M1 Arbeitsblatt 4 für den Unterricht

1) Aufgabe

Ein Bildschirm eines einfachsten, experimentellen Fotoapparats besteht nur aus 4 Pixel mit einer Farbtiefe von 2 (d.h jedes Pixel kann nur die Farbe schwarz oder weiß annehmen).

Ein fiktiver Fotograf hat mit diesem Fotoapparat "alle theoretisch möglichen Bilder" fotografiert.
1) Wie viele verschiedene Bilder kann man mit diesem Fotoapparat aufnehmen?

Bemerkung:
Man könnte diese Bilder auch - ohne zu fotografieren – mechanisch erzeugen (oder durch ein Programm). 0 bedeutet weiß, 1 bedeutet schwarz.
Vervollständigen Sie das "Fotoalbum", in dem sich alle theoretisch möglich zu fotografierenden Bilder befinden

0 0	0 0					...	
0 0	0 1					...	
Schnee			Schach	Zebra			schwarzer Panther

2) Aufgabe

Ein Bildschirm eines digitalen Fotoapparats (bzw. Computers) besteht aus 1000 x 1000 Pixel mit einer Farbtiefe von 256. Jeder Pixel kann also durch 256 Farben dargestellt werden.

1) Wie viel Byte braucht man um ein ganzes Bild zu speichern?

2) Ein fiktiver Fotograf hat mit diesem Fotoapparat "alle theoretisch möglichen Bilder" fotografiert.
Wie viele verschiedene Bilder kann man mit diesem Fotoapparat aufnehmen?
(Ungefähre Abschätzung machen mit $2^{10} \approx 10^3$ bzw. $2^{10} \geq 10^3$)

3) Wie viel Byte Speicherplatz benötigt man, um alle Bilder zu speichern?

4) Wie viel Byte Speicherplatz insgesamt besitzen alle Menschen auf der Erde ?
Annahme: Es gibt 10 Mrd Menschen, die jeweils 1 TB Speicherplatz haben.
Könnte man diesen theoretisch nutzen, um darauf alle "alle theoretisch möglichen Bilder" zu speichern ?

3) Aufgabe

Eine Digitalkamera macht 100 Bilder pro Sekunde.
Ein Bild besteht - wie vorher auch - aus 1000 x 1000 Pixel mit einer Farbtiefe von 256.
Jeder Pixel kann also durch 256 Farben dargestellt werden.

1) Wie viel Byte Speicherplatz benötigt man, um einen Film zu speichern?

2) Ein fiktiver Filmproduzent hat mit dieser Digitalkamera "alle theoretisch möglichen Filme" gedreht, die jeweils ein Zeitdauer von einer Stunde haben.
a) Wie viele verschiedene Filme können damit gemacht werden?
b) Geben Sie die Zahl mit Hilfe von Zehnerpotenzen an
(Ungefähre Abschätzung machen mit $2^{10} \approx 10^3$ bzw. $2^{10} \geq 10^3$)

3) Wie viel Byte Speicherplatz benötigt man, um alle Filme zu speichern?

4) Der (mittlere) Abstand Erde - Mond beträgt 380 000 Kilometer.
Angenommen, man schreibt die Zahl (des benötigten Speicherplatzes, um alle theoretisch möglichen Filme zu speichern) ausführlich auf einen Papierstreifen, also in der Form:
x · 100000000000000000000000000000000000000000000..........................
(wobei 0<x<10) und man würde diesen Papierstreifen zwischen Erde und Mond aufspannen, wobei jede Null einen Zentimeter Platz verbraucht.
Würde diese Zahl auf den Papierstreifen passen ?

4) Aufgabe

Beweisen Sie folgende Behauptungen:

1) $\sqrt[n]{z^m} = (\sqrt[n]{z})^m$

2) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

4) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

5) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

5) Aufgabe

gegeben:
Ein Anfangskapital von 1000 Euro, das sich nach jedem Zeitabschnitt (z.B. 1 Jahr) verdoppelt.

gesucht:
1) Der Wachstumsfaktor q,
2) Das Kapital nach 0, 1, 2, 3, 4 Zeitabschnitten.
3) Das Kapital nach n Zeitabschnitten.

