1 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

Bemerkung:
Skizzieren Sie den Verlauf der zugehörigen Funktionen.

1) Die Halbwertszeit H des radioaktiven Kohlenstoffs C-14 beträgt 5730 J. Lebendes Holz enthält stets einen bestimmten Prozentsatz C-14. Durch die Bestimmung des C-14 Gehalts läßt sich das Alter des Holzes bzw. anderer kohlenstoffartiger Materialien ermitteln. Bei dem im September 1991 in den Ötztaler-Alpen (Österreich) entdeckten organischem Material waren nur noch 70 % des üblichen C-14 Anteils vorhanden.
a) Wie alt ist der "Ötzi" ?
b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Menge m(2H) des C-14 Anteils und m(H) ?
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Menge m(H/2) und m(H) ?

2) Das radioaktive Element Jod-131 hat eine Halbwertszeit von 8,1 Tagen.
a) Wieviel % der Ausgangsmenge ist nach 30 Tagen zerfallen ?
b) Wieviel % der Ausgangsmenge zerfallen während des ganzen 10. Tages ?
c) Wann ist nur noch 1 Promille der Ausgangsmenge vorhanden ?

3) Von einer radioaktiven Substanz sind nach einer Stunde noch 400 mg, nach 2 Stunden noch 300 mg vorhanden. Wie lautet das Zerfallgesetz ?

4) Ein aus dem Kühlschrank genommenes Nahrungsmittel erwärme sich ungefähr nach der Formel: $y(x) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0{,}075x})$ Dabei ist y die Temperatur in ° C und x die Zeit in Minuten ab der Entnahme.
a) Welche Temperatur herrscht im Kühlschrank, welches ist die Außentemperatur ?
b) Welche Temperatur hat das Nahrungsmittel nach 10 Minuten ?
c) Vor welcher Zeit wurde das Nahrungsmittel aus dem Kühlschrank genommen, wenn es noch eine Temperatur von 17 ° C besitzt ?
d) Herr X behauptet, dass man die Kurve mit der Funktionsgleichung
$y(x) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0{,}075x})$ durch eine Logarithmuskurve annähern kann.
Nehmen Sie dazu Stellung.

5) Ein Land hat schon längere Zeit jährlich einen Geburtsüberschuß von rund 1,8 %. Nach welcher Zeitspanne (in Jahren) hat sich die Bevölkerungszahl verdreifacht ?

6) Im folgenden beschreibt m(t) den Zusammenhang zwischen der Zeit t (in Wochen) und der Masse m(t) (in Gramm) für eine Zellkultur bei gleichbleibenden Lebensbedingungen:
$m(t) = 3 \cdot e^{0{,}5\,t}$
a) Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion m(t).
b) Um wieviel % wächst die Zellkultur wöchentlich ?
c) Nach welcher Zeit z ist die Zellkultur doppelt so schwer ?
Bestimmen Sie z zeichnerisch und rechnerisch.

7)
Was steigt für große positive x stärker an:
$f_1(x) = x$ oder $f_2(x) = \log_2(x)$?
Gegen was strebt also (für große) $x - \log_2(x)$?
Benutzen Sie dazu den Taschenrechner (bzw. die grafische Anzeige).

Lösungen:

1)
a)
1 Zeitabschnitt = 5730 Jahre

n	Menge nach n Zeitabschnitten
0	m_0
1	$1/2\ m_0$
2	$1/4\ m_0$
3	$1/8\ m_0$
...	...
n	$(1/2)^n\ m_0$

Es gilt also:

(1) $m(n) = (\frac{1}{2})^n \cdot m_0$

Außerdem ist:
t = 5730 n
also:
(2) n = t / 5730

(2) in (1) eingesetzt ergibt: $m(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{5730}} \cdot m_0$

$= (\frac{1}{2})^{\frac{1}{5730} \cdot t} \cdot m_0 = [(\frac{1}{2})^{\frac{1}{5730}}]^t \cdot m_0 = (\sqrt[5730]{0,5})^t \cdot m_0 \approx 0,999879^t \cdot m_0$

also:

