markierten Spalten entsprechenden Variablen x_i werden durch Formeln, in denen nur die frei wählbaren Variablen r, s, t, ... vorkommen, dargestellt.

3.5.5.11.2 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 15 - 14x_2 - 17x_5 - 16x_8$
$x_4 = 13 - 9x_2 - 8x_3 - 12x_6 - 11x_8$
$x_7 = 7 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_5 - 6x_8$

damit:

$L = \{(15-14x_2-17x_5-16x_8;\ x_2;\ x_3;\ 13-9x_2-8x_3-12x_6-11x_8;\ x_5;\ x_6;\ 7-2x_2-3x_3-4x_5-6x_8) \mid x_2 \in R \wedge x_3 \in R \wedge x_5 \in R \wedge x_6 \in R \wedge x_8 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5;\ x_6;\ x_7;\ x_8) \mid x_1=15-14x_2-17x_5-16x_8 \wedge x_4=13-9x_2-8x_3-12x_6-11x_8 \wedge x_7=7-2x_2-3x_3-4x_5-6x_8 \wedge x_2 \in R \wedge x_3 \in R \wedge x_5 \in R \wedge x_6 \in R \wedge x_8 \in R\}$

3.5.5.11.3 Dritte Darstellung der Lösung

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 15 - 14\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - 17\cdot x_5 + 0\cdot x_6 - 16\cdot x_8\\
x_2 &= 0 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 0\cdot x_8\\
x_3 &= 0 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 0\cdot x_8\\
x_4 &= 13 - 9\cdot x_2 - 8\cdot x_3 + 0\cdot x_5 - 12\cdot x_6 - 11\cdot x_8\\
x_5 &= 0 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 0\cdot x_8\\
x_6 &= 0 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_5 + 1\cdot x_6 + 0\cdot x_8\\
x_7 &= 7 - 2\cdot x_2 - 3\cdot x_3 - 4\cdot x_5 + 0\cdot x_6 - 6\cdot x_8\\
x_8 &= 0 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 1\cdot x_8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 15\\ 0\\ 0\\ 13\\ 0\\ 0\\ 7\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -14\\ 1\\ 0\\ -9\\ 0\\ 0\\ -2\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ -8\\ 0\\ 0\\ -3\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_5 \cdot \begin{pmatrix} -17\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ -4\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_6 \cdot \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ -12\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_8 \cdot \begin{pmatrix} -16\\ 0\\ 0\\ -11\\ 0\\ 0\\ -6\\ 1 \end{pmatrix}
$$

$x_2 \in R$, $x_3 \in R$, $x_5 \in R$, $x_6 \in R$, $x_8 \in R$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{u} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{w} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ -11 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{s} \in \mathrm{R}, \mathrm{t} \in \mathrm{R}, \mathrm{u} \in \mathrm{R}, \mathrm{v} \in \mathrm{R}, \mathrm{w} \in \mathrm{R}$

3.5.5.12 Aufgabe 12

1	2	0	3	6	1	-2	0	4	8
2	3	1	2	7	0	-1	0	2	9
3	4	0	1	8	0	0	1	6	1

3.5.5.12.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:

$x_6 = 8 - x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 6x_5 + 2x_7 - 4x_9$
$x_3 = 9 - 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 - 7x_5 + x_7 - 2x_9$
$x_8 = 1 - 3x_1 - 4x_2 - x_4 - 8x_5 - 6x_9$

setze:
$x_1 = p,\ x_2 = q,\ x_4 = r,\ x_5 = s,\ x_7 = t,\ x_9 = u$

also:
$x_1 = p$
$x_2 = q$
$x_3 = 9 - 2p - 3q - 2r - 7s + t - 2u$
$x_4 = r$
$x_5 = s$
$x_6 = 8 - p - 2q - 3r - 6s + 2t - 4u$
$x_7 = t$
$x_8 = 1 - 3p - 4q - r - 8s - 6u$
$x_9 = u$

also:
$L =$
$\{(x_1;\ x_2;\ 9-2p-3q-2r-7s+t-2u;\ x_4;\ x_5;\ 8-p-2q-3r-6s+2t-4u;$
$x_7;\ 1-3p-4q-r-8s-6u;\ x_9) \mid p \in R \wedge q \in R \wedge r \in R \wedge s \in R \wedge t \in R \wedge u \in R\}$

