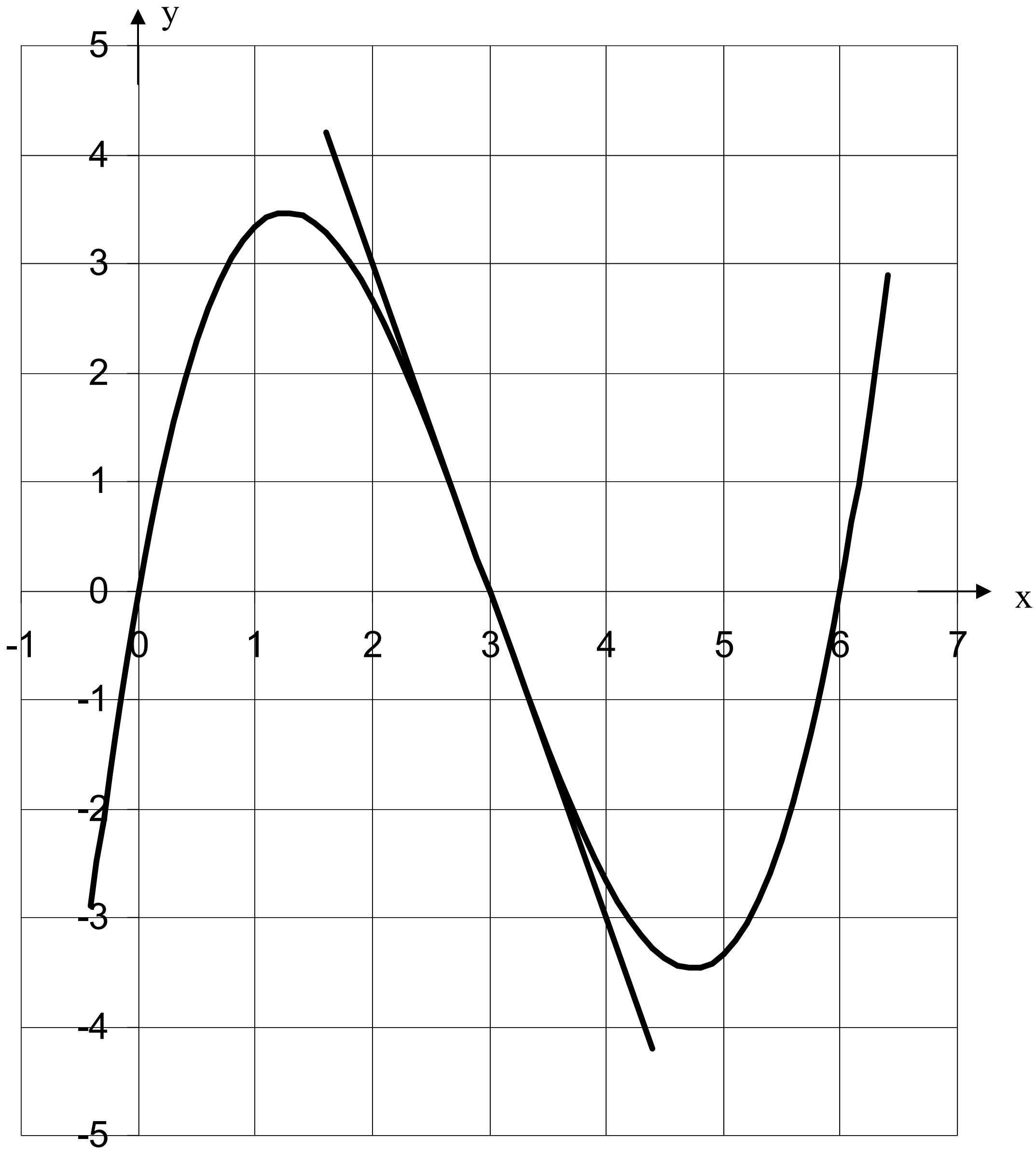
1 "NEUE" ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

1) a) Die folgende Abbildung (siehe Arbeitsblatt) zeigt das Schaubild einer ganzrationalen Funktion f 3. Grades mit der Tangente im Schnittpunkt mit der x-Achse.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und den Funktionsterm von f.



b) Gegeben ist die Funktion g mit

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x,\ \ x \in R$$

Zeichnen Sie das Schaubild G von g in das Arbeitsblatt ein.
Bestimmen Sie die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten von K_f und G.

c) An welcher Stelle haben die beiden Schaubilder parallele Tangenten?

d) Berechnen Sie den Inhalt der von den beiden Schaubildern eingeschlossenen Fläche.