$m(t) = (\sqrt[5730]{0,5})^t \cdot m_0$

Der Wachstumsfaktor ist $\approx 0,\ 999879$, d.h. pro Jahr zerfällt der Bruchteil $\approx 0,000121$.

b)
Nach z Jahren sind noch 70% des anfänglichen C-14 Gehalts m_0 vorhanden, d.h. es sind noch 0,7 m_0 vorhanden.
Eingesetzt:

0,7 m_0 = $m(z) = \sqrt[5730]{0,5}^{\,z} \cdot m_0$

0,7 m_0 = $\sqrt[5730]{0,5}^{\,z} \cdot m_0$

0,7 = $\sqrt[5730]{0,5}^{\,z}$

$z = \log_{\sqrt[5730]{0,5}} 0,7 = \frac{\ln 0,7}{\ln \sqrt[5730]{0,5}} \approx 2948,50$

Ergebnis: Das entdeckte organische Material ist ca. 2948,50 Jahre alt.
Alternative Lösung:
Nach N Zeitabschnitten sind noch noch 70% von m_0 vorhanden, also:

0,7 m_0 = $m(N) = (\frac{1}{2})^N \cdot m_0$ ==> N = $\log_{0,5} 0,7$ ==> t = 5730 $\cdot$ $\log_{0,5} 0,7 \approx 2948,50$

c)
c1)
allgemein gilt:
$m(t) = m_0 \cdot q^t$
und damit gilt für die Halbwertszeit H:
$\frac{m_0}{2} = m(H) = m_0 \cdot q^H$ ==>
$\frac{m_0}{2} = m_0 \cdot q^H$ ==> $q^H = \frac{1}{2}$

c2)
$m(2H) = m_0 \cdot q^{2H} = m_0 \cdot (q^H)^2 = m_0 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot m(H)$ ==>
$m(2H) = \frac{1}{2} \cdot m(H)$

c3)
$m(\frac{H}{2}) = m_0 \cdot q^{\frac{H}{2}} = m_0 \cdot q^H \cdot q^{-\frac{H}{2}} = m(H) \cdot q^{-\frac{H}{2}} = \frac{m(H)}{q^{\frac{H}{2}}} = \frac{m(H)}{\sqrt{q^H}} = \frac{m(H)}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \approx 0{,}71\ m_0$ ==>

$m(\frac{H}{2}) = \frac{m(H)}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \approx 0{,}71\ m_0$

2)

a) 1. Lösung

Für das Wachstumsgesetz gilt:

$m(t) = m_0 \cdot q^t$

damit gilt dann:

$m(8{,}1) = m_0 \cdot q^{8,1}$ und

$m(8{,}1) = \frac{m_0}{2}$

also:

$m_0 \cdot q^{8,1} = \frac{m_0}{2} \Longleftrightarrow q^{8,1} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow q = \sqrt[8,1]{0{,}5} \approx 0{,}917986$

also:

$m(t) = m_0 \cdot (\sqrt[8,1]{0{,}5})^t$

Die radioaktive Menge nach 30 Tagen beträgt:

$m(30) = m_0 \cdot (\sqrt[8,1]{0{,}5})^{30} \approx 0{,}0767\ m_0$,

d.h. es ist die Menge m_0 - m(30) ≈ m_0 -0,0767 m_0 ≈ 0,9233m_0 zerfallen.

Ergebnis: Es sind also 92,3 % der Ausgangsmenge zerfallen.

