1 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

1) Ein Bankkunde will in 5 Jahren bei 4,5 % Jahreszinssatz 2500 Euro verdienen.
Wieviel Geld muß er einlegen ?

2) Herr Maier will sich 10000 Euro bei seinem Freund leihen und ihm dafür in 5 Jahren 12500 Euro zurückzahlen. Eine Bank würde Herrn Maier die Wertanlage mit 4,5 % Jahreszinssatz verzinsen. Was ist die bessere Option ? Machen Sie mehrere Lösungen

3) Bei der Bank A kann man sein Kapital 10 Jahre zu 5 % Jahreszins anlegen.
Bei der Bank B kann man sein Kapital 5 Jahre zu 10 % Jahreszins anlegen.
a) Wo ist der erzielte "Gewinn" größer ?
b) Wieviel Prozent Jahreszins müsste man bei Bank A bekommen (bei immer noch 10 Jahren Laufzeit), um das gleiche Endkapital wie bei Bank B zu bekommen ?
c) Wieviel Jahre müsste man bei Bank A das Kapital anlegen, (bei immer noch 5 % Jahreszins), um das gleiche Endkapital wie bei Bank B zu bekommen ?
d) Wieviel Prozent Jahreszins müsste man bei Bank B bekommen (bei immer noch 5 Jahren Laufzeit), um das gleiche Endkapital wie bei Bank A zu bekommen ?
e) Wieviel Jahre müsste man bei Bank B das Kapital anlegen, (bei immer noch 10 % Jahreszins), um das gleiche Endkapital wie bei Bank A zu bekommen ?

4) Bei der Bank A bekommt man für ein Kapital die ersten 5 Jahre 4 % und die zweiten 5 Jahre 8 % Jahreszins.
Bei der Bank B kann man das gleiche Kapital 10 Jahre zu 6 % (= Mittelwert von 4 %und 8 %) Jahreszins anlegen.

a) Was ist die bessere Option ?
b) Ein Bankangestellter der Bank A hat die Idee, die Zinssätze für die ersten und die zweiten 5 Jahre zu vertauschen. Was ist dann die bessere Option (im Vergleich zu Bank B) ?
c) Wieviel Prozent Jahreszins müsste man für die ersten 5 Jahre bei der Bank A bekommen (bei immer noch 8 % Jahreszins für die zweiten 5 Jahre), um das gleiche Endkapital wie bei Bank B zu bekommen ?
d) Wieviel Prozent Jahreszins müsste man für die zweiten 5 Jahre bei der Bank A bekommen (bei immer noch 4 % Jahreszins für die ersten 5 Jahre), um das gleiche Endkapital wie bei Bank B zu bekommen ?
e) Ein Bankangestellter bekommt den Auftrag, das Angebot von Bank A zu modifizieren. Die 4 % und 8 % Jahreszins sollen gleich bleiben. Nur die Anzahl der Jahre des ersten und zweiten Zeitabschnitts sollen verändert werden (wobei die Anzahl der Jahre des ersten und zweiten Zeitabschnitts gleich sein müssen).
Wieviel Jahre muss er kalkulieren, um das gleiche Endkapital wie bei Bank B zu bekommen?

5) schwierig (geometrisches Mittel)
Ein Anfangskapital K_0 wird m-Mal (z.B. m=12 Mal monatlich) zum Wachstumsfaktor q_1 auf der Bank angelegt (Zinseszins).
Dann wird es wieder wird m-Mal (z.B. m=12 Mal monatlich) zum Wachstumsfaktor q_2 auf der Bank angelegt (Zinseszins). Dies geschieht n-Mal. ....
Zuletzt wird es wieder wird m-Mal (z.B. m=12 Mal monatlich) zum Wachstumsfaktor q_n auf der Bank angelegt (Zinseszins).
Wie groß ist der mittlere Wachstumsfaktor q ?

Lösungen:

1)

gegeben: p = 4,5 ==> q = 1,045;   n = 5;

gesucht: K_0 ; K_5

Es gilt:

$$K_5 = K_0 + 2500$$

$$K_5 = K_0 \cdot 1{,}045^n$$

also:

$$K_0 + 2500 = K_0 \cdot 1{,}045^n$$

$$K_0 \cdot 1{,}045^n - K_0 = 2500$$

$$K_0(1{,}045^n - 1) = 2500$$

$$K_0 = \frac{2500}{(1{,}045^n - 1)}$$

$$K_0 \approx 10155{,}09$$

Ergebnis:

Das eingelegte Kapital muss 10155,09 Euro betragen.