3.5.5.12.1.1 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 1$, $x_8 = 1$, $x_9 = 1$
also: $(1; 1; -6; 1; 1; -6; 1; -21; 1) \in L$
2) Probe machen:
$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot -6 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot -6 + -2 \cdot 1 + 0 \cdot -21 + 4 \cdot 1 = 8$ w
$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot -6 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 0 \cdot -6 + -1 \cdot 1 + 0 \cdot -21 + 2 \cdot 1 = 9$ w
$3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot -6 + 1 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot -6 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot -21 + 6 \cdot 1 = 1$ w

3.5.5.12.2 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
x_6 &= 8 - x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 6x_5 + 2x_7 - 4x_9\\
x_3 &= 9 - 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 - 7x_5 + x_7 - 2x_9\\
x_8 &= 1 - 3x_1 - 4x_2 - x_4 - 8x_5 - 6x_9
\end{aligned}
$$

damit:

$$
\begin{aligned}
L = \{(&x_1;\ x_2;\ 9-2x_1-3x_2-2x_4-7x_5+x_7-2x_9;\ x_4;\ x_5;\\
&8-x_1-2x_2-3x_4-6x_5+2x_7-4x_9;\ x_7;\ 1-3x_1-4x_2-x_4-8x_5-6x_9;\ x_9) \mid\\
&\qquad x_1\in R \wedge x_2\in R \wedge x_4\in R \wedge x_5\in R \wedge x_7\in R \wedge x_9\in R\}
\end{aligned}
$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$
\begin{aligned}
L = \{(&x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5;\ x_6;\ x_7;\ x_8;\ x_9) \mid\\
&x_6=8-x_1-2x_2-3x_4-6x_5+2x_7-4x_9 \wedge x_3=9-2x_1-3x_2-2x_4-7x_5+x_7-2x_9 \wedge\\
&x_8=1-3x_1-4x_2-x_4-8x_5-6x_9 \wedge x_1\in R \wedge x_2\in R\\
&\wedge x_4\in R \wedge x_5\in R \wedge x_7\in R \wedge x_9\in R\}
\end{aligned}
$$

3.5.5.12.3 Dritte Darstellung der Lösung

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 + 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_7 + 0\cdot x_9\\
x_2 &= 0 + 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_7 + 0\cdot x_9\\
x_3 &= 9 - 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 - 2\cdot x_4 - 7\cdot x_5 + 1\cdot x_7 - 2\cdot x_9\\
x_4 &= 0 + 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_7 + 0\cdot x_9\\
x_5 &= 0 + 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5 + 0\cdot x_7 + 0\cdot x_9\\
x_6 &= 8 - 1\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - 3\cdot x_4 - 6\cdot x_5 + 2\cdot x_7 - 4\cdot x_9\\
x_7 &= 0 + 0\cdot x_1 - 0\cdot x_2 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 1\cdot x_7 + 0\cdot x_9\\
x_8 &= 1 - 3\cdot x_1 - 4\cdot x_2 - 1\cdot x_4 - 8\cdot x_5 + 0\cdot x_7 - 6\cdot x_9\\
x_9 &= 0 + 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_7 + 1\cdot x_9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 9\\ 0\\ 0\\ 8\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_1 \cdot
\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\\ 0\\ 0\\ -1\\ 0\\ -3\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_2 \cdot
\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -3\\ 0\\ 0\\ -2\\ 0\\ -4\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_4 \cdot
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -2\\ 1\\ 0\\ -3\\ 0\\ -1\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_5 \cdot
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -7\\ 0\\ 1\\ -6\\ 0\\ -8\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_7 \cdot
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 2\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}
+ x_9 \cdot
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -2\\ 0\\ 0\\ -4\\ 0\\ -6\\ 1 \end{pmatrix}
$$