2. Lösung:

analog zur Aufgabe 1) ergibt sich für das Wachstumsgesetz:

$m(t) = (\sqrt[8,1]{0{,}5})^t \cdot m_0$

Die radioaktive Menge nach 30 Tagen beträgt:

$m(30) = m_0 \cdot (\sqrt[8,1]{0{,}5})^{30}$

b)

Die radioaktive Menge nach 9 Tagen beträgt:

$m(9) = m_0 \cdot (\sqrt[8,1]{0{,}5})^9$

Die radioaktive Menge nach 10 Tagen beträgt:

$m(10) = m_0 \cdot (\sqrt[8,1]{0{,}5})^{10}$

Die während des 10. Tages zerfallene radioaktive Menge a beträgt:

a = m(9) - m(10) = $m_0 \cdot (\sqrt[8,1]{0{,}5})^9 - m_0 \cdot (\sqrt[8,1]{0{,}5})^{10} = m_0[(\sqrt[8,1]{0{,}5})^9 - (\sqrt[8,1]{0{,}5})^{10}] \approx 0{,}0379\ m_0$

Ergebnis:

Damit sind also während des 10. Tages ca. 3,79 % der Ausgangsmenge zerfallen.

c) Nach z Tagen sind noch 1 Promille der Ausgangsmenge vorhanden:

Eingesetzt:

$m(z) = m_0 \cdot (\sqrt[8,1]{0{,}5})^z$ und

$m(z) = 0{,}001 \cdot m_0$

und damit:

$0{,}001 \cdot m_0 = m_0 \cdot (\sqrt[8,1]{0{,}5})^z \Longleftrightarrow 0{,}001 = (\sqrt[8,1]{0{,}5})^z \Longleftrightarrow z = \log_{\sqrt[8,1]{0,5}} 0{,}001$

$= \frac{\ln 0{,}001}{\ln \sqrt[8,1]{0{,}5}} \approx 80{,}7\text{s}$

Ergebnis: Nach ca. 80,7 Tagen sind noch 1 Promille der Ausgangsmenge vorhanden.

3)
1. Lösung
Für das Wachstumsgesetz gilt:
gegeben:
$m(t) = m_0 \cdot q^t$ (t in Stunden, m in mg)
gesucht:
q und m_0

Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, also:
$m(1) = 400$ und
$m(1) = m_0 \cdot q^1$
damit:
$400 = m_0 \cdot q^1$ bzw. vereinfacht:
(G1) $400 = m_0 \cdot q$

Nach 2 h sind noch 300 mg vorhanden, also:
$m(2) = 300$ und
$m(2) = m_0 \cdot q^2$
damit:
(G2) $300 = m_0 \cdot q^2$

Man hat also 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Jeweils auflösen nach m_0 :
$$m_0 = \frac{400}{q}$$
$$m_0 = \frac{300}{q^2}$$
gleichsetzen ergibt:
$$\frac{400}{q} = \frac{300}{q^2} \quad | \cdot q^2$$
$400\, q = 300$
ergibt:
$q = 3/4$ und
$$m_0 = \frac{400}{q} = \frac{400}{0{,}75} = \frac{1600}{3}$$
Damit:
$$m(t) = \frac{1600}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$$
Probe machen !!

2. Lösung
Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, nach 2 h sind noch 300 mg vorhanden.
Wenn man nach einer Stunde (bei 400 mg Material) eine Stoppuhr laufen lässt, weiß man, dass nach einer Stunde auf der Stoppuhr von den 400 mg Material noch 300 mg Material vorhanden sind. Es sind also noch 300 mg / 400 mg = 3/4 des Ausgangmaterials vorhanden. Nach jeder Stunde sind also noch 3/4 der jeweiligen Ausgangsmasse (d.h. Masse vor einer Stunde) vorhanden. Man könnte also hier - ähnlich wie bei der Halbwertszeit - von einer **Dreiviertelswertzeit** reden.