Lösung:

Bezeichnung Kapital nach 0, 1, 2, 3, ..., n Zeitabschnitten		anders geschrieben	Wachstumsfaktor q
K_0 =	1000		
K_1 =			
K_2 =			
K_3 =			
K_4 =			
…			
K_n =			

6) Aufgabe

Wie groß ist das Endkapital K_n nach n Zeitabschnitten bei einem Anfangskapital von K_0 und bei einem Wachstumsfaktor von q ?

7) Aufgabe

Wie groß ist der Wachstumsfaktor bei einem Zinssatz von 10 % und einem Kapital von 1000 Euro ?

8) Aufgabe

Wie groß ist der Wachstumsfaktor bei einem Zinssatz von p % ?

9) Aufgabe

Wie groß ist der Zinssatz bei einem Wachstumsfaktor von 2 ?

10) Aufgabe

Sie legen ein Anfangskapital von 10000 Euro bei einem Jahreszinssatz von 5% bei der Bank 10 Jahre lang an und lassen die Zinsen auf der Bank.
a) Wie groß ist das Kapital nach 10 Jahren
b) Wann hat sich das Kapital verdoppelt ? (Durch Probieren mit dem Taschenrechner lösen)

Arbeitsblatt zum Thema: ____

Standard-Aufgabe

gegeben:
$K_0 = 1$
p% = 100 % Jahreszins

gesucht:
Das Endkapital nach 1 Jahr bei einem Zinszuschlag nach jeweils

$1\ Jahr, \quad \frac{1}{2}\ Jahr, \quad \frac{1}{3}\ Jahr, \quad \frac{1}{4}\ Jahr, \quad .... \quad \frac{1}{n}\ Jahr$

Jahre	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{n}$
Zinssatz						
q						
also q =						

Entwicklung des Endkapitals:

$1\ Jahr$	$\frac{1}{2}\ Jahr$	$\frac{1}{3}\ Jahr$	$\frac{1}{n}\ Jahr$

Merke:

11) Aufgabe

Berechnen Sie mit Hilfe der Logarithmensätze (wenn möglich auf verschieden Arten):

1)

$\log_{10}(100 \cdot 1000) =$

2)

$\log_{10} \frac{100000}{1000} =$

3)

$\log_{10} 100^3 =$

4)

$\log_{10} 1000 =$

5)

$\log_{\pi} 9{,}321 =$

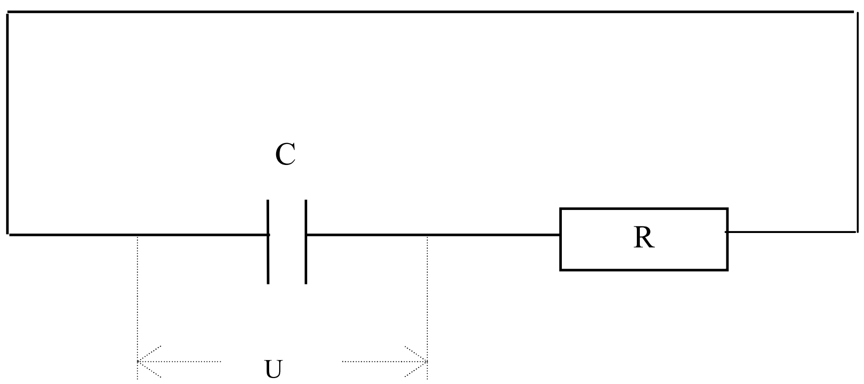
11.6) „Beweisen“ Sie, dass folgendes gilt:

$$\frac{\ln x - \ln y}{\ln z} = \frac{\log_{10} x - \log_{10} y}{\log_{10} z}$$

11.7) Wie viele Bit braucht man, um 1024 verschiedene Zustände zu speichern ?

12) Aufgabe (Spannungsverlauf beim Entladen des Kondensators)

Zeichnung:



Definition:

$\tau = RC$

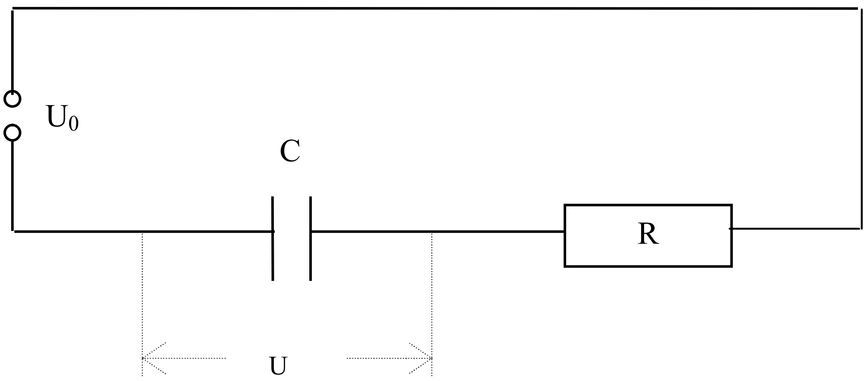
In Abhängigkeit der Zeit gilt:

$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$; wobei $U_0 \neq 0$, $R \neq 0$, $C \neq 0$

Formen Sie nach t um.