2) Gegeben ist die Funktion f mit:

$f(x) = \frac{1}{16}(-x^4 + 6x^2 + 27)$, $x \in R$

Ihr Schaubild ist K_f

a) Welche Koordinaten haben die Extrempunkte?

b) Was kann man aus der Lage der Extrempunkte über Anzahl und Lage der Schnittpunkte mit der x-Achse schließen?

c) An welchen Stellen hat K_f eine Tangente, die parallel zur Geraden g mit $y = -\frac{1}{2}x$ verlaufen ? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

3) Gegeben ist die Funktion f mit:

$f(x) = \frac{1}{8}x^3(x+4)$, $x \in R$

Ihr Schaubild ist K.

a) Welche Eigenschaften von K lassen sich bereits an der Funktionsgleichung ablesen?

b) Begründen Sie, warum an der Stelle $x_o = -2$ kein Minimum von f vorliegen kann.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K exakt.

d) Die Gerade $y = 2x + 2$ und K schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie deren Inhalt. Begründen Sie die Wahl Ihrer Integrationsgrenzen.

e) Für jedes $a \in R$ mit $-2 \leq a \leq 2$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $x = a$ das Schaubild K im Punkt Q und die Gerade t im Punkt S. Bestimmen Sie die Länge, die die Strecke QS maximal annehmen kann.

4)

Ist die folgende Behauptung richtig:
Wenn eine Parabel 4. Ordnung 2 verschiedene Punkte besitzt, an denen die 2. Ableitung 0 ist, dann sind diese 2 Punkte Wendepunkte.

5)

Warum kann ein Polynom 3. Grades keine 2 verschiedene Extrempunkte und einen Sattelpunkt haben?

Lösungen:
1) a)
$f(x) = ax^3+bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

a1) $W(0 \mid 0) \in K_f$:
$0 = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$
$d = 0$

a2) $W(3 \mid 0) \in K_f$:
$0 = a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d$
$27a + 9b + 3c = 0 \mid : 3$
$9a + 3b + c = 0$ (G1)

a3) $W(6 \mid 0) \in K_f$:
$0 = a\cdot 6^3 + b\cdot 6^2 + c\cdot 6 + d$
$216a + 36b + 6c = 0 \mid : 6$
$36a + 6b + c = 0$ (G2)

a4) $f'(3) = -3$
$-3 = 3a\cdot 3^2 + 2b\cdot 3 + c$
$27a + 6b + c = -3$ (G3)

insgesamt folgt dann (mit TR):
$a = 1/3$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 0$
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x$$
$$f'(x) = x^2 - 6x + 6$$

b)
Im Punkt $B(x_B|y_B)$ haben die beiden Kurven eine gemeinsameTangente
Es gilt dort:
$g(x_B) = f(x_B) \wedge g'(x_B) = f'(x_B)$
also
$$\frac{1}{3}x_B^3 - 3x_B = \frac{1}{3}x_B^3 - 3x_B^2 + 6x_B \wedge x_B^2 - 3 = x_B^2 - 6x_B + 6$$
also
$$\frac{1}{3}x_B^3 - 3x_B = \frac{1}{3}x_B^3 - 3x_B^2 + 6x_B \iff -9x_B = -3x_B^2 \iff -9x_B = -3x_B^2 \iff$$
$$-3x_B^2 + 9x_B = 0 \iff -3x_B(x_B - 3) = 0 \iff x_B = 0 \vee x_B = 3$$
und
$$x_B^2 - 3 = x_B^2 - 6x_B + 6 \iff 6x_B = 9 \iff x_B = 1{,}5$$
damit gibt es keine gemeinsame Tangente der beiden Kurven.

c) $x_B = 1{,}5$

d)

$$A = \int_0^3 f(x) - g(x)dx \text{ ist } = \int_0^3 (\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x - (\frac{1}{3}x^3 - 3x))dx =$$

$$\int_0^3 (\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x - \frac{1}{3}x^3 + 3x))dx = \int_0^3 -3x^2 + 9x)dx = \left[-x^3 + 4{,}5x^2\right]_0^3 =$$

$-3^3 + 4{,}5\cdot 3^2 - (-0^3 + 4{,}5\cdot 0^2) = -27 + 40{,}5 = 13{,}5$

2)

a) $f(x) = \frac{1}{16}(-x^4 + 6x^2 + 27) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{27}{16}$

$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x$

$f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$

$f'''(x) = -\frac{3}{2}x$

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$-\frac{1}{4}x_e^3 + \frac{3}{4}x_e = 0$ <==> $\frac{1}{4}x_e(-x_e^2 + 3) = 0$

Fall 1:

$\frac{1}{4}x_e = 0$, also:

$x_{e1} = 0$

Fall 2:

$-x_e^2 + 3 = 0$ <==> $x_e^2 = 3$

$x_{e2} = \sqrt{3}$; $x_{e3} = -\sqrt{3}$

$f''(0) = -\frac{3}{4}\cdot(0)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} > 0$ ==> TP

$f''(\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}\cdot(\sqrt{3})^2 + \frac{3}{4} = -\frac{6}{4} < 0$ ==> HP

$f''(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}\cdot(-\sqrt{3})^2 + \frac{3}{4} = -\frac{6}{4} < 0$ ==> HP

$y_{e1} = f(0) = \frac{1}{16}\cdot(-0^4 + 6\cdot 0^2 + 27) = \frac{27}{16}$

$y_{e2} = f(\sqrt{3}) = \frac{1}{16}\cdot(-\sqrt{3}^4 + 6\cdot\sqrt{3}^2 + 27) = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$