Es gilt also:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$$ (t in Stunden, m in mg)

Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, also:

$m(1) = 400$ und

$$m(1) = m_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1$$

damit:

$$400 = m_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \text{ ==> } 400 = m_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \text{ ==> } m_0 = \frac{400}{\frac{3}{4}} = \frac{1600}{3}$$

Damit:

$$m(t) = \frac{1600}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$$

4)

a) 0 min nach der Entnahme hat das Nahrungsmittel die Temperatur des Kühlschranks:

$$y(0) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot 0}) = 2{,}4$$

Nach unendlich langer Zeit hat das Nahrungsmittel die Außentemperatur T_a angenommen:

$$T_A = \lim_{x \to 00} y(x) = \lim_{x \to 00} 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot x}) = 24$$

b) Die Temperatur nach 10 min ist:

$$y(10) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot 10}) \approx 13{,}8$$

c) z min nach der Entnahme hat das Nahrungsmittel noch 17 °C Temperatur:

$$y(z) = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z}) = 17$$

also:

$$17 = 24 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z})$$

$$\frac{17}{24} = 1 - 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z} \text{ <==> } 1 - \frac{17}{24} = 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z} \text{ <==> } \frac{7}{24} = 0{,}9 \cdot e^{-0.075 \cdot z} \text{ <==>}$$

$$\frac{7}{24 \cdot 0{,}9} = e^{-0.075 \cdot z} \text{ <==> } \frac{35}{108} = e^{-0.075 \cdot z} \text{ <==> } -0{,}075\, z = \ln \frac{35}{108} \text{ <==>}$$

$$z = \frac{\ln \frac{35}{108}}{-0{,}075} \approx 15{,}02$$

Ergebnis: Ca. 15,02 Minuten nach der Entnahme ist die Temeperatur auf 17°C gesunken.

d) Die obige Kurve hat (für große x) eine Asymptote parallel zur x-Achse.
Eine entsprechende Logarithmusfunktion geht für große x gegen unendlich.

5)
Für das Wachstumsgesetz gilt:
$N(n) = N_0 \cdot q^n$
q = 1,018
also:
$N(n) = N_0 \cdot 1{,}018^n$
Nach z Jahren hat sich die Anzahl der Menschen verdreifacht:
$N(z) = N_0 \cdot 1{,}018^z = 3 \cdot N_0$
zusammengefasst:
$N_0 \cdot 1{,}018^z = 3 \cdot N_0$
$1{,}018^z = 3 \Longleftrightarrow z = \log_{1{,}018} 3 \Longleftrightarrow z = \dfrac{\ln\ 3}{\ln 1{,}018} \approx 61{,}58$
Ergebnis: Nach ca. 61,58 Jahren hat sich die Bevölkerung verdreifacht.

6)
b)
1. Lösung:
$m(t) = 3 \cdot e^{0{,}5 \cdot t} = 3 \cdot (e^{0{,}5})^t = 3 \cdot (\sqrt{e})^t$
Damit ist der Wachstumsfaktor: $\sqrt{e}$
2. Lösung:
Berechne das Verhältnis der Masse nach n und n+1 Wochen:
$$\frac{m(n+1)}{m(n)} = \frac{3 \cdot e^{0{,}5 \cdot (n+1)}}{3 \cdot e^{0{,}5 \cdot n}} = \frac{e^{0{,}5 \cdot (n+1)}}{e^{0{,}5 \cdot n}} = e^{0{,}5(n+1) - 0{,}5n} = e^{0{,}5} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

c) Nach z Wochen ist die Zellkultur doppelt so schwer:
$m(z) = 3 \cdot e^{0{,}5 \cdot z} = 2 \cdot m(0) = 2 \cdot 3 \cdot e^{0{,}5 \cdot 0} = 2 \cdot 3 = 6$
also:
$3 \cdot e^{0{,}5 \cdot z} = 6$
$e^{0{,}5 \cdot z} = 2 \Longleftrightarrow 0{,}5 \cdot z = \ln\ 2 \Longleftrightarrow z = 2 \cdot \ln\ 2 \approx 1{,}39$
Ergebnis: Nach ca. 1,39 Wochen ist die Zellkultur doppelt so schwer geworden.

