M1 Arbeitsblatt 3 für den Unterricht

1) Aufgabe

Ein Konstrukteur einer Skateboardbahn, die die Form einer Normalparabel hat, muss in jedem Punkt die Zentrifugalkraft (Anpressdruck) berechnen, die auf den Skateboarder einwirkt. Dazu muss er u.a. den Krümmungsradius in jedem Punkt berechnen.
Zu diesem Zweck muss die Steigung in jedem Punkt der Normalparabel berechnet werden.

Frage:
Wie kann man die Steigung in einem Punkt der Normalparabel bestimmen, z.B. in $P(2|4)$?
Erlaubte Werkzeuge: Geodreieck und eine Normalparabel ist aus festem Draht

2) Aufgabe

Zeichnen Sie die Tangenten der Normalparabel für die folgenden Punkte ein und lesen Sie jeweils die Steigung ab :
$Q_1(0{,}5 \mid 0{,}25)$
$Q_2(1 \mid 1)$

Frage:
Wie kann man die Steigung einer Tangente einer beliebigen Kurve in einem beliebigen Punkt **näherungsweise** bestimmen ?
Hilfestellung: Praktisches Vorgehen mit Säge oder Schere

3) Aufgabe

Berechnen Sie die Steigungen in $Q_1(0{,}5 \mid 0{,}25)$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit Ihrer Zeichnung.

4) Aufgabe

In welchem Punkt hat die Normalparabel die Steigung 3 ?
Zeichnerische und rechnerische Lösung !

5) Aufgabe

Berechnen Sie die Steigung der Normalen in $P(2|4)$ und zeichnen diese ein.

6) Aufgabe

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von:
$f(x) = x^2 + c, \quad c \in R$
Begründung Sie durch Anschauung und durch Rechnung.

7) Aufgabe

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von:
$f(x) = 2x^2$

8) Aufgabe

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von:
$f(x) = ax^2 + bx + c$

9) Aufgabe

Berechnen Sie den Scheitel der Parabel mit der Funktionsgleichung:

10) Aufgabe

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von:

1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 8$

2) $g(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2$

3) $h(x) = 5x^2 + 10x^3 + 22x$

11) Aufgabe

Wo hat die Funktion mit der Funktionsgleichung
$h(x) = x^3$
eine negative Steigung?
Rechnerische und zeichnerische Begründung!

12) Aufgabe

Bilde mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen von:

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \sin(2x)$

$f(x) = 5\cos(4x) + 6$

$f(x) = e^{2x+5}$

$f(x) = \log_2 x$

$f(x) = 2 \cdot e^{4x+1} + 3 \cdot \cos(5x-2) + 4 \cdot \log_3(3x) + 10$

13) Aufgabe

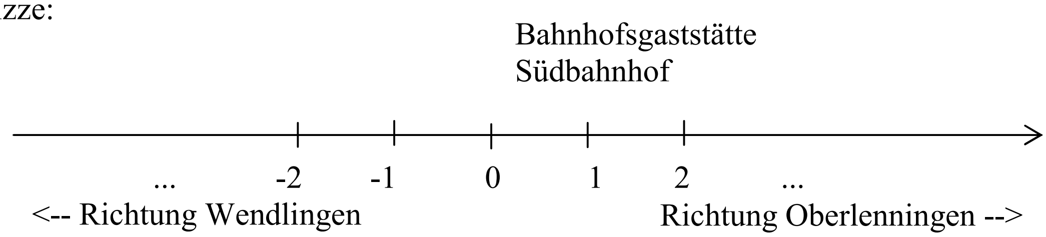
In welchen Punkten hat das Schaubild der Funktionsgleichung
$f(x) = x^3$
a) die Steigung 2 ?
b) eine negative Steigung (zeichnerische + rechnerische Begründung)

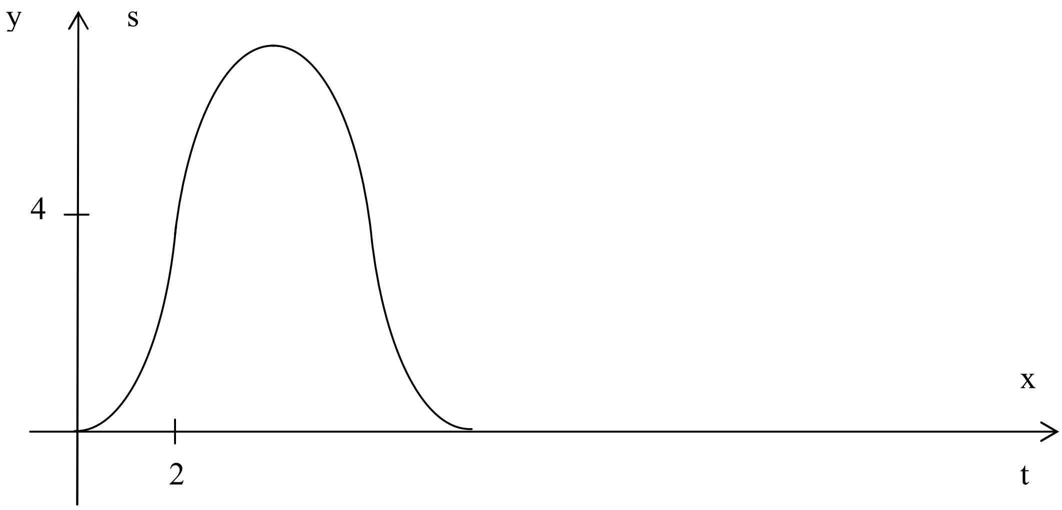
14) Aufgabe

Ein Zugfahrplan gibt an, wann ein ein Zug an einer bestimmten Stelle (z.B. Dettingen/Teck) eintrifft, d.h. zu welcher Zeit er sich dort befindet. Verallgemeinern wir dir dieses Szenario: Ein Zug befindet sich nach einer bestimmten Zeit t an einer bestimmten Stelle s des Bahndamms.
Auf der x-Achse, die hier auch mit t bezeichnet wird, wird die Zeit in der Einheit Stunden angegeben. Auf der y-Achse, die hier auch mit s bezeichnet wird, wird der Abstand vom Ursprung in der Einheit Kilometer angegeben.
Ein allgemeiner Fahrplan gibt zu welchem Zeitpunkt t sich ein Zug an welcher Stelle x des Bahndamms befindet.
Das zugehörige Schaubild befindet sich unten.

Bemerkung:
Die Kurve besteht aus 4 Teilen einer Normalparabel im Bereich [0 ; 2].

Skizze:





1) Wo befindet sich der Reisende am Anfang und am Ende der Zugfahrt ?
Fährt der Zug nur vorwärts oder auch rückwärts ?

2) a) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit nach 4 Stunden ($\Delta t = 4$) ?
b) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit nach 8 Stunden ($\Delta t = 8$) ?

3) Da die Bahn immer weniger Geld in die Instandhaltung des Schienennetzes investiert, vertragen die Bahnschienen auch nicht mehr die alten Geschwindigkeiten.
Deswegen wird eine Firma beauftragt, aus dem obigen Schaubild die momentane Geschwindigkeit des Zuges zu jedem Zeitpunkt zu ermitteln.
Außerdem hat auch die Polizei Interesse daran festzustellen, ob jederzeit die Höchstgeschwindigkeit nicht überschritten wurde.
a) Ermitteln Sie zuerst die Momentangeschwindigkeit des Zugs zum Zeitpunkt $t = 1$
Tipp: Machen Sie dies, mit Hilfe einer Radarfalle, die Sie nachts auf der Strasse gefunden haben.

4) Beschreiben Sie die Fahrt des Zuges (bzgl. der Geschwindigkeit) vom Standpunkt eines Reisenden.

5) Da der TÜV dazu da ist, die Gesundheit der Zugreisenden zu schützen, wird er beauftragt, die Geschwindigkeitsänderung des Zuges zu untersuchen (gibt es evtl. Geschwindigkeitsänderungen, wie bei einer Fahrt eines Autos auf einen Baum oder bei Achterbahnen auf dem Rummelplatz?).
Wie kann man diese Info dem s(t) - Diagramm entnehmen ?

6) Bestimmen Sie zeichnerisch s' und s''. Was bedeuten s' und s'' physikalisch?

15) Aufgabe

Legen Sie an das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = \frac{1}{8}x^3$$

Tangenten parallel zur Gerade mit der Funktionsgleichung
f(x) = 1,5 x
Bestimmen Sie den Berührpunkt.

16) Aufgabe

Gegeben ist die Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{13}{4}$$

a) Bestimmen Sie den Scheitel der Parabel
b) Legen Sie die Tangenten in den Punkten $B_1(-5 \mid ?)$ und $B_2(1 \mid ?)$ der Kurve K_f und bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Tangenten.
Zeichnen Sie das Schaubild von f in einem geeigneten Bereich auf der x-und auf der y-Achse.
1 LE = 1 cm
interne Bemerkung: x-Achse: [-6;2], y-Achse: [-7;2], 1 LE = 1 cm

17) Aufgabe

Legen Sie von P(-2 | 1) aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{13}{4}$$

Bestimmen Sie die Berührpunkte und die Funktionsgleichungen der Tangenten.

18) Aufgabe

Legen Sie von P(-1 | 1) aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung
$f(x) = 3x^3 - 5x^2 - x$
Bestimmen Sie die Berührpunkte und die Funktionsgleichungen der Tangenten.

19) Aufgabe

Geben Sie Beispiele für Funktionen f, g, h mit folgenden Eigenschaften:
f ist streng monoton wachsend.
g ist streng monoton fallend.
h ist weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend.

20) Aufgabe

Welche Eigenschaft muss die Steigung einer Funktion in jedem Punkt haben, um daraus schließen zu können, dass sie streng monoton wachsend ist ?

21) Aufgabe

a) Die Steigung einer Funktion f an der Stelle x_0 sei: $f'(x_0) > 0$
b) Die Steigung einer Funktion fan der Stelle x_0 sei: $f'(x_0) < 0$
c) Die Steigung einer Funktion f an der Stelle x_0 sei: $f'(x_0) = 0$

Was kann man dann jeweils über den Verlauf des Schaubilds K_f in einer "kleinen" Umgebung von x_0, abgekürzt $U(x_0)$ (= kleines Intervall mit Mittelpunkt x_0) aussagen ?
Machen Sie sich dies anhand einiger Beispiele (Zeichnungen) klar.
Warum gilt das nur für ein kleines Intervall ?

Betrachten Sie für den Fall c) die zwei Funktionen
$f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = - x^3$ an der Stelle, wo die Steigung 0 ist.

22) Aufgabe

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem VZW (von - nach + bzw. von + nach -) einer Funktion f an der Stelle x_N und
a) dem Funktionswert $f(x_N)$
b) dem Verlauf des Schaubilds K_f in einer "kleinen" Umgebung $U(x_N)$?

23) Aufgabe

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem VZW (von - nach + bzw. von + nach -) einer Funktion f an der Stelle x_N und $f'(x_N)$ bzw. $f(x_N)$.

24) Aufgabe

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Umkehrung nicht gilt, dass also folgendes falsch ist:
1)
$f(x_N) = 0 \wedge f'(x_N) < 0$ **<==** f macht an der Stelle x_N einen VZW von + nach -

2)
$f(x_N) = 0 \wedge f'(x_N) > 0$ <== f macht an der Stelle x_N einen VZW von - nach +

25) Aufgabe

Einführendes Beispiel zu Extrempunkten

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{21}{16}$$

$$f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{9}{16}$$

$$f''(x) = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}$$

Aufgaben und Fragen

1) Zeichnen Sie die Schaubilder von f, f ' und f'' im x-Bereich [-5; 3] und y-Bereich [-2; 3], 1 LE = 1 cm jeweils **untereinander** in 3 verschiedene Koordinatensysteme ein.
Erstellen Sie dazu zuerst mit Hilfe des Taschenrechners eine Wertetabelle.

2) Wenn man die Kurve K_f z.B. in der Draufsicht als eine Rennstrecke interpretiert, die von links nach rechts durchfahren wird, dann besteht diese Kurve aus einer Rechts und einer Linkskurve.
Wo ungefähr (in welchem Bereich auf der x-Achse) befindet sich die Linkskurve bzw. die Rechtskurve ?

3) Zeichnen Sie den Tiefpunkt T und den Hochpunkt H der Kurve K_f ein.
Warum sagt man zu einem Tiefpunkt auch relatives Minimum und zu einem Hochpunkt relatives Maximum ?
Bem: Einen Hochpunkt bzw. Tiefpunkt nennt man auch Extrempunkt.