$y_{e3} = f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{16}\cdot(-(-\sqrt{3})^4 + 6\cdot(-\sqrt{3})^2 + 27) = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$

damit:

$T(0 \mid \frac{27}{16})$ ist Hochpunkt

$H_1(\sqrt{3} \mid \frac{9}{4})$ ist Tiefpunkt

$H_2(-\sqrt{3} \mid \frac{9}{4})$ ist Tiefpunkt

b)

Es muß 2 Schnittpunkte x_{s1} und x_{s2} mit der x-Achse geben. Für diese gilt:
$x_{s1} < -\sqrt{3}$ und $x_{s2} > \sqrt{3}$

c)
An diesen Stellen $B(x_B \mid y_B)$ ist die Steigung m = -0,5:
$$-\frac{1}{2} = f'(x_B) = -\frac{1}{4}x_B^3 + \frac{3}{4}x_B \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x_B^3 + \frac{3}{4}x_B \quad \Longleftrightarrow$$
$$2 = x_B^3 - 3x_B$$
weiter mit TR

3)
a)
$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$$
a1) Da die Funktionsgleichung gerade und ungerade Exponenten enthält, ist sie weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.
a2) Da das Absolutglied fehlt, geht sie durch den Ursprung.

b)
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$
$$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x$$
$$f'''(x) = 3x + 3$$
Da $f'(-2) = \frac{1}{2}(-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 = -4 + 6 = 2 \neq 0$, gibt es an dieser Stelle kein Extremum.

c) Wendepunkte
Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$
$$\frac{3}{2}x_W^2 + 3x_w = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_w\left(\frac{1}{2}x_w + 1\right) = 0$$
Fall 1:
$3x_w = 0$
$x_w = 0$, also:
$x_{w1} = 0$

Fall 2:
$$\frac{1}{2}x_w + 1 = 0$$
$x_w = -2$, also:
$x_{w2} = -2$

$f'''(0) = 3 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 0 \implies$ Wendepunkt
$f'''(2) = 3 \cdot 2 + 3 = 9 \neq 0 \implies$ Wendepunkt
$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$$

y_{w1} = f(0) = $\frac{1}{8}\cdot 0^4 + \frac{1}{2}\cdot 0^3 = 0$

y_{w2} = f(-2) = $\frac{1}{8}\cdot(-2)^4 + \frac{1}{2}\cdot(-2)^3$ = 2 - 4 = -2

damit:

W_1(0 | 1,25) ist Wendepunkt

W_2(2 | 5,25) ist Wendepunkt

d) g(x) = 2x+2

1) Schnittpunkte zwischen K und K_g:

S(x_s | y_s) sei Schnittpunkt von K und K_g

$\frac{1}{8}x_S^4 + \frac{1}{2}x_S^3 = 2x_S + 2$ <==> $x_S^4 + 4x_S^3 = 16x_S + 16 = x_S^4 + 4x_S^3 - 16x_S - 16 = 0$

Setze $h(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 16$ und probiere:

h(2) = $2^4 + 4\cdot 2^3 - 16\cdot 2 - 16 = 0$

h(-2) = $(-2)^4 + 4\cdot(-2)^3 - 16\cdot(-2) - 16 = 0$

also x_{s1} = -2 und x_{s2} = 2

A = $\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)dx$ ist = $\int_{-2}^{2}(2x + 2 - (\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3))dx = \int_{-2}^{2}(2x + 2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3)dx =$

$= \int_{-2}^{2}(2x + 2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3)dx = \left[x^2 + 2x - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{8}x^4\right]_{-2}^{2}$ = ...

e)

1. Lösung:

e1) Zielfunktion:

d(x) = g(x) - f(x) = $2x + 2 - (\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3) = 2x + 2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$

Bestimmung der Ableitungen:

d'(x) = $2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

d''(x) = $-\frac{3}{2}x^2 - 3x$

e2) Definitionsbereich:

D = [-2, 2]

e3) Lokale Extremwerte E(x_e | d(x_e)): d'(x_e)=0

Extrempunkte E(x_e|y_e): f '(x_e) = 0

d'(x) = $2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

$2 - \frac{1}{2}x_e^3 - \frac{3}{2}x_e^2 = 0$

TR liefert x_e = 1

e4) Randwertuntersuchung:

d(-2) = 0
d(2) = 0

Ergebnis:
Für $x_e = 1$ wird der maximale Wert d(1) = $2 \cdot 1 + 2 - \frac{1}{8} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^3 = 3\frac{3}{8}$ erreicht.

2. Lösung:
Da keine exakte Berechnung verlangt war, könnte man wie folgt rechnen:
e1) Zielfunktion:
d(x) = g(x) - f(x) = $2x + 2 - (\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3) = 2x + 2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$
TR liefert für $x_e = 1$ den maximalen Wert d(1) = $3\frac{3}{8}$
e2) Definitionsbereich:
D = [-2, 2]

e3) