1 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

Aufgabe 1

1) Das Schaubild K_f der Funktion f mit: $f(x) = 1 + 2 \cdot \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

die Ursprungsgerade K_g mit $g(x) = \frac{x}{\pi}$ und die Ursprungsgerade h durch den Hochpunkt von K_f mit der kleinsten positiven Abszisse (x-Achse) schließen eine Fläche ein. Skizzieren Sie das Schaubild im Bereich $0 \leq x \leq 3\pi$ und die angegebenen Geraden und bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit K_f.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der angegebenen Fläche.

2) Für $x > 2\pi$ kann die Gerade g mit K_f weitere gemeinsame Punkte haben; untersuchen Sie, ob es tatsächlich solche Punkte gibt. Wie weit muss eine Suche nach solchen Schnittpunkten von rechts höchstens gehen? Falls nach Schnittpunkten von K_f und g im Bereich $x < 0$ gesucht werden soll – wie weit muss die Suche hier höchstens ausgedehnt werden ?
Begründen Sie Ihre Antworten.

3) Die Gerade $x = u$ mit $0 < u < \pi$ schneidet K_f im Punkt P, g im Punkt Q.
P, Q und der Punkt $R(\pi \mid 1)$ bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird.

4) Anstelle der Funktion f mit $f(x) = 1 + 2 \cdot \sin(x)$ wird nun die Funktion t mit $t(x) = 1 + a \cdot \sin(x)$ betrachtet.
Bestimmen Sie a so, dass die Differenz der Ordinaten des Schaubildes von t und der Geraden $y = \frac{x}{\pi}$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{3}$ möglichst groß wird.

5) Erläutern Sie anhand des Schaubildes der Sinus-Funktion warum
$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$ gilt.

Aufgabe 2

1) Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \cdot \cos(x)$, $x \in [-2;5]$
Ihr Schaubild ist K_f. Untersuchen Sie K_f auf Hoch- und Tiefpunkte.
Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte auf der Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x$ liegen.
Zeichnen Sie K_f

2) Gegeben ist zusätzlich die Funktion g mit:
$g(x) = -\frac{1}{2}x - \cos(x)$, $x \in [-2;5]$
Zeichnen Sie K_g in das vorhandene Koordinatensystem ein.
K_f und K_g begrenzen ein Flächenstück im 4. Quadranten.
Berechnen Sie dessen exakten Inhalt. Weisen Sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung $x = \pi$ diese Fläche genau halbiert.

Lösungen:

Aufgabe 1

1)

a) Schnittpunkte

a) Schnittpunkte $S(x_S \mid y_S)$ von K_f und K_g :

$1 + 2\sin(x_S) = x/\pi \quad | \cdot \pi$

$\pi + 2\pi \sin(x_S) = x$

Durch Probieren oder mit TR (für x>0):

$x_S = \pi$

b) Extrempunkte

$f(x) = 1 + 2\sin(x)$

$f'(x) = 2\cos(x)$

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$2\cos(x_e) = 0$

$\cos x_e = 0$, also:

$x_e = \pi/2$

$y_e = 1 + 2\sin(\pi/2) = 3$

also : $H(\pi/2 \mid 3)$

c) Ursprungsgerade durch Hochpunkt:

$$h(x) = \frac{3}{\frac{\pi}{2}} x = \frac{6}{\pi} x$$

d) Fläche

$$A = \int_0^{\pi/2} h(x) - g(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (f(x) - g(x)dx = \int_0^{\pi/2} (\frac{6}{\pi}x - \frac{x}{\pi})dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + 2\sin(x) - \frac{x}{\pi})dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{5}{\pi} x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + 2\sin(x) - \frac{x}{\pi})dx = \left[\frac{5}{2\pi}x^2\right]_0^{\pi/2} + \left[x - 2\cos(x)\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$\frac{5}{2\pi} \cdot (\frac{\pi}{2})^2 - \frac{5}{2\pi} \cdot 0^2 + \pi - 2\cos(\pi) - (\frac{\pi}{2} - 2\cos(\frac{\pi}{2})) =$$

$$\frac{5\pi}{8} + \pi - 2\cos(\pi) - \frac{\pi}{2} + 2\cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + 2 = \frac{9\pi}{8} + 2$$

2)

Ein Hochpunkt ist : $H(\pi/2 \mid 3)$

Die Amplitude ist 2, also haben alle Tiefpunkte den y-Wert 3 - 4 = -1

Wenn der y-Wert von K_g größer 3 bzw. kleiner -1 wird, kann es keine Schnittpunkte mehr mit K_f geben.

a) $g(x) = \frac{x}{\pi} > 3 \iff \frac{x}{\pi} > 3 \iff x > 3\pi$

b) $g(x) = \frac{x}{\pi} < -1 \iff \frac{x}{\pi} < -1 \iff x < -\pi$

3)

a) Zielfunktion:

$$A(x) = f(x) - g(x) = \frac{\left(1+2\sin(x)-\frac{x}{\pi}\right)(\pi - x)}{2} = \frac{\pi + 2\pi\sin(x) - x - x - 2x\sin(x) + \frac{x^2}{\pi}}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^2}{2\pi} + \pi\sin(x) + 2x\sin(x)$$

TR liefert für $x_e = 1$ den maximalen Wert A(...) ≈ ....

b) Definitionsbereich:

D = (0, π)

c) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{0^2}{2\pi} + \pi\sin(0) + 2\cdot 0\cdot\sin(0) = \frac{\pi}{2}$$

A(π) = 0

Ergebnis:

Für x_e = ... wird der maximale Wert A(...) ≈ .... erreicht.

4) Anstelle der Funktion f mit $f(x) = 1 + 2\cdot\sin(x)$ wird nun die Funktion t mit $t(x) = 1 + a\cdot\sin(x)$ betrachtet.

Bestimmen Sie a so, dass die Differenz der Ordinaten des Schaubildes von t und der Geraden $y = \frac{x}{\pi}$ an der Stelle $x = \frac{x}{\pi}$ möglichst groß wird.

$$d(a,x) = 1 + a\sin(x) - \frac{x}{\pi}$$

Mit $x = \frac{\pi}{3}$ ergibt sich:

$$d(a) = 1 + a\cdot\sin(\frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{9}$$

.....

5)

$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$ gibt die bilanzierte Fläche an. Da die negativen und positiven Flächenanteile der Sinuskurve innerhalb des Intervalls [0 , 2π] gleich groß sind, gilt: $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$