2)

1. Lösung:

gegeben: p = 4,5 ==> q = 1,045;   n = 5; K_0 = 10000;

gesucht: K_5

$$K_5 = 10000 \cdot 1{,}045^5 \approx 12461{,}82$$

Ergebnis:

Die Bank ist die bessere Option, da er weniger zurückzahlen muss.

2. Lösung:

gegeben: n = 5; K_0 = 10000; K_5 = 12500

gesucht: p

$$12500 = 10000 \cdot (1 + \frac{p}{100})^5 \iff (1 + \frac{p}{100})^5 = \frac{12500}{10000} \iff (1 + \frac{p}{100})^5 = 1{,}25$$

$$\iff 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[5]{1{,}25} \iff \frac{p}{100} = \sqrt[5]{1{,}25} - 1 \iff p = 100 \cdot (\sqrt[5]{1{,}25} - 1) \approx 4{,}56$$

Ergebnis:

Die Bank ist die bessere Option, da der Zinssatz beim Freund größer ist.

3a)

$K_{10}^{A} = K_0 \cdot 1{,}05^{10} \approx 1{,}63\ \mathrm{K}_0$

$K_5^{B} = K_0 \cdot 1{,}1^5 \approx 1{,}61\ \mathrm{K}_0$

Bank A ist die bessere Option

b)

$K_{10}^{A} = K_0 \cdot (1+\frac{p}{100})^{10}$

$K_5^{B} = K_0 \cdot 1{,}1^5$

$K_{10}^{A} = K_5^{B}$

$K_0 \cdot (1+\frac{p}{100})^{10} = K_0 \cdot 1{,}1^5 \quad |: \mathrm{K}_0 \neq 0$

$(1+\frac{p}{100})^{10} = 1{,}1^5$

$1+\frac{p}{100} = \sqrt[10]{1{,}1^5}$

$\frac{p}{100} = \sqrt[10]{1{,}1^5} - 1$

$p = 100 \cdot (\sqrt[10]{1{,}1^5} - 1) = 100 \cdot ((1{,}1^5)^{\frac{1}{10}} - 1) = 100 \cdot (1{,}1)^{\frac{1}{2}} - 1) = 100 \cdot \sqrt{1{,}1} - 1) \approx 4{,}88$

c)

$K_n^{A} = K_0 \cdot 1{,}05^n$

$K_5^{B} = K_0 \cdot 1{,}1^5$

$K_n^{A} = K_5^{B}$

$K_0 \cdot 1{,}05^n = K_0 \cdot 1{,}1^5 \quad |: \mathrm{K}_0 \neq 0$

$1{,}05^n = 1{,}1^5$

$n = \log_{1,05} 1{,}1^5 = 5 \cdot \log_{1,05} 1{,}1 = 5 \cdot \frac{\ln 1{,}1}{\ln 1{,}05} \approx 9{,}77$

d)

$K_5^{B} = K_0 \cdot (1+\frac{p}{100})^5$

$K_{10}^{A} = K_0 \cdot 1{,}05^{10}$

$K_{10}^{A} = K_5^{B}$

$K_0 \cdot (1+\frac{p}{100})^5 = K_0 \cdot 1{,}05^{10} \quad |: \mathrm{K}_0 \neq 0$

$(1+\frac{p}{100})^5 = 1{,}05^{10}$

$1+\frac{p}{100} = \sqrt[5]{1{,}05^{10}}$

$\frac{p}{100} = \sqrt[5]{1{,}05^{10}} - 1$

$p = 100 \cdot (\sqrt[5]{1{,}05^{10}} - 1) = 100 \cdot ((1{,}05^{10})^{\frac{1}{5}} - 1) = 100 \cdot 1{,}05^2 - 1 = 100 \cdot \sqrt{1{,}1} - 1) = 10{,}25$

e)

$K_n^B = K_0 \cdot 1{,}1^n$

$K_5^A = K_0 \cdot 1{,}05^{10}$

$K_n^B = K_5^A$

$K_0 \cdot 1{,}1^n = K_0 \cdot 1{,}05^{10} \quad |: K_0 \neq 0$

$1{,}1^n = 1{,}05^{10}$

$n = \log_{1,1} 1{,}05^{10} = 10 \cdot \log_{1,1} 1{,}05 = 10 \cdot \frac{\ln 1{,}05}{\ln 1{,}1} \approx 5{,}12$

4a)

$K_5^A = K_0 \cdot 1{,}04^5$

$K_{10}^A = K_5^A \cdot 1{,}08^5 = K_0 \cdot 1{,}04^5 \cdot 1{,}08^5 = K_0 \cdot (1{,}04 \cdot 1{,}08)^5 \approx 1{,}78\ K_0$

