AUFGABE Stoss zwischen Stahlkugeln
(Bereich: Differential-und Integralrechnung)

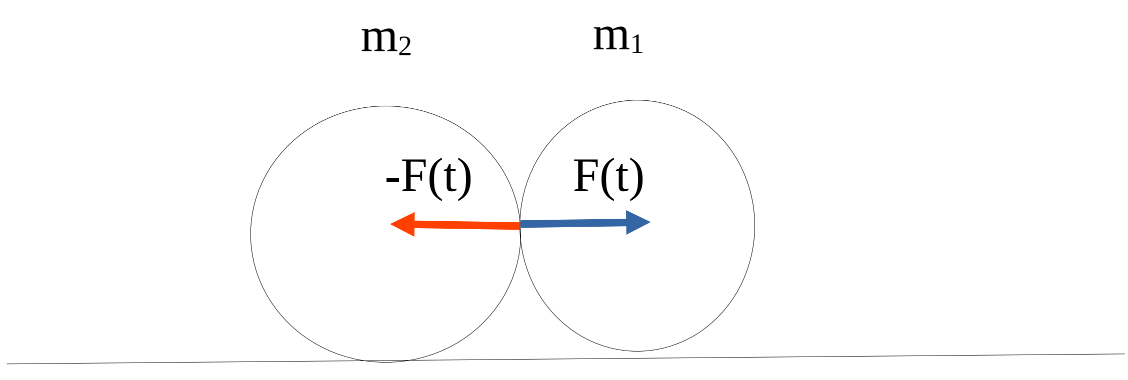
I) Vorbereitende Aufgabe
Ein Körper (z.B. ein Auto) bewegt sich mit einer bestimmten geradlinigen Anfangsgeschwindigkeit v. Dann wird er zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 mit einer bestimmten Beschleunigung a(t) (die nicht konstant sein muss !!) weiter fortbewegt. (z.B. kann ein Autofahrer zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 das Gaspedal auf-und abbewegen bzw. auch das Auto verschieden stark abbremsen.
Welche Endgeschwindigkeit u hat der Körper ?

II)
Zwei hochelastische Stahlkugeln bewegen sich entlang einer gedachten geraden Linie aufeinander zu und prallen dann zusammen.
Kugel 1 mit Masse m_1 hat die konstante Geschwindigkeit v_1 vor und die konstante Geschwindigkeit u_1 nach dem Stoss.

Kugel 2 mit Masse m_2 hat die konstante Geschwindigkeit v_2 vor und die konstante Geschwindigkeit u_2 nach dem Stoss.

a) Welche mathematische Bedingung muss gelten, damit es zum Stoss kommt ?

b) Berechnen Sie jeweils u_1 und u_2 in Abhängigkeit von m_2 , m_2, v_1, v_2



Lösung:
I)

$$u = v + \int_{t_1}^{t_2} (a(t))\,dt$$

II)
a)
$v_1 \neq v_2$
$v_1 \neq u_1$
$v_2 \neq u_2$
$m_1 \neq 0$
$m_2 \neq 0$

b)
Zu Beginn t_1 und bis zum Ende t_2 des Zusammenstosses wirken immer die gleichen Kräfte (aber in umgekehrter Richtung) und (bei verschiedenen Massen) verschiedene Beschleunigungen $a_1(t)$ und $a_2(t)$ auf die verschiedenen Massen m_1 bzw. m_2
Es gilt damit:

$$u_1 = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} (a_1(t))\,dt \quad \text{mit} \quad a_1(t) = \frac{F(t)}{m_1}$$

$$u_2 = v_2 + \int_{t_1}^{t_2} (a_2(t))\,dt \quad \text{mit} \quad a_2(t) = \frac{-F(t)}{m_2}$$

also insgesamt:

$$u_1 = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{F(t)}{m_1}\right) dt = v_1 + \frac{\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt}{m_1} \quad \text{==>} \quad \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = (u_1 - v_1) m_1 = u_1 m_1 - v_1 m_1$$

$$u_2 = v_2 + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{-F(t)}{m_2}\right) dt = v_2 - \frac{\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt}{m_2} \quad \text{==>} \quad \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = (v_2 - u_2) m_2 = v_2 m_2 - u_2 m_2$$

Daraus folgt (durch Gleichsetzung):

$u_1 m_1 - v_1 m_1 = v_2 m_2 - u_2 m_2$ (*) , also:

$\boxed{v_1 m_1 + v_2 m_2 = u_1 m_1 + u_2 m_2}$ (G1) (Impulsatz)

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt außerdem, dass die Gesamtenergie beider Kugeln vor und nach dem Stoss gleich groß sind:

$$\boxed{\frac{1}{2} v_1^2 m_1 + \frac{1}{2} v_2^2 m_2 = \frac{1}{2} u_1^2 m_1 + \frac{1}{2} u_2^2 m_2}$$ (G2) (Energieerhaltungssatz)

aus (G2) folgt:

$v_1^2 m_1 + v_2^2 m_2 = u_1^2 m_1 + u_2^2 m_2$ ==> $v_1^2 m_1 - u_1^2 m_1 = u_2^2 m_2 - v_2^2 m_2$ ==>

$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2)$ ==> $m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2)$ (H1)

aus (*) folgt:

$m_1 (u_1 - v_1) = m_2 (v_2 - u_2)$ ==> $m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2)$ (H2)

aus (H1) und (H2) folgt:

$v_1 + u_1 = u_2 + v_2$ (H3)

aus (H3) folgt:

$u_1 = u_2 + v_2 - v_1$ (H4)

aus (H2) folgt:

$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2$ (H5)

(H4) in (H5) einsetzen:

$m_1 v_1 - m_1 (u_2 + v_2 - v_1) = m_2 u_2 - m_2 v_2$ ==> $m_1 v_1 - m_1 u_2 - m_1 v_2 + m_1 v_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2$ ==>

$m_1 v_1 + m_2 v_1 = 2 m_2 u_2$ ==>

$$\boxed{u_2 = \frac{2 m_1 v_1 - m_1 v_2 + m_2 v_2}{m1 + m_2}}$$

aus (H3) folgt:

$u_2 = v_1 + u_1 - v_2$ (H6)

(H6) in (H5) einsetzen:

$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 (v_1 + u_1 - v_2) - m_2 v_2$ ==> $m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 v_1 + m_2 u_1 - m_2 v_2 - m_2 v_2$ ==>

$$\boxed{u_1 = \frac{2 m_2 v_2 - m_2 v_1 + m_1 v_1}{m1 + m_2}}$$