4) Welcher Zusammenhang besteht zwischen einer Links- bzw. Rechtskurve und einem Hoch- bzw. Tiefpunkt ?

5) Welche Eigenschaft hat eine Links- bzw. Rechtskurve ?
Schauen Sie sich dazu die Schaubilder der obigen Funktionen an.
Wie verhalten sich die Ableitungen, wenn die Kurve von links nach rechts durchlaufen wird ?
Wie kann man dies mathematisch beschreiben ?

6) a) Welche Eigenschaft (Ableitung) hat ein Extrempunkt ?
b) Wie verändert sich der y-Wert innerhalb einer gewissen Umgebung ("kleines Intervall") links und rechts des Tiefpunkts (Hochpunkts), wenn x zunimmt ?
c) Wie verändert sich die Steigung in einer gewissen Umgebung ("kleines Intervall") des Tiefpunkts (Hochpunkts), wenn x zunimmt ?
Schauen Sie sich dazu die Schaubilder der obigen Funktionen an.

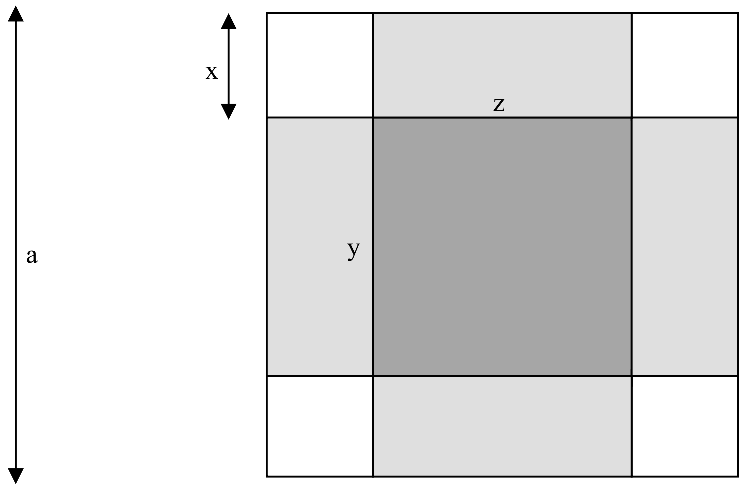
7) a) Was versteht man wohl in der obigen Kurve K_f unter einem Wendepunkt ?
Stellen Sie sich dazu vor, was mit dem Lenkrad eines Autofahrers in diesem Punkt geschieht.
b) Zeichnen Sie den Wendepunkt der Kurve ein.
c) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf einer "prinzipiell anderen Rennstrecke", die auch einen Wendepunkt besitzt.
d) Wie groß ist $f''(x_w)$? Begründen Sie !
e) Wie verändert sich f '(x) innerhalb einer gewissen Umgebung links und rechts des Wendepunkts, wenn x zunimmt ?

26) Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$
Untersuchen Sie das Schaubild K_f dieser Funktion bzgl:
a) Symmetrie (Punktsymmetrie / Achsensymmetrie)
b) Achsenschnittpunkte
c) Ableitungen
d) Extrempunkte
e) Wendepunkte
f) Wendetangenten

27) Aufgabe

Aus einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge a = 10 soll eine oben offene Schachtel geformt werden. Dazu sollen an den Ecken quadratische Segmente der Länge x entfernt werden und die so entstehenden Seitenwände hochgeklappt werden. Je nach Größe der entfernten Segmente entstehen Schachteln mit unterschiedlicher Form und Volumen. Wie ist x zu wählen, damit das Volumen der Schachtel (Aschenbecher) am größten wird ?



28) Aufgabe

gegeben:
Die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 15)$$

Im 1. Quadranten soll dem Schaubild von f ein Dreieck RST einbeschrieben werden. Die Ecke R sei auf der x-Achse beweglich. S(5|0) bleibt fest und T liegt senkrecht über R auf dem Schaubild K_f.

gesucht:
Für welchen Punkt R wird die Dreiecksfläche am größten ?