$K_{10}^B = K_0 \cdot 1{,}06^{10} \approx 1{,}79\ K_0$

Bank B ist die bessere Option

b)

$K_5^A = K_0 \cdot 1{,}08^5$

$K_{10}^A = K_5^A \cdot 1{,}04^5 = K_0 \cdot 1{,}08^5 \cdot 1{,}04^5 = K_0 \cdot (1{,}08 \cdot 1{,}04)^5 \approx 1{,}78\ K_0$

$K_{10}^B = K_0 \cdot 1{,}06^{10} \approx 1{,}79\ K_0$

Die Optionen sind gleich gut.

c)

$K_5^A = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^5$

$K_{10}^A = K_5^A \cdot 1{,}08^5 = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^5 \cdot 1{,}08^5$

$K_{10}^B = K_0 \cdot 1{,}06^{10}$

$K_{10}^A = K_{10}^B$

$K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^5 \cdot 1{,}08^5 = K_0 \cdot 1{,}06^{10} \quad |: K_0 \neq 0$

$(1 + \frac{p}{100})^5 \cdot 1{,}08^5 = 1{,}06^{10}$

$(1 + \frac{p}{100})^5 = \frac{1{,}06^{10}}{1{,}08^5}$

$1 + \frac{p}{100} = (\frac{1{,}06^{10}}{1{,}08^5})^{\frac{1}{5}} = \frac{(1{,}06^{10})^{\frac{1}{5}}}{(1{,}08^5)^{\frac{1}{5}}} = \frac{1{,}06^2}{1{,}08}$

$\frac{p}{100} = \frac{1{,}06^2}{1{,}08} - 1$

$p = 100 \cdot (\frac{1{,}06^2}{1{,}08} - 1) \approx 4{,}04$

d)

$K_5^A = K_0 \cdot 1{,}04^5$

$K_{10}^A = K_5^A \cdot (1+\frac{p}{100})^5 = K_0 \cdot 1{,}04^5 \cdot (1+\frac{p}{100})^5$

$K_{10}^B = K_0 \cdot 1{,}06^{10}$

$K_{10}^A = K_{10}^B$

$K_0 \cdot 1{,}04^5 \cdot (1+\frac{p}{100})^5 = K_0 \cdot 1{,}06^{10} \quad |: K_0 \neq 0$

$1{,}04^5 \cdot (1+\frac{p}{100})^5 = 1{,}06^{10}$

$(1+\frac{p}{100})^5 = \frac{1{,}06^{10}}{1{,}04^5}$

$1+\frac{p}{100} = (\frac{1{,}06^{10}}{1{,}04^5})^{\frac{1}{5}} = \frac{(1{,}06^{10})^{\frac{1}{5}}}{(1{,}04^5)^{\frac{1}{5}}} = \frac{1{,}06^2}{1{,}04}$

$\frac{p}{100} = \frac{1{,}06^2}{1{,}04} - 1$

$p = 100 \cdot (\frac{1{,}06^2}{1{,}04} - 1) \approx 8{,}04$

e)

$K_n^A = K_0 \cdot 1{,}04^n$

$K_{2n}^A = K_n^A \cdot 1{,}08^n = K_0 \cdot 1{,}04^n \cdot 1{,}08^n$

$K_{10}^B = K_0 \cdot 1{,}06^{10}$

$K_{2n}^A = K_{10}^B$

$K_0 \cdot 1{,}04^n \cdot 1{,}08^n = K_0 \cdot 1{,}06^{10} \quad |: K_0 \neq 0$

$1{,}04^n \cdot 1{,}08^n = 1{,}06^{10}$

$(1{,}04 \cdot 1{,}08)^n = 1{,}06^{10}$

$n = \log_{1{,}04 \cdot 1{,}08} 1{,}06^{10} = 10 \cdot \log_{1{,}04 \cdot 1{,}08} 1{,}06 = 10 \cdot \frac{\ln 1{,}06}{\ln(1{,}04 \cdot 1{,}08)} = 10 \cdot \frac{\ln 1{,}06}{\ln 1{,}04 + \ln 1{,}08}$

$n \approx 5{,}02$

5)

a)

Das Kapital K_0 wird m Zeitabschnitte zum Wachstumsfaktor q_1 angelegt.

Das Endkapital beträgt dann: $K_0 \cdot q_1{}^m$

Dieses Endkapital ist jetzt wieder Anfangskapital und wird m Zeitabschnitte zum Wachstumsfaktor q_2 angelegt.

Das Endkapital beträgt dann: $K_0 \cdot q_1{}^m \cdot q_2{}^m$

....

Dieses Endkapital ist jetzt wieder Anfangskapital und wird m Zeitabschnitte zum Wachstumsfaktor q_n angelegt.

Das Endkapital beträgt dann: $K_0 \cdot q_1{}^m \cdot q_2{}^m \cdot \cdots \cdot q_n{}^m$

b)

q sei der Wachstumsfaktor, mit dem K_0 $n \cdot m$ Zeitabschnitte lang angelegt wird und das gleiche Endkapital ergibt wie bei a).

Dann gilt:

$K_0 \cdot q_1{}^m \cdot q_2{}^m \cdot \cdots \cdot q_n{}^m = K_0 \cdot q^{n \cdot m}$ ==>

$q_1{}^m \cdot q_2{}^m \cdot \cdots \cdot q_n{}^m = q^{n \cdot m}$ ==>

$(q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_n)^m = q^{n \cdot m}$ ==>

$(q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_n) = q^{n \cdot}$ ==>

$q = \sqrt[n]{q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_n)}$

Ds bedeutet:

q ist das geometrische Mittel aus q_1, q_2, ... , q_n

2 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

Die Grundmenge ist G = R. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen

$A1)\ 10^{x-1} = 6$

$A2)\ 2^x = 3^{x-1}$

$A3)\ \ln(1-4x) = -\frac{1}{2}$

$A4)\ 9 \cdot 3^{2x} = 3^{x+1}$

$A5)\ 3 \cdot 5^x = 7^{x-1}$

$A6)\ 5 \cdot 5^x + 5^{-x} = 6$

$A7)\ 4 \cdot 5^{x-1} = 10^{x+1}$

$A8)\ 7 \cdot 6^{2x} = 11^{x+3}$

$A9)\ 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

$A10)\ 9 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^{-x} - 82 = 0$

$A11)\ 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

$A12)\ 16^x - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$

$A13)\ 5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^{-x} - 126 = 0$

$A14)\ 2^{2x+5} - 3 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$

$A15)\ \log_{10} x + \log_{10}(x-3) = \log_{10} 18$

$A16)\ \log_2(x-3) - \log_2(x^2-9) + 2 = 0$

$A17)\ 2{,}5 \cdot 2^{4x-4} \cdot 5^{x+2} = 2^{2x+1} \cdot 5^{3x-3}$

Vereinfachen Sie

$B1)\ 2 \cdot \log_b(x^2-c^2) - \log_b(x^2+2cx+c^2) - \log_b(x-c)^2$

$B2)\ a^{-2\log_a x}$

$B3)\ b^{\log_b(\log_b b^2)}$

$B4)\ \log_a \frac{x^2 \cdot \sqrt{y}}{z^3 \cdot \sqrt[4]{u}}$

$B5)\ \log_u \frac{3u^2}{4\sqrt{v}}$

$B6)\ \log_p \sqrt{\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}}$

$B7)\ \ln \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$B8)\ \log_x \frac{5}{x^2 \cdot y^3}$

$B9)\ \log_c 27 : \log_c \frac{1}{27}$

$B10)$ *Zeigen Sie*:

$\ln(2-\sqrt{3}) = -\ln(2+\sqrt{3})$

C1)

Geben Sie die Exponentialfunktion der Form

$f(x) = c \cdot a^x$ (a >0)

an, die durch die folgenden Punkte geht:

a) P(2|1), Q(5|7)

b) P(0|4), Q(2|1)

Lösungen:

$A1)\quad 10^{x-1}=6 \qquad D=R \quad \Leftrightarrow$

$x-1=\log_{10}6 \Leftrightarrow x=\log_{10}6+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 6}{\ln 10}+1 \Leftrightarrow$

$x \approx 1{,}778$

$A2)\quad 2^x = 3^{x-1} \qquad D=R \quad \Leftrightarrow$

1. *Lösung* :

$2^x=\dfrac{3^x}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3^x}{2^x}=3 \Leftrightarrow (\dfrac{3}{2})^x=3 \Leftrightarrow x=\log_{1,5}3 \Leftrightarrow$

$x \approx 2{,}7095$

2. *Lösung* :

$\ln 2^x=\ln 3^{x-1} \Leftrightarrow x\ln 2=(x-1)\ln 3 \Leftrightarrow x\ln 2 = x\ln 3-\ln 3 \Leftrightarrow$

$x\ln 3 - x\ln 2=\ln 3 \Leftrightarrow x(\ln 3-\ln 2)=\ln 3 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2} \Leftrightarrow$

$x=2{,}7095$

3. *Lösung* :

$x=\log_2 3^{x-1} \Leftrightarrow x=(x-1)\cdot\log_2 3 \Leftrightarrow x=x\cdot\log_2 3-\log_2 3 \Leftrightarrow$

$x-x\cdot\log_2 3=-\log_2 3 \Leftrightarrow x(1-\log_2 3)=\log_2 3 \Leftrightarrow x=\dfrac{-\log_2 3}{1-\log_2 3} \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 3-1} \approx 2{,}7095$

$A3)\quad \ln(1-4x)=-\dfrac{1}{2} \qquad D=\{x\in R \mid x<\dfrac{1}{4}\} \quad \Leftrightarrow$

$e^{-0,5}=1-4x \Leftrightarrow 4x=1-e^{-0,5} \Leftrightarrow x=\dfrac{1-e^{-0,5}}{4}$

$x \approx 0{,}09836$

$A4)\quad 9\cdot 3^{2x}=3^{x+1} \qquad D=R$

1. *Lösung* :

$9=\dfrac{3^{x+1}}{3^{2x}} \Leftrightarrow 9=3^{x+1-2x} \Leftrightarrow 9=3^{-x+1} \Leftrightarrow$

$-x+1=\log_3 9 \Leftrightarrow x=1-\log_3 9 \Leftrightarrow$

$x=1-2 \Leftrightarrow x=-1$

2. *Lösung* :

$\ln(9\cdot 3^{2x})=\ln(3^{x+1}) \Leftrightarrow \ln 9+\ln 3^{2x}=(x+1)\ln 3 \Leftrightarrow$

$\ln 9+2x\ln 3=x\ln 3+\ln 3 \Leftrightarrow x\ln 3=\ln 3-\ln 9 \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{\ln 3-\ln 9}{\ln 3} \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(1/3)}{\ln 3}=\dfrac{\ln 3^{-1}}{\ln 3}=\dfrac{-1\cdot\ln 3}{\ln 3} \Leftrightarrow$

$x=-1$

$A5)\quad 3\cdot 5^x = 7^{x-1} \qquad D = R \quad \Leftrightarrow$

$3\cdot 5^x = \frac{7^x}{7} \Leftrightarrow 21\cdot 5^x = 7^x \Leftrightarrow 21 = \frac{7^x}{5^x} \Leftrightarrow$

$21 = (\frac{7}{5})^x \Leftrightarrow x = \log_{7/5} 21 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 21}{\ln(7/5)} \Leftrightarrow$

$x \approx 9{,}05$

$A6)\quad 5\cdot 5^x + 5^{-x} = 6 \qquad D = R$

$setze:\ u = 5^x\ \ (\neq 0) \Leftrightarrow$

$5\cdot u + \frac{1}{u} = 6 \Leftrightarrow 5\cdot u^2 + 1 = 6u \Leftrightarrow 5\cdot u^2 - 6u + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$u_1 = 1\ ;\ u_2 = 1/5 \Leftrightarrow 5^{x_1} = 1\ ;\ 5^{x_2} = 1/5 \Leftrightarrow$

$x_1 = 0\ ;\ x_2 = -1$

$A7)\quad 4\cdot 5^{x-1} = 10^{x+1} \qquad D = R \quad \Leftrightarrow$

$4\cdot \frac{5^x}{5} = 10^x \cdot 10 \Leftrightarrow \frac{10^x}{5^x} = \frac{4}{50} \Leftrightarrow (\frac{10}{5})^x = \frac{4}{50} \Leftrightarrow$

$2^x = \frac{4}{50} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{4}{50} \Leftrightarrow x = \frac{\ln \frac{4}{50}}{\ln 2} \approx -3{,}64$

$A8)\quad 7\cdot 6^{2x} = 11^{x+3} \qquad D = R \quad \Leftrightarrow$

$7\cdot (6^2)^x = 11^x \cdot 11^3 \Leftrightarrow 7\cdot 36^x = 11^x \cdot 11^3 \Leftrightarrow$

$\frac{36^x}{11^x} = \frac{11^3}{7} \Leftrightarrow (\frac{36}{11})^x = \frac{11^3}{7} \Leftrightarrow x = \log_{36/11} \frac{11^3}{7} \Leftrightarrow$

$x = \frac{\ln \frac{11^3}{7}}{\ln(36/11)} \approx 4{,}43$

$A9)\quad 4^x - 12\cdot 2^x + 32 = 0 \qquad D = R \quad \Leftrightarrow$

$(2^2)^x - 12\cdot 2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow$

$(2^x)^2 - 12\cdot 2^x + 32 = 0$

$setze:\ u = 2^x\ \ (\neq 0) \Leftrightarrow$

$u^2 - 12u + 32 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 8 \quad u_2 = 4 \quad \Leftrightarrow$