$x_2 \in R$, $x_3 \in R$, $x_5 \in R$, $x_6 \in R$, $x_8 \in R$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$p \in R, q \in R , r \in R, s \in R, t \in R, u \in R$

3.5.5.13 Aufgabe 13

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
2	1	1	-2	G1	2
-1	-1	-2	3	G2	-1
6	3	3	-6	G3	6
2	1	1	-2	G4=G1	2
0	-1	-3	4	G5=G1+2G2	0
0	0	0	0	G6=3G1-G3	0
2	1	1	-2	G7=G4	2
0	-1	-3	4	G8=G5	0
2	0	-2	2	G9=G7+G8	2
0	-1	-3	4	G10=G8	0
1	0	-1	1	G11=G9/2	1
0	1	3	-4	G12=G10/-1	0

3.5.5.13.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:

$x_1 = 1 + x_3$
$x_2 = -4 - 3x_3$

setze:

$x_3 = s$

also:

$x_1 = 1 + s$
$x_2 = -4 - 3s$
$x_3 = s$

also:

L = {(1+s; -4-3s; s)| s∈R}

3.5.5.13.2 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: $s = 2$:

also: $(3; -10; 2) \in L$

2) Probe machen:

$2 \cdot 3 + 1 \cdot -10 + 1 \cdot 2 = -2$ w

$-1 \cdot 3 + -1 \cdot -10 + -2 \cdot 2 = 3$ w

$6 \cdot 3 + 3 \cdot -10 + 3 \cdot 2 = -6$ w

3.5.5.13.3 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 1 + x_3$

$x_2 = -4 - 3x_3$

damit:

$L = \{(1+x_3;\ -4-3x_3;\ x_3) \mid x_3 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1=1+x_3 \wedge x_2=-4-3x_3 \wedge x_3 \in R\}$

3.5.5.13.4 Dritte Darstellung der Lösung

$x_1 = 1 + 1 \cdot x_3$

$x_2 = -4 - 3 \cdot x_3$

$x_3 = 0 + 1 \cdot x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in R$$

3.5.5.14 Aufgabe 14

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
2	1	3	-1	G1	5
4	2	6	-2	G2	10
6	3	9	-3	G3	15
2	1	3	-1	G4=G1	5
0	0	0	0	G5=-2G1+G2	0
0	0	0	0	G6=-3G1+G3	0
2	1	3	-1	G7=G4	5

3.5.5.14.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:
$x_2 = -1 -2x_1 -3x_3$

setze:
$x_1 = s,\ x_3 = t$

also:
$x_1 = s$
$x_2 = -1 -2s -3t$
$x_3 = t$

also:
$L = \{(s;\ -1-2s-3t;\ t) \mid s \in R \wedge t \in R\}$

3.5.5.14.2 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: s = 2, t = 1:
also: (2; -8; -1) ∈ L
2) Probe machen:
$2 \cdot 2 + 1 \cdot -8 + 3 \cdot 1 = -1$ w
$4 \cdot 2 + 2 \cdot -8 + 6 \cdot 1 = -2$ w
$6 \cdot 2 + 3 \cdot -8 + 9 \cdot 1 = -3$ w

3.5.5.14.3 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:
$x_2 = -1 -2x_1 -3x_3$

damit:
$L = \{(x_1;\ -1-2x_1-3x_3;\ x_3) \mid x_1 \in R \wedge x_3 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_2=-1-2x_1-3x_3 \wedge x_1 \in R \wedge x_3 \in R\}$

3.5.5.14.4 Dritte Darstellung der Lösung

$x_1 = 0 + 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_3$
$x_2 = -1 - 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_3$
$x_3 = 0 + 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_1 \in R, x_3 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in R, t \in R$$