2 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

1) Gegeben ist die Funktion h mit:

$h(x) = e^{\frac{1}{3}x} - 2$, x∈R

Ihr Schaubild ist K_h

a) Berechnen Sie die Nullstellen von h (exakter Wert verlangt)

b) Zeigen Sie, dass K_h keine Hoch-, Tief- und Wendepunkte besitzt.

c) Zeigen Sie, dass

$\int_0^3 h(x)dx = 3e - 9$ ist.

Erklären Sie mit Hilfe des Schaubildes, warum dieser Wert negativ ist.

2) Die Funktion f ist vom Typ

$f(x) = e^{ax} + b$, x∈R und a∈R\{0}, b∈R

Untersuchen Sie, ob es eine Funktion dieses Typs mit jeweils folgenden Eigenschaften gibt:

a) der Punkt P (0 | 3) liegt auf dem Schaubild von f und es gilt f '(0)= $\frac{1}{2}$

b) Das Schaubild von f geht durch die Punkte A (-2 | 4) und B (1 | 4).

c) Das Schaubild von f verläuft ganz im ersten Quadranten.

3) Gegeben ist die Funktion f mit:

$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 3$, x∈R

Das Schaubild von f ist K.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.

b) Zeigen Sie, dass K keine Hoch-, Tief- oder Wendepunkte besitzt.

c) Ist das Schaubild von f rechts- oder linksgekrümmt? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein rechnerisches Argument.

4) Das Schaubild der Funktion f mit:

$f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} + 1$, x∈R,

die Gerade mit der Gleichung y = 4 und die y-Achse schließen im 2. Quadranten eine Fläche ein. Bestimmen Sie deren Flächeninhalt.

5) Das Schaubild der Funktion f mit:

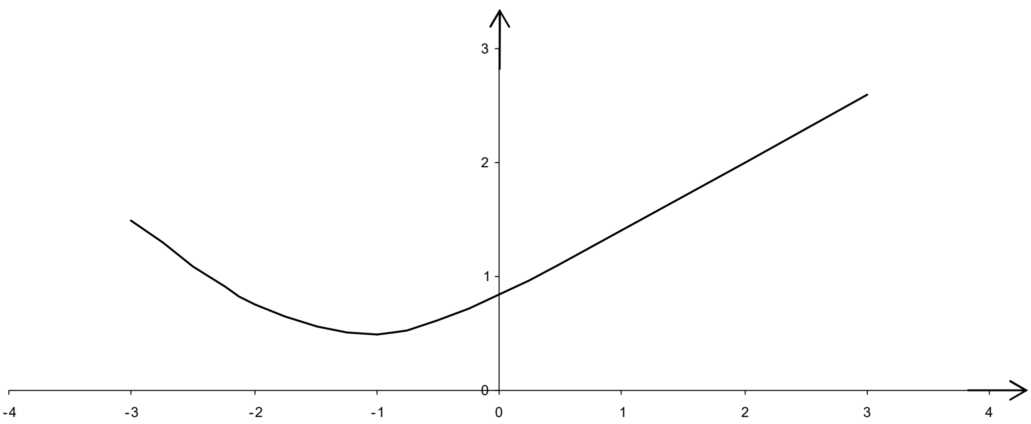
$f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} + 1$, x∈R,

die Geraden mit der Gleichung y = 4 bzw. x = a und die y-Achse schließen für a > 0 im 1.Quadranten eine Fläche mit dem Inhalt 5 ein. Bestimmen Sie a.