$2^{x1} = 8 \quad 2^{x2} = 4 \Leftrightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 2$

$A10) \quad 9\cdot 3^x + 9\cdot 3^{-x} - 82 = 0 \qquad D = R \quad \Leftrightarrow$

$9\cdot 3^x + 9\cdot 3^{-x} - 82 = 0$

$setze: \; u = 3^x \;\; (\neq 0) \Leftrightarrow$

$9\cdot u + \frac{9}{u} - 82 = 0 \Leftrightarrow 9\cdot u^2 + 9 - 82u = 0 \Leftrightarrow$

$9\cdot u^2 - 82u + 9 = 0 \Leftrightarrow 9\cdot u^2 - 82u + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$u_1 = 9 \quad u_2 = 1/9 \Leftrightarrow 3^{x1} = 9 \quad 3^{x2} = 1/9 \Leftrightarrow$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

$A11) \quad 3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3 = 0 \qquad D = R \quad \Leftrightarrow$

$(3^x)^2 - 4\cdot 3^x + 3 = 0$

$setze: \; u = 3^x \;\; (\neq 0) \Leftrightarrow$

$u^2 - 4u + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$u_1 = 3 \quad u_2 = 1 \Leftrightarrow$

$3^{x1} = 3 \quad 3^{x2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 0$

$A12) \quad 16^x - 6\cdot 4^x + 8 = 0 \qquad D = R \quad \Leftrightarrow$

$(4^x)^2 - 6\cdot 4^x + 8 = 0$

$setze: \; u = 4^x \;\; (\neq 0) \Leftrightarrow$

$u^2 - 6u + 8 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 4 \quad u_2 = 2 \Leftrightarrow$

$4^{x1} = 4 \quad 4^{x2} = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 1/2$

$A13) \quad 5\cdot 5^x + 25\cdot 5^{-x} - 126 = 0 \qquad D = R$

$setze: \; u = 5^x \;\; (\neq 0) \Leftrightarrow$

$5\cdot u + \frac{25}{u} - 126 = 0 \Leftrightarrow 25u^2 - 126u + 25 = 0 \Leftrightarrow$

$u_1 = 1/5 \quad u_2 = 25 \Leftrightarrow 5^{x1} = 1/5 \quad 5^{x2} = 25 \Leftrightarrow$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$

$A14) \quad 2^{2x+5} - 3\cdot 2^{x+2} + 1 = 0 \qquad D = R \quad \Leftrightarrow$

$2^{2x}\cdot 2^5 - 3\cdot 2^x\cdot 2^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2\cdot 32 - 12\cdot 2^x + 1 = 0$

$setze: \; u = 2^x \;\; (\neq 0)$

$\Leftrightarrow 32u^2 - 12u + 1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1/4 \quad u_2 = 1/8 \Leftrightarrow$

$2^{x1} = 1/4 \quad 2^{x2} = 1/8 \Leftrightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = -3$

$A15) \quad \log_{10} x + \log_{10}(x-3) = \log_{10} 18 \qquad D = \{x \in R \mid x > 3\} \quad \Leftrightarrow$

$\log_{10}(x\cdot(x-3)) = \log_{10} 18 \Leftrightarrow x\cdot(x-3) = 18 \Leftrightarrow$

$x^2 - 3x = 18 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = 6 \quad x_2 = -3 \;\; (keine\ Lösung)$

$A16) \quad \log_2(x-3) - \log_2(x^2-9) + 2 = 0 \qquad D = \{x \in R \mid x > 3\} \quad \Leftrightarrow$

$\log_2 \frac{x-3}{x^2-9} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{x+3} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+3)^{-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$-\log_2(x+3) + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = 2 \Leftrightarrow$

$x + 3 = 2^2 \Leftrightarrow x = 1$ (*keine Lösung*)

A17) 1. Lösung

$2{,}5 \cdot 2^{4x-4} \cdot 5^{x+2} = 2^{2x+1} \cdot 5^{3x-3}$

$2{,}5 \cdot 2^{4x-4} \cdot 5^{x+2} = 2^{2x+1} \cdot 5^{3x-3}$

$2{,}5 \cdot 2^{4x} \cdot 2^{-4} \cdot 5^{x} \cdot 5^{2} = 2^{2x} \cdot 2^{1} \cdot 5^{3x} \cdot 5^{-3}$

$\frac{2{,}5 \cdot 2^{-4} \cdot 5^2}{5^{-3} \cdot 2^1} = \frac{2^{2x} \cdot 5^{3x}}{2^{4x} \cdot 5^x}$