3.5.5.15 Aufgabe 15

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	2	1	1	G1	5
2	4	2	-1	G2	10
1	2	3	4	G3	15
1	2	1	1	G4=G1	5
0	0	0	-3	G5=-2G1+G2	0
				G6=	0

L = { }

3.5.5.16 Aufgabe 16

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Op	KS
1	2	-1	2	1	G1	5
0	0	1	-1	-1	G2	-1
0	0	2	1	2	G3	5
1	2	-1	2	1	G4=G1	5
0	0	1	-1	-1	G5=G2	-1
0	0	2	1	2	G6=G3	5
1	2	0	1	0	G7=G5+G4	4
0	0	1	-1	-1	G8=G5	-1
0	0	0	3	4	G9=-2G5+G6	7
-3	-6	0	0	4	G10=G9-3G7	-5
0	0	3	0	1	G11=G9+3G8	4
0	0	0	3	4	G12=G9	7
1	2	0	0	-4/3	G13=G10/-3	5/3
0	0	1	0	1/3	G14=G11/3	4/3
0	0	0	1	4/3	G15=G12/3	7/3

3.5.5.16.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:

$x_1 = -4/3 - 2x_2$
$x_3 = 1/3$
$x_4 = 4/3$

setze:
$x_2 = s$

also:
$x_1 = -4/3 - 2s$
$x_2 = s$
$x_3 = 1/3$
$x_4 = 4/3$

also:
$L = \{(-4/3 - 2s;\ s;\ 1/3;\ 4/3) \mid s \in R\}$

3.5.5.16.1.1 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: s = -1:
also: (2/3; -1; 1/3; 4/3) $\in$ L
2) Probe machen:
$1 \cdot 2/3 + 2 \cdot -1 + -1 \cdot 1/3 + 2 \cdot 4/3 = 1$ w
$0 \cdot 2/3 + 0 \cdot -1 + 1 \cdot 1/3 + -1 \cdot 4/3 = -1$ w
$0 \cdot 2/3 + 0 \cdot -1 + 2 \cdot 1/3 + 1 \cdot 4/3 = 2$ w

3.5.5.16.2 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = -4/3 - 2x_2$
$x_3 = 1/3$
$x_4 = 4/3$

damit:

$L = \{(-4/3 - 2x_2;\ x_2;\ 1/3;\ 4/3) \mid x_2 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \mid x_1 = -4/3 - 2x_2 \wedge x_3 = 1/3 \wedge x_4 = 4/3 \wedge x_2 \in R\}$

3.5.5.16.3 Dritte Darstellung der Lösung

$x_1 = -4/3 - 2 \cdot x_2$
$x_2 = 0 + 1 \cdot x_2$
$x_3 = 1/3 + 0 \cdot x_2$
$x_4 = 4/3 + 0 \cdot x_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s \in R$$

3.5.5.17 Aufgabe 17

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Op	KS
0	0	-1	-1	-2	1	G1	-3
0	0	0	2	1	2	G2	5
2	2	2	1	0	-1	G3	6
0	0	-1	-1	-2	1	G4=G1	-3
0	0	0	2	1	2	G5=0G1+G2	5
2	2	0	-1	-4	1	G6=2G1+G3	0
0	0	-2	0	-3	4	G7=G5+2G4	-1
0	0	0	2	1	2	G8=G5	5
4	4	0	0	-7	4	G9=G5+2G6	5
0	0	1	0	3/2	-2	G10=G7/-2	1/2
0	0	0	1	1/2	1	G11=G8/2	5/2
1	1	0	0	-7/4	1	G12=G9/4	5/4

Bemerkungen:
1) Taucht - wie hier - in der 1. Zeile keine Zahl ≠ 0 in der 1. Spalte auf, dann nimmt man die Spalte rechts davon, in der das erste Mal eine 0 auftaucht und füllt dann unterhalb dieser Zahl diese Spalte (mit dem GA) mit Nullen auf.

2) Die 3. Leitzeile ist nicht nötig, da es ja schon eine Spalte (die 1. bzw. die 2. Spalte) gibt, die oberhalb der Zahl aus lauter Nullen besteht.

3.5.5.17.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:

$x_1 = 1 - x_2 + 1,75x_5$
$x_3 = -2 - 1,5x_5$
$x_4 = 1 - 0,5x_5$

setze:

$x_2 = s,\ x_5 = t$

also:

$x_1 = 1 - s + 1,75t$
$x_2 = s$
$x_3 = -2 - 1,5t$
$x_4 = 1 - 0,5t$
$x_5 = t$

also:

$L = \{(1-s+1,75t;\ s;\ -2-1,5t;\ 1-0,5t;\ t) \mid s\in R \land t\in R\}$

3.5.5.17.1.1 Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: s = -1, t = -1:
also: (3; -1; -0,5; 1,5; -1) $\in$ L
2) Probe machen:
$0 \cdot 3 + 0 \cdot -1 + -1 \cdot -0.5 + -1 \cdot 1{,}5 + -2 \cdot -1 = 1$ w
$0 \cdot 3 + 0 \cdot -1 + 0 \cdot -0.5 + 2 \cdot 1{,}5 + 1 \cdot -1 = 2$ w
$2 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot -1 + 2 \cdot -0.5 + 1 \cdot 1{,}5 + 0 \cdot -1 = -1$ w

3.5.5.17.2 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:
$x_1 = 1 - x_2 + 1{,}75x_5$
$x_3 = -2 - 1{,}5x_5$
$x_4 = 1 - 0{,}5x_5$

damit:
$L = \{(1-x_2+1{,}75x_5;\ s;\ -2-1{,}5x_5;\ 1-0{,}5x_5;\ x_5) \mid x_2 \in R \wedge x_5 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5) \mid x_1=1-x_2+1{,}75x_5 \wedge x_3=-2-1{,}5x_5$
$\wedge\ x_4 = 1-0{,}5x_5 \wedge x_2 \in R \wedge x_5 \in R\}$

3.5.5.17.3 Dritte Darstellung der Lösung

Es gilt:
$x_1 = 1 - 1\cdot x_2 + 1{,}75\cdot x_5$
$x_2 = 0 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_5$
$x_3 = -2 + 0\cdot x_2 - 1{,}5\cdot x_5$
$x_4 = 1 + 0\cdot x_2 - 0{,}5\cdot x_5$
$x_5 = 0 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 0 \\ -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_2 \in R, x_5 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 0 \\ -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in R, t \in R$$

3.5.5.18 Aufgabe 18 (Textaufgabe)

Gegeben sind 3 Zahlen. Die Summe aus der 1. Zahl, dem doppelten der 2. Zahl und dem dreifachen der 3. Zahl ist -1.
Die Summe aus der 3. Zahl, dem dreifachen der 2. Zahl und dem doppelten der 1. Zahl ist 1.
Wie groß sind die 3 Zahlen ?

Lösung:
Es sei:
1. Zahl: x_1
2. Zahl: x_2
3. Zahl: x_3

Dann gilt:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	2	3	-1	G1	5
2	3	1	1	G2	7
1	2	3	-1	G3=G1	5
0	-1	-5	3	G4=-2G1+G2	-3
1	0	-7	5	G5=2G4+G3	-1
0	-1	-5	3	G6=G4	-3
1	0	-7	5	G7=G5	-1
0	1	5	-3	G8=G6/-1	3

3.5.5.18.1 Erste Darstellung der Lösung

Durch Umformen ergibt sich:

$$x_1 = 5 + 7x_3$$
$$x_2 = -3 - 5x_3$$

setze:

$$x_3 = s$$

also:

$$x_1 = 5 + 7s$$
$$x_2 = -3 - 5s$$
$$x_3 = s$$

also:

$$L = \{(5+7s; -3-5s; s) \mid s \in R\}$$

3.5.5.18.2 Zweite Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 5 + 7x_3$
$x_2 = -3 - 5x_3$

damit:

$L = \{(5+7x_3;\ -3-5x_3;\ x_3) \mid x_3 \in R\}$

oder noch einmal anders geschrieben:

$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1=5+7x_3 \wedge x_2=-3-5x_3 \wedge x_3 \in R\}$

3.5.5.18.3 Dritte Darstellung der Lösung

Es gilt:

$x_1 = 5 + 7 \cdot x_3$
$x_2 = -3 - 5 \cdot x_3$
$x_3 = 0 + 1 \cdot x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 \in R$$

oder noch einmal anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in R$$

3.5.5.19 Aufgabe 19 (Textaufgabe)

Die Summe dreier verschieden großer Ziffern ($Z = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$) ist 10.
Wie groß sind die 3 Ziffern?

Lösung:
Es sei:
1. Zahl: x_1
2. Zahl: x_2
3. Zahl: x_3

Dann gilt:
$x_1 + x_2 + x_3 = 10$

3.5.5.19.1 Lösung durch reines Probieren

Anzahl der Möglichkeiten:
Man probiert für x_1, x_2, x_3 sämtliche Ziffern durch und prüft, ob die Summe 10 ergibt und alle Ziffern verschieden sind.
Dazu muss man $10^3 = 1000$ Möglichkeiten durchtesten (z.B. durch ein Computerprogramm).

3.5.5.19.2 Lösung durch Gausschen Algorithmus

In Matrixschreibweise:

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	1	1	10	G1	13

Eine Darstellung der Lösung
Es gilt:
$x_1 = 10 - x_2 - x_3$

damit:

$$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1 = 10 - x_2 - x_3 \wedge x_1 \in Z \wedge x_2 \in Z \wedge x_3 \in Z \wedge x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ verschieden}\}$$

Anzahl der Möglichkeiten:
Das Ziel ist nun, die einzelnen Elemente der Lösungsmenge in aufzählbarer Form anzugeben.
Dies geht (wahrscheinlich) nur durch probieren:
Man probiert für x_2 und x_3 sämtliche Ziffern durch, berechnet x_1, testet ob x_1 eine Ziffer ist und prüft, ob alle Ziffern verschieden sind.
Dazu muss man $10^2 = 100$ Möglichkeiten durchtesten (z.B. durch ein Computerprogramm).

Vergleich reines Probieren - Gausscher Algorithmus
Mit dem Gausschen Algorithmus muss man als 10 mal weniger Möglichkeiten durchprobieren. Bei einem Computerprogramm verringert sich also die Rechenzeit um das 10-fache.

3.5.5.20 Aufgabe 20 (Zahlenrätsel)

```
  E R
+ N E
-----
  R U
```

oder anders dargestellt:

$$
\begin{array}{lll}
 & x_1 & x_2 \\
+ & x_3 & x_1 \\
 & x_5 & \\
\hline
 & x_2 & x_4
\end{array}
$$

3.5.5.20.1 Lösung durch Probieren

Anzahl der Möglichkeiten:
Man probiert für x_1, x_2, x_3 x_4, x_5 sämtliche Ziffern durch und prüft, ob die Summe stimmt und alle Ziffern verschieden sind.
Dazu muss man $10^4 \cdot 2 = 20000$ Möglichkeiten durchtesten (z.B. durch ein Computerprogramm).