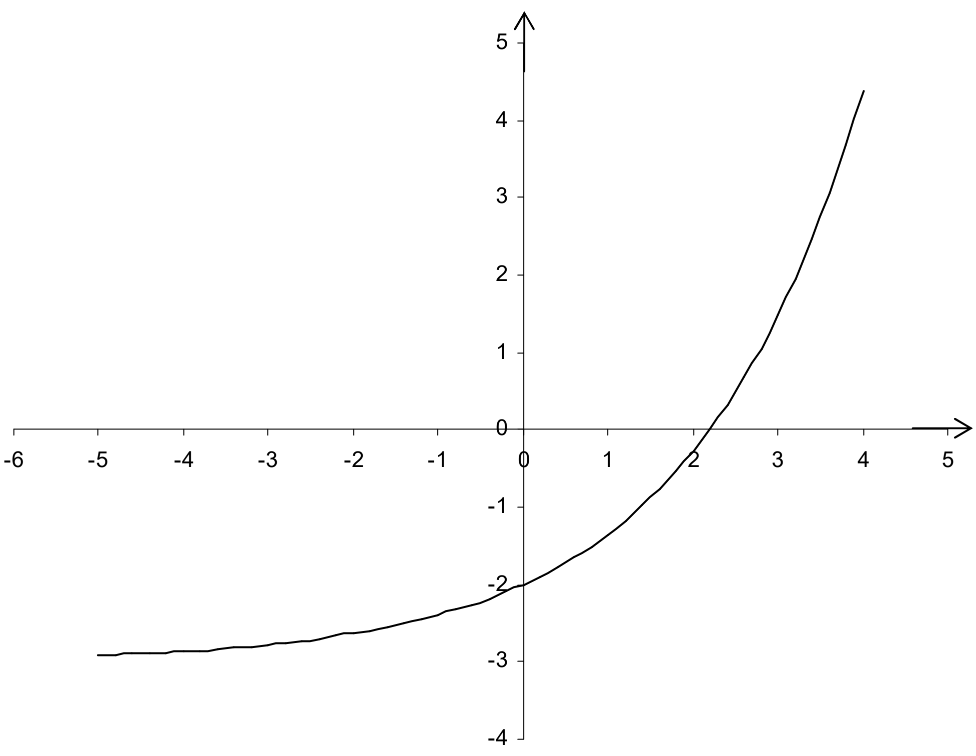
6) Eines der 3 gezeichneten Schaubilder ist eine Funktion vom Typ
$f(x) = e^{ax} + b$, x∈R und a∈R\{0}, b∈R

Welche beiden Schaubilder können nicht zu f gehören? Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie bei jedem entsprechenden Schaubild eine Eigenschaft nennen, die mit den Funktionseigenschaften von f nicht vereinbar ist.

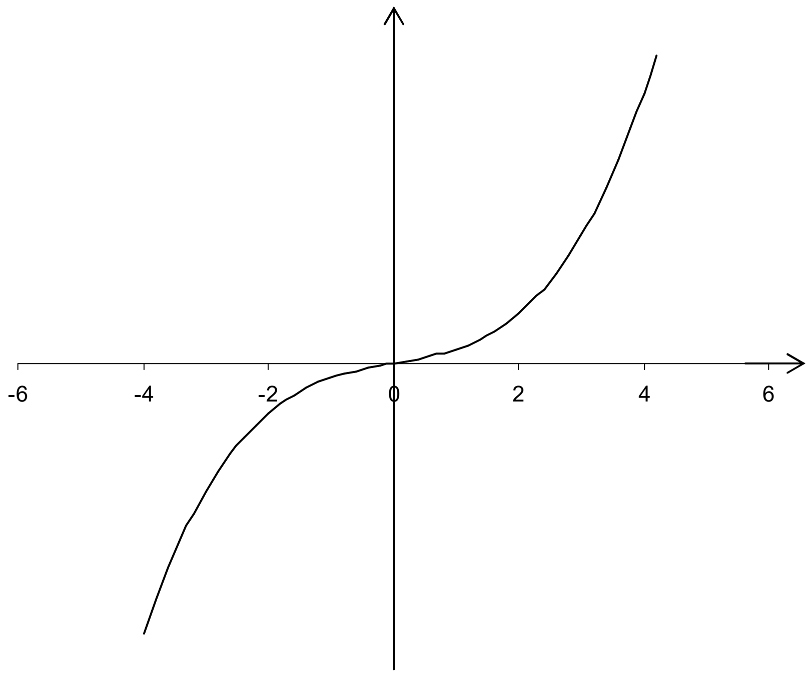
a)



b)



c)



7)

Das Schaubild der Funktion f mit:

$f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} + 1$, x∈R

die Gerade mit der Gleichung x = a, die y-Achse und die x-Achse schließen für a > 0 im 1.Quadranten eine Fläche ein. Gibt es einen größten Wert, den die derart eingeschlossene Fläche annehmen kann? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungen:

1)

a) Schnittpunkte mit der x-Achse

Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_h$

$$0 = e^{\frac{1}{3}x_s} - 2$$

<==> $e^{\frac{1}{3}x_s} = 2$ <==> $\frac{1}{3}x_s = \ln 2$ <==> $x_s = 3\ln 2$

b)

b1) Extrempunkte

$$h'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x_s}$$

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $h'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x_e}$$

<==> $0 = e^{\frac{1}{3}x_e}$ <==> $L = \varnothing$

b2) Wendepunkte:

$$h''(x) = \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}x}$$

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $h''(x_w) = 0$

$$0 = \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}x_w}$$

<==> $0 = e^{\frac{1}{3}x_w}$ <==> $L = \varnothing$

c) $\int_0^3 h(x)dx$ ist $= \int_0^3 (e^{\frac{1}{3}x} - 2)dx = \left[3e^{\frac{1}{3}x} - 2x\right]_0^3 = 3e^{\frac{1}{3}\cdot 3} - 2\cdot 3 - (3e^{\frac{1}{3}\cdot 0} - 2\cdot 0)$ = 3e-6-(3-0) = 3e-9

d) $\int_0^3 h(x)dx$ ist die bilanzierte Fläche, wobei der Betrag des negativen Flächenanteils größer ist als der des positive Flächenanteils (siehe selbstangefertigte Zeichnung).

2) a)

$$f'(x) = ae^{ax}$$

$P(0 \mid 3) \in K_f$:

$3 = e^{a\cdot 0} + b$ <==> $3 = e^0 + b$ <==> $3 = 1 + b$ <==> b =2

f '(0)= $\frac{1}{2}$:

0,5 = $f'(0) = ae^{a\cdot 0}$ <==> $\frac{1}{2} = ae^{a\cdot 0}$ <==> $\frac{1}{2} = ae^0$ <==> a = 0,5

also: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + 2$

b) $A(-2 \mid 4) \in K_f$:

$4 = e^{a\cdot(-2)} + b$ <==> $4 = e^{-2a} + b$ <==> $b = 4 - e^{-2a}$

$B(1 \mid 4) \in K_f$:

$4 = e^{a\cdot 1} + b$ <==> $4 = e^{a} + b$ <==> $b = 4 - e^{a}$

also: $4 - e^{-2a} = 4 - e^{a} \mid -4$

$-e^{-2a} = -e^{a} \mid \cdot(-1)$

$e^{-2a} = e^{a} \mid : e^{a}$

$\frac{e^{-2a}}{e^{a}} = 1$ <==> $e^{-2a-a} = 1$<==> $e^{-3a} = 1$ <==> $-3a = \ln 1$ <==> $-3a = 0$ <==> $a = 0$

Laut Voraussetzung ist aber $a \neq 0$

c) Die Definitionsmenge der Funktion $f'(x) = ae^{ax}$ ist die Menge der reellen Zahlen, also kann das Schaubild nicht im 1. Quadranten verlaufen.

3) a) Schnittpunkte mit der x-Achse

a1) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = e^{-\frac{1}{2}x_S} - 3$

<==> $e^{-\frac{1}{2}x_S} = 3$ <==> $-\frac{1}{2}x_s = \ln 3$ <==> $x_s = -2\ln 3$

a2) Schnittpunkte mit der y-Achse

Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} - 3 = 1 - 3 = -2$

also:

$S_y(0 \mid -2)$

b)

b1) Extrempunkte

$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x_e}$

<==> $0 = e^{-\frac{1}{2}x_e}$ <==> $L = \emptyset$

b2) Wendepunkte:

$f''(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}$

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $h''(x_w) = 0$

$0 = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x_w}$ <==> $0 = e^{-\frac{1}{2}x_w}$ <==> $L = \emptyset$

c)

Da $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ und $\frac{1}{4} > 0$, gilt $f''(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x} > 0$. Damit ist Kf linksgekrümmt.

4)

a) g(x) = 4 ist die Funktionsgleichung der Geraden mit der Gleichungy = 4

Schnittpunke $S(x_s | y_s)$ von K_g und K_f

(oder etwas mathematischer formuliert: $K_f \cap K_g = S(x_s|y_s)$):

$e^{-\frac{1}{3}x_S} + 1 = 4$ <==> $e^{-\frac{1}{3}x_S} = 3$ <==> $-\frac{1}{3}x_s = \ln 3$ <==> $x_s = -3\ln 3$

also:

S(-3ln3 | 4)

b) $\int_{-3\ln 3}^{0} g(x) - f(x)dx$ ist = $\int_{-3\ln 3}^{0} (4 - (e^{-\frac{1}{3}x} + 1))dx = \int_{-3\ln 3}^{0} (4 - e^{-\frac{1}{3}x} - 1)dx = \int_{-3\ln 3}^{0} (3 - e^{-\frac{1}{3}x})dx =$

$\left[3x + 3e^{-\frac{1}{3}x}\right]_{-3\ln 3}^{0} = 3 \cdot 0 - 3e^{-\frac{1}{3}\cdot 0} - (3 \cdot (-3\ln 3) - 3e^{-\frac{1}{3}\cdot(-3\ln 3)})$ = $-3 - (-9\ln 3 - 3e^{\ln 3}) =$

$-3 - (-9\ln 3 - 3 \cdot 3) = -3 + 9\ln 3 + 9 = 6 + 9\ln 3$

5)

$5 = \int_{0}^{a} g(x) - f(x)dx$ ist = $\int_{0}^{a} (4 - (e^{-\frac{1}{3}x} + 1))dx = \int_{0}^{a} (4 - e^{-\frac{1}{3}x} - 1)dx = \int_{0}^{a} (3 - e^{-\frac{1}{3}x})dx =$

$\left[3x + 3e^{-\frac{1}{3}x}\right]_{0}^{a} = 3a + 3e^{-\frac{1}{3}\cdot a} - (3 \cdot 0 + e^{-\frac{1}{3}\cdot 0})$ = $3a + 3e^{-\frac{1}{3}\cdot a} - 1$

also: $3a + 3e^{-\frac{1}{3}\cdot a} - 1 = 4$ <==> $3a + 3e^{-\frac{1}{3}\cdot a} - 5 = 0$

Näherungslösung mit TR.

6)

a) kann nicht sein, da eine e-Funktion monoton fallend oder steigend ist.

c) kann nicht sein, da eine e-Funktion eine Asymtote parallel zur x-Achse hat.

7)

Das Schaubild der Funktion f mit:

$f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} + 1$, $x \in R$,

schließen für a>0 im 1.Quadranten eine Fläche ein. Gibt es einen größten Wert, den die derart eingeschlossene Fläche annehmen kann?

Begründen Sie Ihre Antwort.

$\int_{0}^{a} (e^{-\frac{1}{3}x} + 1)dx = \left[-3e^{-\frac{1}{3}x} + x\right]_{0}^{a} = -3e^{-\frac{1}{3}\cdot a} + a - (-3e^{-\frac{1}{3}\cdot 0} + 0) = -3e^{-\frac{1}{3}\cdot a} + a + 3e^{-\frac{1}{3}\cdot 0} =$

$a - 3e^{-\frac{1}{3}\cdot a} + 3$

Da $\lim\limits_{a \to 00} e^{-\frac{1}{3}\cdot a} = 0$, strebt $a - 3e^{-\frac{1}{3}\cdot a} + 3$ für große a gegen unendlich.