13) Aufgabe (Spannungsverlauf beim Aufladen des Kondensators)

Zeichnung:



In Abhängigkeit der Zeit gilt:

$U = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$; wobei $U_0 \neq 0$, $R \neq 0$, $C \neq 0$

Formen Sie nach t um.

14) Aufgabe

In manchen Formelsammlungen steht statt der Formel:

$$t = -RC \cdot \ln(1 - \frac{U}{U_0})$$

die Formel:

$$t = RC \cdot \ln(\frac{U_0}{U_0 - U})$$

Zeigen Sie, dass diese 2 Formeln äquivalent sind.

15) Aufgabe

A1) Wie groß ist das Anfangskapital, das sich bei einer jährlichen Verzinsung von 6 % Jahreszinssatz in 5 Jahren auf 1000 Euro vermehrt ?

A2) a) Wie hoch muss der Jahreszinssatz sein, damit in 10 Jahren aus 100 Euro das Doppelte wird ?
b) Gilt das auch für ein Anfangskapital von 1000 Euro ? Begründen Sie !
c) Herr Maier behauptet: Wenn man in 10 Jahren sein Kapital nicht verdoppeln, sondern Verachtfachen will, dann muß man die jährliche Verzinsung Vervierfachen.
Hat er recht ? Begründen Sie !

A3) a) In wie viel Jahren vermehrt sich ein Anfangskapital von 1000 Euro bei einer jährlichen Verzinsung von 5 % Jahreszinssatz auf das Doppelte ?
b) Gilt das auch für ein Anfangskapital von 10000 Euro ? Begründen Sie !
c) Herr Schnell behauptet: Wenn sich die jährliche Verzinsung von 5 % verdoppelt, dann halbiert sich die Zeit, bis sich das Kapital verdoppelt. Hat er recht ? Begründen Sie !

Arbeitsblatt zum Thema: ____

Zeichnen Sie (auf Papier) die Schaubilder der folgenden Funktionen (in **ein gemeinsames** Koordinatensystem):

$f_1(x) = 2^x$

$f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$f_3(x) = 3^x$

$f_4(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Fragen:
1) Geben Sie die Definitionsmenge D der obigen Funktionen an.

2) Geben Sie den Wertebereich W der obigen Funktionen an.
Schneiden die Schaubilder K_{f1}, K_{f2}, K_{f3}, K_{f4} die x-Achse ?

3) Warum darf bei der Funktion $f(x) = a^x$
nicht $a < 0$ sein ?
Was würde dann passieren ?

4) Durch welchen gemeinsamen Punkt gehen die Funktionen ?

5) In welcher Beziehung stehen die Schaubilder
a) K_{f1} und K_{f2}
b) K_{f3} und K_{f4}

6) a) Was versteht man wohl unter einer "monoton zunehmenden" bzw. "monoton abnehmenden" Funktion ?
b) Welche der obigen Schaubilder K_{f1}, K_{f2}, K_{f3}, K_{f4} sind monoton zunehmend bzw. monoton abnehmend ?
c) Für welche Werte der Basis a sind die Schaubilder der Funktionen
$f(x) = a^x$
monoton zunehmend bzw. monoton abnehmend ?

7) Warum verläuft K_{f1} im 1. Quadranten unterhalb und im 2. Quadranten oberhalb von K_{f3} ?
Begründen Sie mathematisch!

Arbeitsblatt zum Thema: ______________________________________

Standard-Aufgabe

1) Skizzieren Sie (ohne Taschenrechner) die Schaubilder der folgenden Funktionen.
Zeichnen Sie diese in **ein** Koordinatensystem ein.
Beachten Sie dabei wie die Schaubilder zueinander liegen (oberhalb, unterhalb, usw.)
Beschreiben Sie, wie das nachfolgende Schaubild aus dem vorhergehenden hervorgeht (z.B. Verdopplung der y-Werte, Spiegelung an der y-Achse, unterhalb der letzten Kurve, oberhalb der letzten Kurve, usw.).
Angenommen, man kennt nur den Verlauf der zu der Funktionsgleichung $f_1(x) = 3^x$ zugehörigen Kurve K_{f1} (z.B. mit TR gezeichnet).
Wie kann man dann die die folgenden Schaubilder skizzieren?