3.5.5.20.2 schlechte Lösung

Die Gleichung als Formel
$10x_1 + x_2 + 10x_3 + x_1 = 10x_2 + x_4$ <==>
$11x_1 - 9x_2 + 10x_3 - x_4 = 0$
$11x_1 - 9x_2 + 10x_3 = x_4$
3 Unbekannte x1, x2, x3 frei wählen und x4 berechnen.
Durch Probieren braucht man 10^3 Möglichkeiten

3.5.5.20.3 Lösung durch Gausschen Algorithmus

```
x1 + x2        = x4 + 10·x5
x1 + x3 + x5   = x2
-------------------------------------
x1 + x2        - x4 - 10·x5 = 0
x1 - x2  + x3       +    x5 = 0
-------------------------------------
```

1. Lösung des Gausschen Algorithmus

Bemerkung:
Das LGS liegt zwar nicht in Stufenform vor, aber in "Pseudostufenform", d.h. man hat in jeder Zeile eine Spalte, die aus genau einer Zahl ungleich Null und sonst lauter Nullen besteht. Diese Spalten sind an verschiedenen Stellen. Jetzt muß nur noch aus den Zahlen ungleich Null jeweils eine 1 gemacht werden:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Op	KS
1	1	0	-1	-10	0	G1	-9
1	-1	1	0	1	0	G2	2
-1	-1	0	1	10	0	G3=G1/-1	9
1	-1	1	0	1	0	G4=G2	2

Eine Darstellung der Lösung
Durch Umformen ergibt sich:
$x_4 = x_1 + x_2 - 10x_5$
$x_3 = -x_1 + x_2 - x_5$

damit:

$$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5) \mid x_3=-x_1+x_2-x_5 \wedge x_4=x_1+x_2-10x_5 \wedge x_1 \in H \wedge x_2 \in H \wedge x_3 \in H \wedge x_4 \in H \wedge x_5 \in \{0;1\} \wedge x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \text{ alle verschieden}\}$$

wobei wir definieren:
Handy-Zahlen = H = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

Bemerkung:
Zum Beispiel ist für $x_1 = 9$; $x_2 = 8$; $x_5 = 0$ zwar
$x_4 = 9 + 8 - 10 \cdot 0 = 17$ und
$x_3 = -9 + 8 - 0 = -1$
aber $x_4 = 17$ und und $x_3 = -1$ sind keine Ziffern.

Anzahl der Möglichkeiten:
Das Ziel ist nun, die einzelnen Elemente der Lösungsmenge in aufzählbarer Form anzugeben. Dies geht (wahrscheinlich) nur durch probieren:
Man probiert für x_1, x_2, x_5 sämtliche Ziffern durch, berechnet x_3 und x_4, testet ob x_3 und x_4 Ziffern sind und prüft, ob alle Ziffern verschieden sind.
Dazu muss man 10^3 Möglichkeiten durchtesten (z.B. durch ein Computerprogramm) und prüfen, ob die Summe stimmt.

Vergleich reines Probieren - Gausscher Algorithmus
Die Anzahl der Lösungen der Lösungsmenge des Gausschen Algorithmus beträgt:
$10^2 \cdot 2 = 200$. Man muß also 50 mal weniger Möglichkeiten durchprobieren. Bei einem Computerprogramm verringert sich also die Rechenzeit um das 50-fache.

Einige Lösungen:
1)

$x_1 = 2$
$x_2 = 5$
$x_5 = 0 \implies x_3 = -2+5-0=3, \quad x_4 = 2+5-10\cdot 0=7$

```
  25
+ 32
-----
  57
```

2)

$x_1 = 2$
$x_2 = 9$
$x_5 = 1 \implies x_3 = -2+9-1=6, \quad x_4 = 2+9-10\cdot 1=1$

```
  29
+ 62
-----
  91
```

2. Lösung:
als Matrix:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Op	KS
1	1	0	-1	-10	0	G1	-9
1	-1	1	0	1	0	G2	2
1	1	0	-1	-10	0	G3=G1	9
0	2	-1	-1	-11	0	G4=G1-G2	-11
1	1	0	-1	-10	0	G5=G3	9
0	-2	1	1	11	0	G6=G4/-1	11

