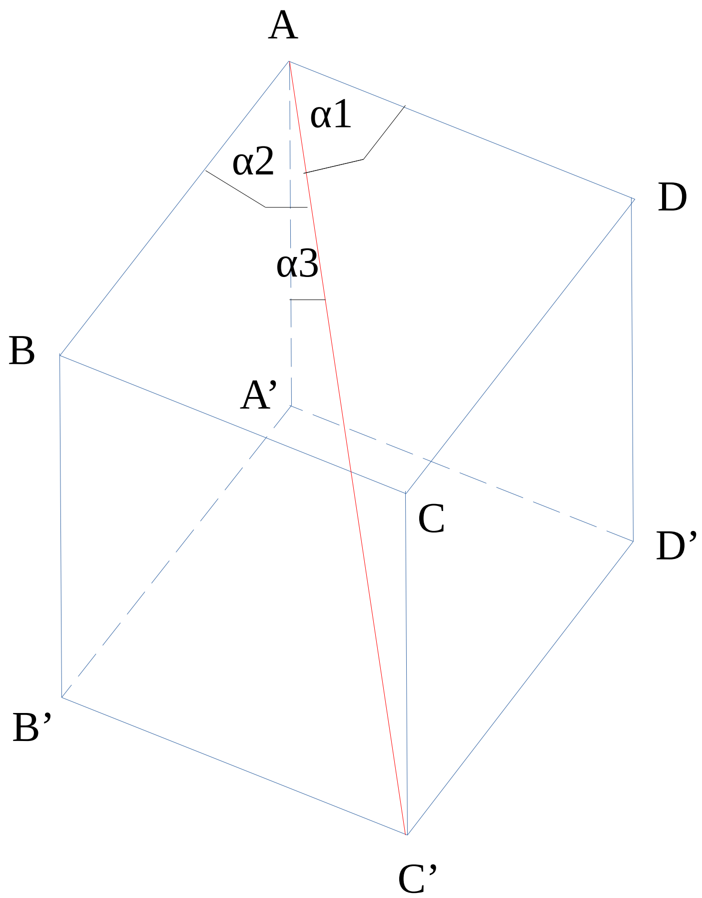
AUFGABE Würfel durchbohren
(Bereich: Vektorrechnung)

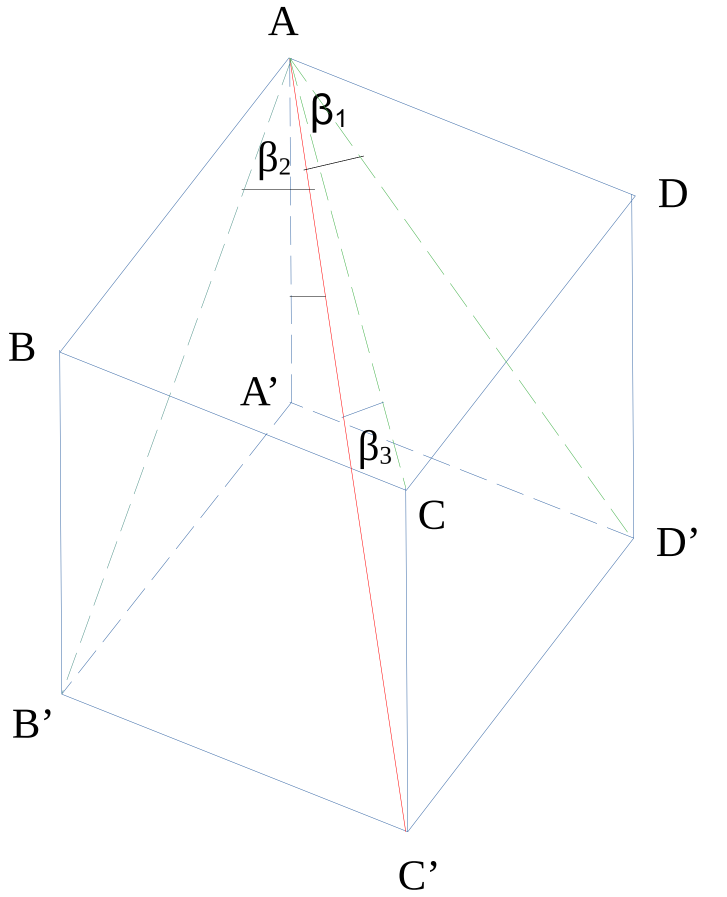
I)
Fräsen Sie eine Öffnung in einen Würfel der Kantenlänge 1, die so groß ist, dass ein gleich großer Würfel durchpasst.

Tipp:
Falls diese Aufgabe zu schwierig sein sollte, lösen Sie bitte zuerst folgende Aufgabe aus der Vektorrechnung.

II)
Zeichnung des Würfels mit Kantenlänge k=1
Die Raumdiagonale AC' bildet mit AD, AB und AA' jeweils den Winkel
α_1 , α_2 , α_3



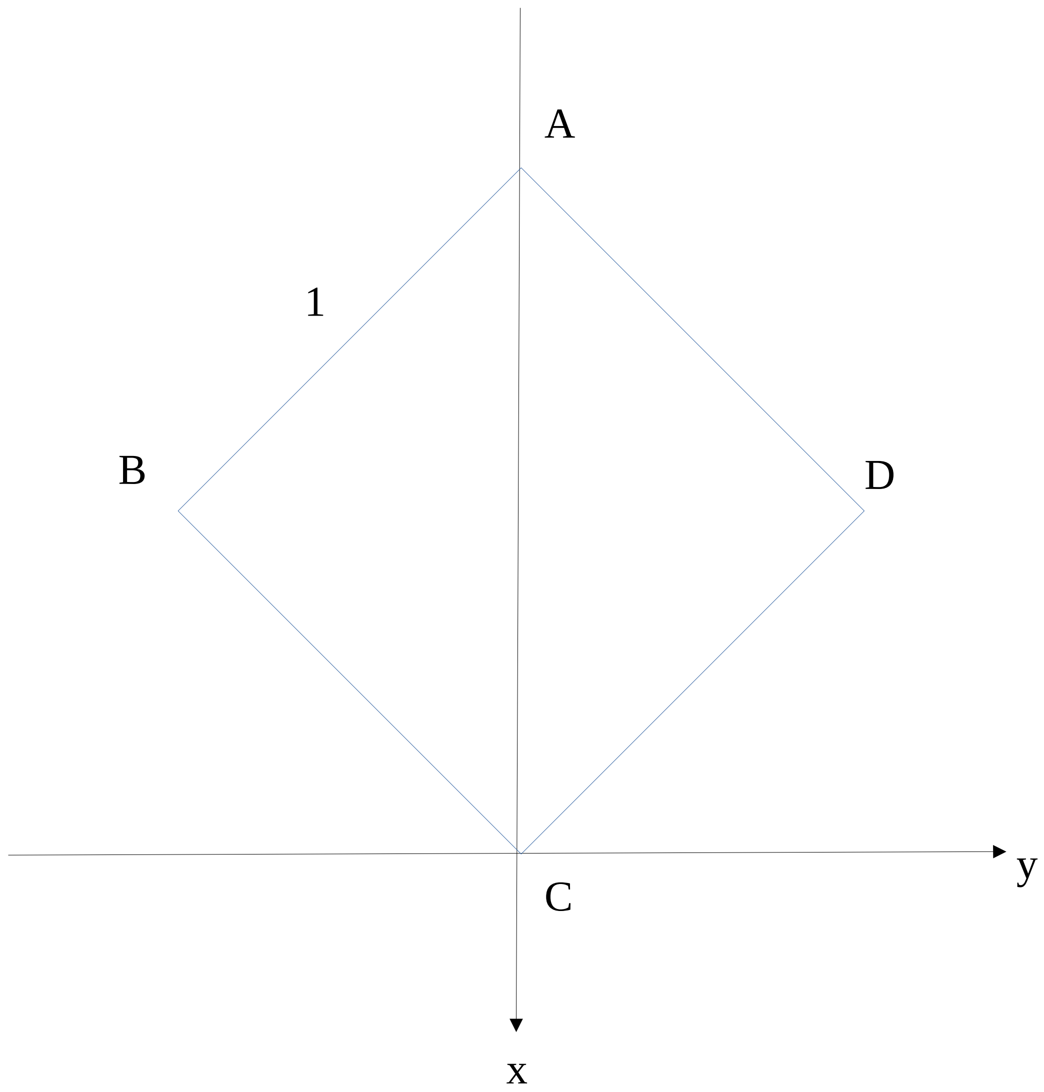
Die Raumdiagonale AC' bildet mit AD', AB' und AC jeweils den Winkel β_1 ,β_2 , β_3



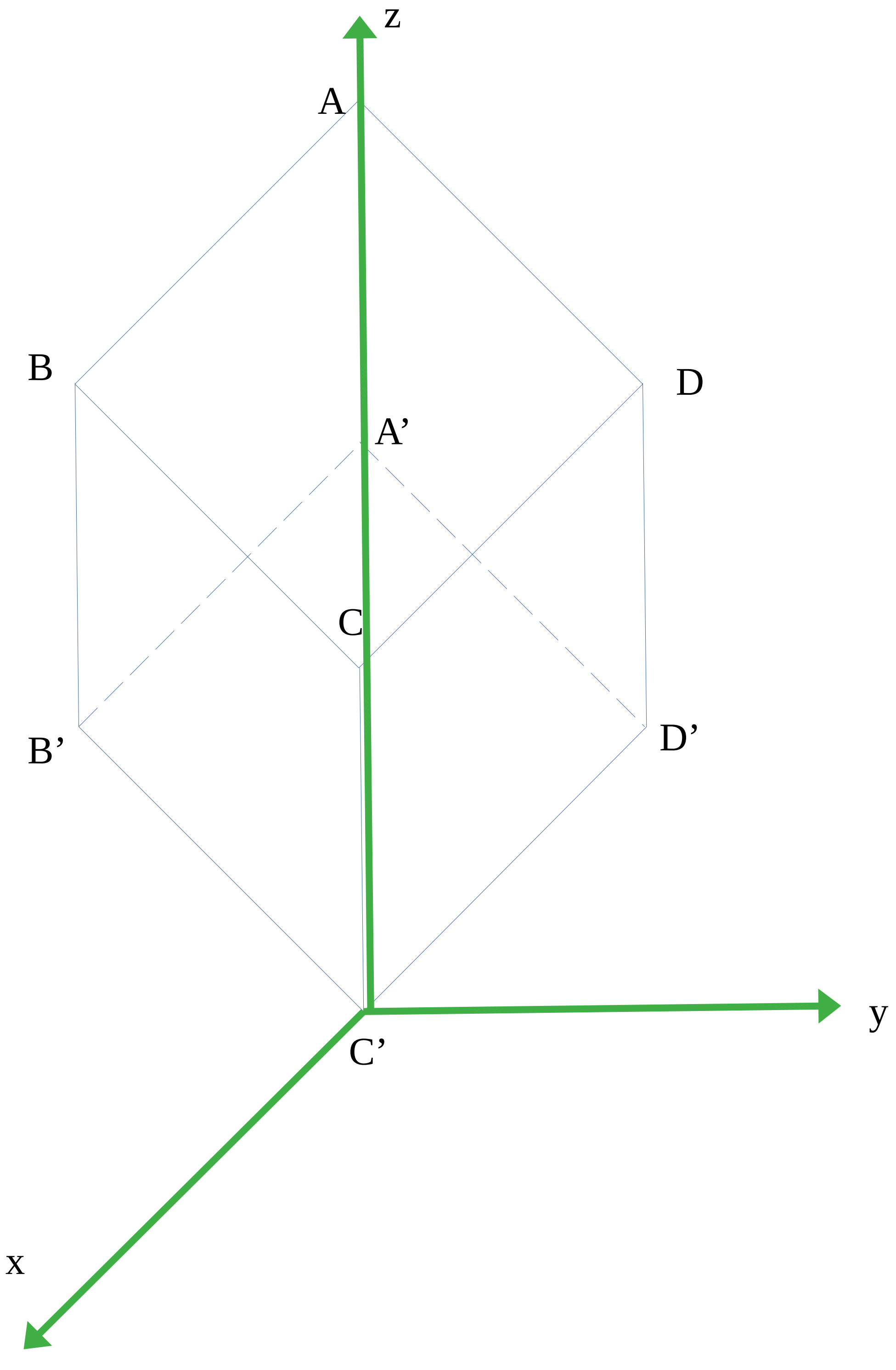
Dieser Würfel wird nun so verschoben und gedreht, dass C' im Ursprung eines dreidimensionalen x,y,z-Koordinαatensystems steht, und A' auf der negativen x-Achse liegt.

Eine Draufsicht auf den Würfel ergibt dann folgendes Bild:

A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' bzw. D, D' haben jeweils die gleichen x,y-Koordinaten. Deshalb verdecken A, B, C, D dann jeweils A', B', C', D'



Dann wird dieser verschobene Würfel um die y-Achse in Richtung der positiven z-Achse um den Winkel φ gedreht, so dass A senkrecht über C’ steht.



Arbeitsaufträge
1)
a) Zeigen Sie:
$\alpha := \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

b)
Zeigen Sie:
$\beta := \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

c)
Wie groß ist der Winkel φ ?

2)
a) Durch welche Ebene gehen die Punkte A', A, C' ?
b) Durch welche Ebene ist der verschobene Würfel ebenensymmetrisch ?

3)
a)
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, A', B', C', D'

b)
Die Punkte A, B, C, D, A', B', C', D' werden in die x-y-Ebene projiziert und ergeben dort die Punkte A_p , B_p , C_p , D_p , A'_p , B'_p , C'_p , D'_p
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

c) Zeigen Sie, dass die 6 Dreiecke
$A_p\ A'_p\ B'_p$
$A_p\ B'_p\ B_p$
$A_p\ B_p\ C_p$
$A_p\ C_p\ D_p$
$A_p\ D'_p\ A'_p$
$A_p\ D_p\ D'_p$
jeweils gleichseitig sind.
Berechnen Sie diese Seitenlänge

4)
Zeichnen Sie ein die senkrechte Projektion des Würfels (mit seinen projizierten Punkten) in ein zweidimensionales x-y-Koordinatensystem ein.
a)
Welche Figur entsteht durch diese Projektion?

b)
Zeichnen Sie in ein regelmäßiges Sechseck (alle Seiten und alle Winkel sind gleich groß) mit der Seitenlänge l ein Quadrat ein.
Berechnen Sie die Seite s des Quadrats in Abhängigkeit von l.

c)
Berechnen Sie den Wert s für l= $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Lösung zu II)

a)

Betrachte dazu jeweils die 3 rechtwinkligen Dreiecke ABC', ADC', AA'C'

Die 3 Seiten dieser Dreiecke haben die Längen

1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

$\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ bzw. $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

b)

$\cos(\beta)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ bzw. $\sin(\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

c)

φ = α

2)

a) Die Punkte A', A, C' gehen durch die x-z-Ebene

b) Der verschobene Würfel ist ebenensymmetrisch zur x-z-Ebene

3)

3a,b.1)

3.1) Berechnung von A

A(0 | 0 | $\sqrt{3}$)

also:

A_p(0 | 0 | 0)

3a,b.2) Berechnung von A'

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{AA'}$

h / 1 = cos (α) => h = $\frac{1}{\sqrt{(3)}}$

p / 1 = sin (α) => p = $\frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$ also:

$$\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix}$$

Damit:

A'(- $\frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$ | 0 | $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{(3)}}$) = A'(- $\frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$ | 0 | $\frac{2}{\sqrt{(3)}}$)

also:

A'_p (- $\frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$ | 0 | 0)

3a,b.3) Berechnung von B

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{AB}$

a) Der Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und AC' ist α

Das erzeugt ein rechtwinkliger Dreieck. Dort gilt:

p' / 1 = sin α => p' = $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

h' / 1 = cos (α) => h' = $\frac{1}{\sqrt{(3)}}$

Das ergibt den Richtungsvektor

$\overrightarrow{AB}$ = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{-1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix}$ wobei gilt: $x^2 + y^2 = p'^2$ = $\frac{2}{3}$ ==> $y_{1/2}=\mp\sqrt{\frac{2}{3}-x^2}$

Eine Lösung: $y_1=-\sqrt{\frac{2}{3}-x^2}$

, also: $\overrightarrow{AB}$ = $\begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{\frac{2}{3}-x^2} \\ \frac{-1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix}$

Da der Winkel zwischen AB und AA' rechtwinklig ist, gilt:

$\overrightarrow{AA'}$ · $\overrightarrow{AB}$ = 0, also:

$\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix}$ · $\begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{\frac{2}{3}-x^2} \\ \frac{-1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix}$ = 0, also:

$\frac{-\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}\cdot x+\frac{-1}{\sqrt{(3)}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{(3)}}$ = 0 => x = $\frac{1}{\sqrt{(2)}\cdot\sqrt{(3)}}$

also:

$\overrightarrow{AB}$ = $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix}$

Dann gilt:

$\overrightarrow{0B}=\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{AB}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{(3)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix}$

also:

B($\frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | - $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{(3)}}$) = B($\frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | - $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | $\frac{2}{\sqrt{(3)}}$)

also:

B_p($\frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | - $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | 0)

3a,b.4) Berechnung von B'

$$\vec{0B'}=\vec{0A'}+\vec{AB} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix}$$

also:

B'($\frac{-1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | - $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

also:

B'_p($\frac{-1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | - $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | 0)

3a,b.5) Berechnung von D

D ist ebenensymmetrisch (bzgl. der x-z-Ebene) zu B ==>

D($\frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | $\frac{2}{\sqrt{(3)}}$)

also:

D_p($\frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | 0)

3a,b.6) Berechnung von C

$$\vec{0C}=\vec{0A}+\vec{AB}+\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}-0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}}-0 \\ \frac{2}{\sqrt{(3)}}-\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(3)}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{(3)}} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

C($\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{(3)}}$)

also:

C_p($\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{(3)}}$)

3a,b.7) Berechnung von D

D' ist ebenensymmetrisch (bzgl. der x-z-Ebene) zu B' ==>

D'($\frac{-1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | $\frac{1}{\sqrt{(3)}}$)

also:

D'$_p$($\frac{-1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | 0)

3c)

3c.0)

Es gilt (z-Koordinate gleich 0 setzen):

A$_p$(0 | 0 | 0)

A'$_p$ (- $\frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$ | 0 | 0)

B$_p$($\frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | - $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | 0)

B'$_p$($\frac{-1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}$ | - $\sqrt{(\frac{1}{2})}$ | 0)

3c.1)

$$\overrightarrow{A_p A'_p} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ==> } |\overrightarrow{A_p A'_p}| = \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$$

3c.2)

$$\overrightarrow{A_p' B_p'} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}-\frac{-\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}}-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ==> } |\overrightarrow{A'B'}| = \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$$

3c.3)

$$\overrightarrow{B'_p B_p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(2)}\sqrt{(3)}}-\frac{-1}{\sqrt{(2)}\cdot\sqrt{(3)}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}}--\sqrt{(\frac{1}{2})} \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{0} \end{pmatrix} \text{ ==> } |\overrightarrow{B'_p B_p}| = \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$$

3c.4)

$$\overrightarrow{A_p B_p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}-0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}}-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ => } |\overrightarrow{A_p B_p}| = \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$$

3c.5)

$$\overrightarrow{A_p B'_p} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow | \overrightarrow{A_p B'_p} | = \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$$

3c.6)

$$\overrightarrow{B_p C_p} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} \\ 0 - -\sqrt{(\frac{1}{2})} \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{0} \end{pmatrix} \Longrightarrow | \overrightarrow{B_p C_p} | = \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$$

3c.7)

$$\overrightarrow{A_p C_p} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} \\ 0 - -\sqrt{(\frac{1}{2})} \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{0} \end{pmatrix} \Longrightarrow || \overrightarrow{A_p C_p} = \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$$

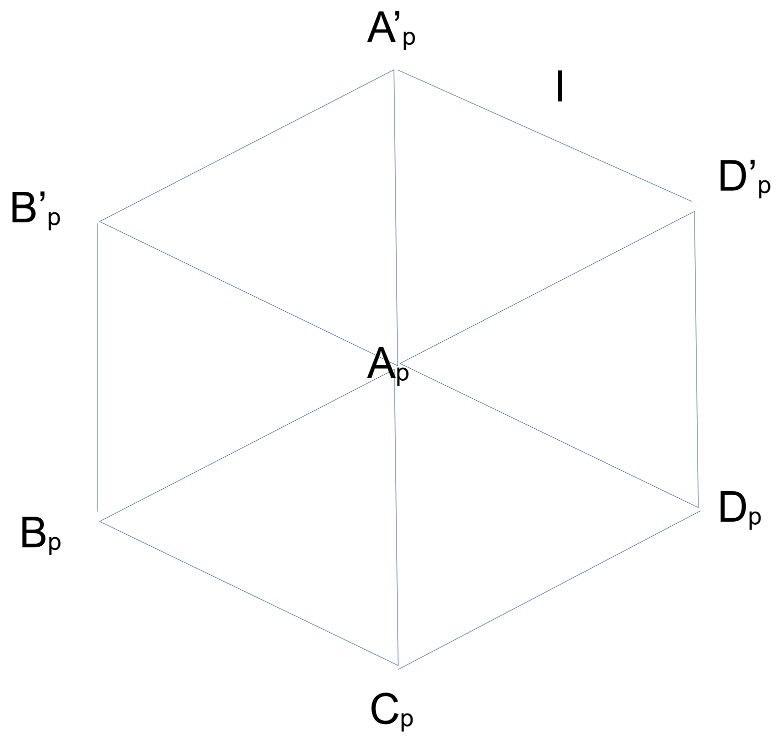
Die Gleichseitigkeit der restlichen Dreiecke folgt aus der obigen Ebenensymmetrie.

Die Seitenlänge l ist damit: l = $\frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$

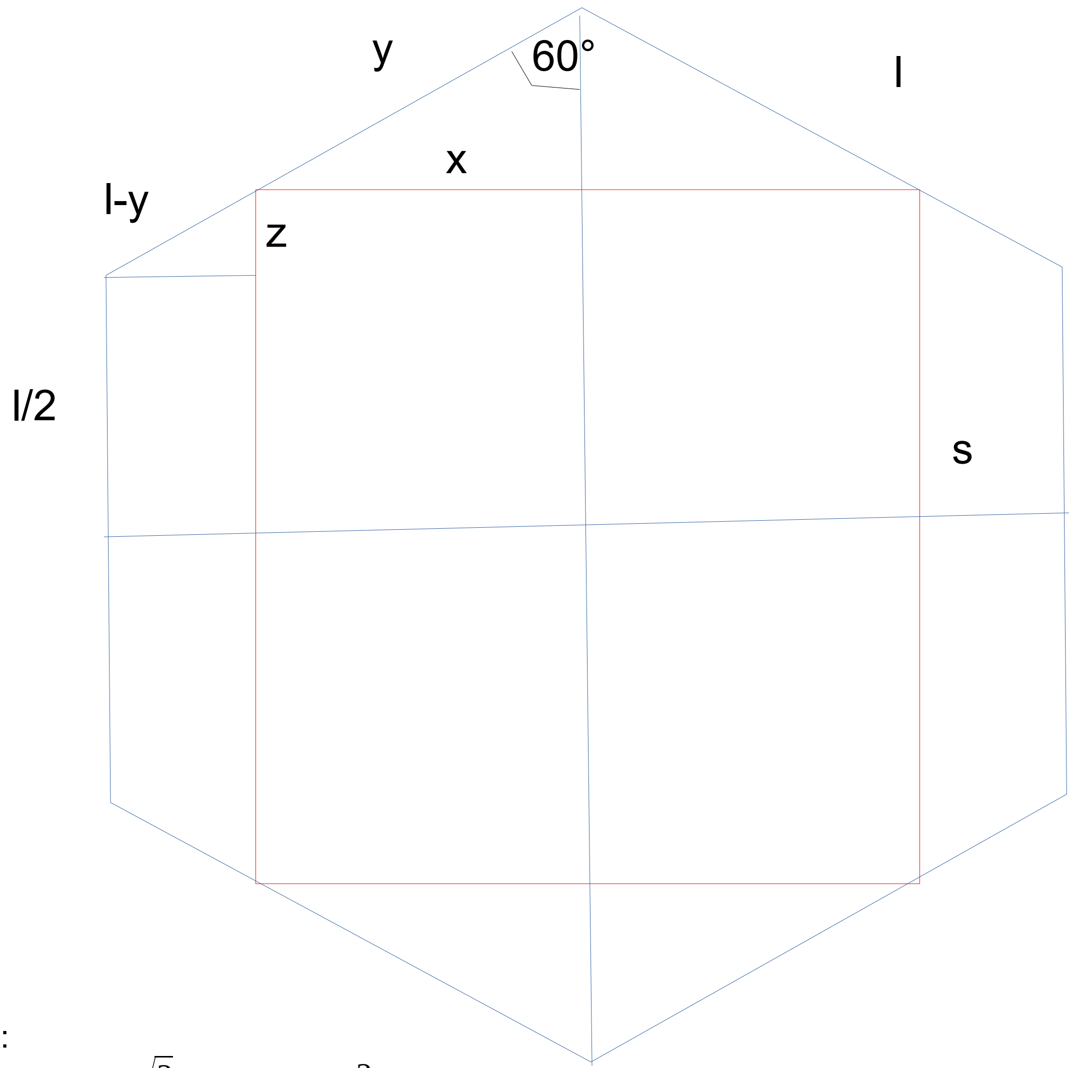
4)

Es entsteht ein regelmäßiges Sechseck mit einer Seitenlänge der Länge l = $\frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(3)}}$

a)



b)



Es gilt:

$$\frac{x}{y}=\cos(30°)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{==>} \quad y=\frac{2}{\sqrt{3}}x$$

$$l-y=l-\frac{2}{\sqrt{3}}x$$

$$\frac{z}{l-y}=\cos(60°)=\frac{1}{2} \quad \text{==>} \quad z=\frac{1}{2}(l-y) \quad = \quad z=\frac{1}{2}l-\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$\frac{l}{2}+z=x \quad \text{==>} \quad \frac{1}{2}l+\frac{1}{2}l-\frac{x}{\sqrt{3}}=x \quad \text{==>} \quad x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}l \quad \text{==>}$$

$$s=2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}l$$

c)

l = $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$s = 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \;=\; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \;=\; \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1(\sqrt{3}-1)} \;=\; \sqrt{6}-\sqrt{2}$ ≈ 1,035 > 1

Damit passt ein Würfel der Länge 1 durch diese Öffnung mit der ungefähren Länge 1,035.

Die Aufgabe I) ist damit auch gelöst !!

Links:
Spiegel-Rätsel der Woche
und
Prinz-Rupert-Würfel