$\frac{5 \cdot 2^{-4} \cdot 5^2}{2 \cdot 5^{-3} \cdot 2} = 2^{2x-4x} \cdot 5^{3x-x}$

$2^{-6} \cdot 5^6 = 2^{-2x} \cdot 5^{2x}$

$2^{-6} \cdot 5^6 = (2^{-1})^{2x} \cdot 5^{2x}$

$2^{-6} \cdot 5^6 = (2^{-1} \cdot 5)^{2x}$

$2^{-6} \cdot 5^6 = 2{,}5^{2x}$

$2x = \log_{2,5}(2^{-6} \cdot 5^6) = 6$

$x = 3$

2. Lösung

$\ln(2{,}5 \cdot 2^{4x-4} \cdot 5^{x+2}) = \ln(2^{2x+1} \cdot 5^{3x-3}) \qquad D = R \Leftrightarrow$

$\ln(\frac{5}{2}) + \ln 2^{4x-4} + \ln 5^{x+2} = \ln 2^{2x+1} + \ln 5^{3x-3} \Leftrightarrow$

$\ln 5 - \ln 2 + (4x-4) \cdot \ln 2 + (x+2) \cdot \ln 5 = (2x+1) \cdot \ln 2 + (3x-3) \cdot \ln 5 \Leftrightarrow$

$\ln 5 - \ln 2 + 4x \cdot \ln 2 - 4 \cdot \ln 2 + x \cdot \ln 5 + 2 \cdot \ln 5 = 2x \cdot \ln 2 + \ln 2 + 3x \cdot \ln 5 - 3 \cdot \ln 5 \Leftrightarrow$

$\ln 5 - \ln 2 + -4 \cdot \ln 2 + 2 \cdot \ln 5 - \ln 2 + 3 \cdot \ln 5 = 2x \cdot \ln 2 + 3x \cdot \ln 5 - 4x \cdot \ln 2 - x \cdot \ln 5 \Leftrightarrow$

$\ln 5 - \ln 2 + -4 \cdot \ln 2 + 2 \cdot \ln 5 - \ln 2 + 3 \cdot \ln 5 = x(2\ln 2 + 3\ln 5 - 4\ln 2 - \ln 5) \Leftrightarrow$

$x = \frac{\ln 5 - \ln 2 + -4 \cdot \ln 2 + 2 \cdot \ln 5 - \ln 2 + 3 \cdot \ln 5}{2\ln 2 + 3\ln 5 - 4\ln 2 - \ln 5} = \frac{6\ln 5 - 6\ln 2}{-2\ln 2 + 2\ln 5} = \frac{6(\ln 5 - \ln 2)}{2(-\ln 2 + \ln 5)} = 3$

$\Leftrightarrow x = 3$

$B1) \quad 2 \cdot \log_b(x^2 - c^2) - \log_b(x^2 + 2cx + c^2) - \log_b(x-c)^2 =$

$2 \cdot \log_b((x-c)(x+c)) - \log_b(x+c)^2 - \log_b(x-c)^2 =$

$2 \cdot (\log_b(x-c) + \log_b(x+c)) - 2\log_b(x+c) - 2\log_b(x-c) =$

$2\log_b(x-c) + 2\log_b(x+c) - 2\log_b(x+c) - 2\log_b(x-c) = 0$

$B2) \quad a^{-2\log_a x} = (a^{\log_a x})^{-2} = x^{-2}$

$B3) \quad b^{\log_b(\log_b b^2)} = b^{\log_b 2} = 2$

$$B4)\ \ \log_a \frac{x^2\cdot\sqrt{y}}{z^3\cdot\sqrt[4]{u}} = \log_a(x^2\cdot\sqrt{y}) - \log_a(z^3\cdot\sqrt[4]{u}) = \log_a(x^2\cdot y^{\frac{1}{2}}) - \log_a(z^3\cdot u^{\frac{1}{4}}) =$$

$$\log_a x^2 + \log_a y^{\frac{1}{2}} - \log_a z^3 - \log_a u^{\frac{1}{4}} = 2\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - 3\log_a z - \frac{1}{4}\log_a u$$

$$B5)\ \ \log_u \frac{3u^2}{4\sqrt{v}} = \log_u(3u^2) - \log_u(4\sqrt{v}) = \log_u 3 + \log_u u^2 - \log_u 4 - \log_u \sqrt{v} =$$

$$\log_u 3 + 2 - \log_u 4 - \log_u v^{\frac{1}{2}} = \log_u 3 + 2 - \log_u 4 - \frac{1}{2}\log_u v$$