$f_1(x) = 3^x$

$f_2(x) = 3^{\frac{1}{2}x}$

$f_3(x) = 3^{-\frac{1}{2}x}$

$f_4(x) = 0{,}5 \cdot 3^{-\frac{1}{2}x}$

$f_5(x) = -0{,}5 \cdot 3^{-\frac{1}{2}x}$

$f_6(x) = 1 - 0{,}5 \cdot 3^{-\frac{1}{2}x}$

$f_7(x) = 4 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 3^{-\frac{1}{2}x})$

2) a) Geben Sie die Asymptoten zu jedem Schaubild an.
b) Gegen welchen Funktionswert strebt für große positive x-Werte die jeweiligen Funktionen?

16) Aufgabe

Benutzen Sie den Taschenrechner TR, um festzustellen gegen welchen Wert

1) $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

strebt, wenn Δx "gegen 0 geht"

2)

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von:

$f(x) = e^x$

17) Aufgabe

Wie heißt die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden, die das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$h(x) = e^x$

berührt ?

Geben Sie den Berührpunkt an.

18) Aufgabe

Geben Sie die Exponentialfunktion der Form

$f(x) = c \cdot a^x$ (a >0)

an, die durch die folgenden Punkte geht:

P(0|6), Q(5|2)

19) Aufgabe

Bestimme das unbestimmte Integral:

$\int e^{kx} dx$, wobei $k \in R$

20) Aufgabe

Das Schaubild der Funktion f mit:

$f(x) = e^{-x}$, $x \in R$

die Gerade mit der Gleichung x = a, die y-Achse und die x-Achse schließen für a > 0 im 1.Quadranten eine Fläche ein, die von a abhängt.

1) Berechnen Sie diese Fläche.

2) Welchen Wert hat die Fläche, wenn a gegen unendlich strebt?

Berechen Sie.

21) Aufgabe

1) Wie heißt die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden, die das Schaubild K_h der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$h(x) = e^{kx}$ $k \in R$

berührt ?

Geben Sie den Berührpunkt an.

2) Berechnen Sie die Fläche A zwischen dieser Ursprungsgerade, K_h und der y-Achse im 1. Quadranten.

3) Gegen welchen Wert strebt A, wenn k gegen unendlich strebt?

Machen Sie sich dies auch anschaulich klar, indem Sie für k einen großen Wert nehmen und sich dann vorstellen, wie die Kurve aussieht.

22) Aufgabe

1) $2\lg x - \lg 3 = 2$

2) $2 \cdot 4^{x-1} = 3^{2x}$

3) $4 \cdot 2^{x} - 2^{-x} = 3$

Arbeitsblatt zum Thema: ____

Standard-Aufgabe

Zeichnen Sie (auf Papier) die Schaubilder der folgenden Funktionen (in **ein gemeinsames** Koordinatensystem):

$$h_1(x) = \log_2(x)$$
$$h_2(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$$
$$h_3(x) = \log_3(x)$$
$$h_4(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$$

Fragen:
1) Geben Sie die Definitionsmenge D der obigen Funktionen an.
Schneiden die Schaubilder K_{h1}, K_{h2}, K_{h3}, K_{h4} die y-Achse ?

2) Geben Sie den Wertebereich W der obigen Funktionen an.
Schneiden die Schaubilder K_{h1}, K_{h2}, K_{h3}, K_{h4} die x-Achse ?

3) Warum kann bei einer negativen Basis a für die Funktion
$f(x) = a^x$
nicht D = R sein ?

4) Durch welchen gemeinsamen Punkt gehen die obigen Schaubilder ?

5) In welcher Beziehung stehen die Schaubilder
a) K_{h1} und K_{h2}
b) K_{h3} und K_{h4}

6) Für welche Werte von a ist die Logarithmusfunktion
$h(x) = \log_a x$
monoton steigend bzw. monoton fallend ?

7) Wann verlaufen die Schaubilder K_{h1}, K_{h2}, K_{h3}, K_{h4} oberhalb, wann unterhalb der x-Achse ?