Eine Darstellung der Lösung
Durch Umformen ergibt sich:
$x_1 = -x_2 + x_4 + 10x_5$
$x_3 = 2x_2 - x_4 - 11x_5$
damit:
$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5) \mid x_1 \in H \wedge x_2 \in H \wedge x_3 \in H \wedge x_4 \in H \wedge x_5 \in \{0;1\} \wedge$
$x_1 = -x_2 + x_4 + 10x_5 \wedge x_3 = 2x_2 - x_4 - 11x_5 \wedge$
x_1, x_2, x_3, x_4 alle verschieden$\}$
wobei wir definieren:
Handy-Zahlen = H = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

Bemerkung:
Zum Beispiel ist für $x_2 = 9$; $x_4 = 8$; $x_5 = 1$ zwar
$x_1 = -9 + 8 + 10 = 9$ und
$x_3 = 18 - 8 - 11 = -1$
aber $x_3 = -1$ ist keine Ziffer.

Einige Lösungen:
1)
$x_2 = 5$
$x_4 = 7$
$x_5 = 0$ ==> $x_1 = -5+7-0=2$, $x_3 = 10-7-0=3$

```
  25
+ 32
-----
  57
```

2)
$x_2 = 9$
$x_4 = 1$
$x_5 = 1$ ==> $x_1 = -9+1+10=2$, $x_3 = 18-1-11=6$

```
  29
+ 62
-----
  91
```

3.5.5.21 Aufgabe 21 (Textaufgabe)

Ein Bauer will für genau 100 Euro Pferde, Kühe und Henne kaufen (kein Rückgeld). Eine Henne kostet 0,25Euro, eine Kuh 1 Euro und ein Pferd 15 Euro. Da er nur einen kleinen Bauernhof besitzt, muss die Anzahl der Pferde, Kühe und Hennen zusammen 100 ergeben. Der Bauer muss außerdem von jeder Tierart mindestens ein Tier kaufen.

Lösung:
Es sei:
Anzahl der Hennen: x_1
Anzahl der Kühe: x_2
Anzahl der Pferde: x_3

Dann gilt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$
$$0{,}25\, x_1 + x_2 + 15\, x_3 = 100$$

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	1	1	100	G1	103
0,25	1	15	100	G2	116,25
1	1	1	100	G3=G1	103
1	4	60	400	G4=4G2	465
1	1	1	100	G5=G3	103
0	-3	-59	-300	G6=G3-G4	-362
3	0	-56	0	G7=3G5+G6	-53
0	-3	-59	-300	G8=G6	-362
1	0	-56/3	0	G9 =G7/3	-53
0	1	59/3	100	G10=G8/-3	-362

3.5.5.21.1 Eine Darstellung der Lösung

Es gilt:

$$x_1 = 56/3 \cdot x_3$$
$$x_2 = 100-59/3 \cdot x_3$$

damit:

$$L = \{(x_1;\ x_2;\ x_3) \mid x_1 \in N_{100} \wedge x_2 \in N_{100} \wedge x_3 \in N_{100} \wedge x_1=56/3 \cdot x_3 \wedge x_2=100-59/3 \cdot x_3 \}$$

wobei $N_{100} = \{1, 2, 3, ...100\}$

Damit x_1 und x_2 ganzzahlig werden, muss x_3 ein Vielfaches von 3 sein.
Es bietet sich also an, es sofort mit $x_3 = 3$ zu probieren:

$$x_1 = 0 + 56/3 \cdot 3 = 56$$
$$x_2 = 100 - 59/3 \cdot 3 = 41$$
$$x_3 = 0 + 1 \cdot 3 = 3$$

Probe machen !!

Damit weiß man sofort:
$(56; 41; 3) \in L$

3.5.6 Programmieraufgabe
Der Gaussche Algorithmus soll mit Hilfe eines Struktogramms beschrieben werden.

3.5.7 Programmieraufgabe
Von einem linearen Gleichungssytem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten soll die Lösungsmenge berechnet und ausgegeben werden:

$$a_1 * x_1 + b_1 * x_2 = c_1$$
$$a_2 * x_1 + b_2 * x_2 = c_2$$