$$B6)\ \ \log_p \sqrt{\frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7}} = \log_p\left(\frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_p \frac{(4a^3\cdot\sqrt{p})^{\frac{1}{2}}}{(b^5\cdot q^7)^{\frac{1}{2}}} = \log_p \frac{(4a^3)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{p}^{\frac{1}{2}}}{(b^5)^{\frac{1}{2}}\cdot(q^7)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\log_p \frac{4^{\frac{1}{2}}\cdot a^{3\cdot\frac{1}{2}}\cdot(p^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{b^{5\cdot\frac{1}{2}}\cdot q^{7\cdot\frac{1}{2}}} = \log_p \frac{\sqrt{4}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot p^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}\cdot q^{\frac{7}{2}}} = \log_p \frac{2\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot p^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}\cdot q^{\frac{7}{2}}} =$$

$$\log_p(2\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot p^{\frac{1}{4}}) - \log_p(b^{\frac{5}{2}}\cdot q^{\frac{7}{2}}) = \log_p 2 + \log_p a^{\frac{3}{2}} + \log_p p^{\frac{1}{4}} - \log_p b^{\frac{5}{2}} - \log_p q^{\frac{7}{2}} =$$

$$\log_p 2 + \frac{3}{2}\log_p a + \frac{1}{4} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q$$

2. Lösung:

$$B6)\ \ \log_p \sqrt{\frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7}} = \log_p\left(\frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_p \frac{4a^3\cdot\sqrt{p}}{b^5\cdot q^7} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\log_p(4a^3\cdot\sqrt{p}) - \log_p(b^5\cdot q^7)\right) = \frac{1}{2}\left(\log_p(4a^3) + \log_p\sqrt{p} - \log_p b^5 - \log_p q^7\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\log_p 4 + \log_p a^3 + \log_p p^{\frac{1}{2}} - 5\log_p b - 7\log_p q\right) =$$

$$\frac{1}{2}\log_p 4 + \frac{1}{2}\log_p a^3 + \frac{1}{2}\log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q =$$

$$\frac{1}{2}\log_p 2^2 + \frac{3}{2}\log_p a + \frac{1}{2}\log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q =$$

$$\log_p 2 + \frac{3}{2}\log_p a + \frac{1}{4} - \frac{5}{2}\log_p b - \frac{7}{2}\log_p q$$

$$B7)\ \ \ln\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \ln(x^2-y^2) - \ln(x^2+y^2) = \ln((x-y)(x+y)) - \ln(x^2+y^2) =$$

$$= \ln(x-y) + \ln(x+y) - \ln(x^2+y^2)$$

$B8)\ \log_x \frac{5}{x^2 \cdot y^3} = \log_x 5 - \log_x (x^2 \cdot y^3) = \log_x 5 - \log_x x^2 - \log_x y^3 =$

$= \log_x 5 - 2 - 3\log_x y$

$B9)\ \log_c 27 : \log_c \frac{1}{27} = \frac{\log_c 27}{\log_c \frac{1}{27}} = \frac{\log_c 27}{\log_c 1 - \log_c 27} = \frac{\log_c 27}{0 - \log_c 27} = \frac{\log_c 27}{-\log_c 27} = -1$

B10)

$\ln(2-\sqrt{3}) = -\ln(2+\sqrt{3})$ <==>

$\ln(2-\sqrt{3}) + \ln(2+\sqrt{3}) = 0$ <==>

$\ln((2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})) = 0$ <==>

$\ln(2^2 - (\sqrt{3})^2) = 0$ <==>

$\ln(4 - 3) = 0$ <==>

$\ln(1) = 0$ <==>

$0 = 0$

C1)

a) $P \in K_f$ und $Q \in K_f$, also:

$1 = c \cdot a^2 \quad (G11)$

$7 = c \cdot a^5 \quad (G12)$

$c = 1/a^2 \quad (G21)$

$c = 7/a^5 \quad (G22)$

$\frac{1}{a^2} = \frac{7}{a^5} \quad (G31)$

damit:

$a^3 = 7$

$a = \sqrt[3]{7} \qquad c = \frac{1}{(\sqrt[3]{7})^2}$

C2)

b) $P \in K_f$ und $Q \in K_f$, also:

$4 = c \quad (G11)$

$1 = c \cdot a^2 \quad (G12)$

$c = 4 \quad (G21)$

$c = 1/a^2 \quad (G22)$

$4 = \frac{1}{a^2} \quad (G31)$

damit:

$a^2 = \frac{1}{4}$

$a = \frac{1}{2}$, da a > 0

$c = 4$