Arbeitsblatt zum Thema: ____

Aufgabe

Eine Autovermietungsfirma berechnet die Kosten ihrer Verleihung nach den gefahrenen Kilometern. Nach der Vermietung eines "alten" Autos kann der Kilometerstand nicht mehr abgelesen werden, weil der Kilometerzähler "plötzlich" und "völlig unerwartet" defekt wurde. Der Autovermieter will trotzdem mit Hilfe des eingebauten Fahrtenschreibers die gefahrenen Kilometer berechnen.
Beim Fahrtenschreiber wird auf der y-Achse die Geschwindigkeit v (hier in km/h) und auf der x-Achse die gefahrene Zeit t(hier in Stunden) angegeben.

1) Wie ist die negative Geschwindigkeit zu interpretieren?

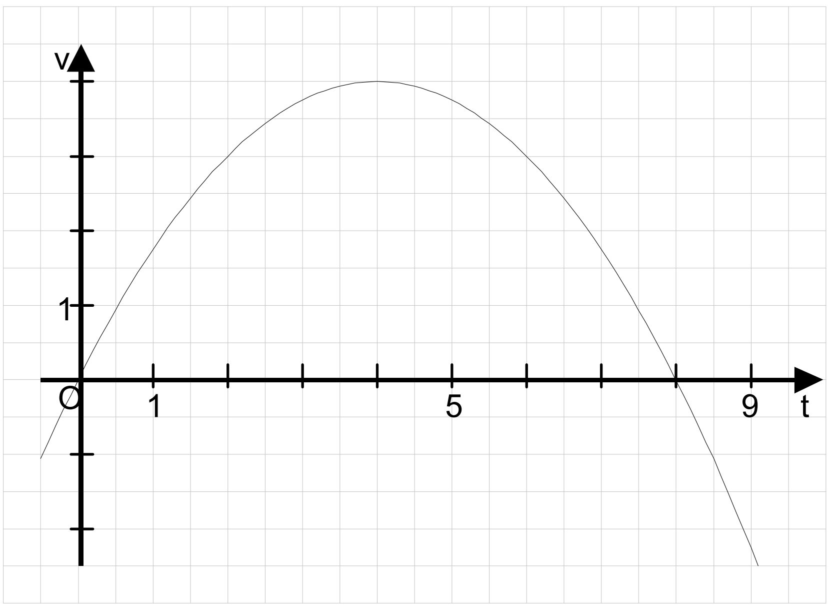
2) Ermitteln Sie durch abmessen und rechnen aus dem folgenden Schaubild eines hypothetischen Fahrtenschreibers Folgendes:
a) die **tatsächlich gefahrenen** Kilometer (Näherung) nach 9 Stunden
b) den **Kilometerstand** nach 9 Stunden. (Der Kilometerstand bei Fahrtantritt ist 0).

Achtung:
Wenn man mit einem "alten" Auto rückwärts fährt oder aus "Versehen" über Nacht dieses Auto auf einer Hebebühne im Rückwärtsgang "fahren" läßt, läuft der Kilometerzähler rückwärts.

3) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit nach 9 Stunden (Näherung) ?

Später lösen !!!
4) Untersuchungen haben ergeben, dass zu der Kurve die folgende Funktionsgleichung gehört:
$v(t) = -0{,}25(t-4)^2 + 4$

Berechnen Sie den exakten Wert der zurückgelegten Strecke



Aufgabe 23

1) $f(x) = x^2$

Berechne die Fläche zwischen dem Schaubild K_f, der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 1$.

2) $f(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2$

a) Berechne die Fläche zwischen der x-Achse und dem Schaubild K_f der Funktion f.
b) Berechne die Fläche zwischen dem Schaubild K_f, der x-Achse und den Geraden $x = 2$ und $x = 4$.
c) Berechne die Fläche zwischen dem Schaubild K_f, der x-Achse und den Geraden $x = -2$ und $x = 4$.
d) Wie groß ist die bilanzierte Fläche zwischen dem Schaubild K_f der Funktion f, der x-Achse und den Geraden $x = -2$ und $x = 4$?

Aufgabe 24

Berechnen Sie die Fläche, welche die Schaubilder folgender Funktionen einschliessen

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

$g(x) = -x^2 + 2x + 5$

Bestimmen Sie dazu zunächst die Schnittpunkte von f und g.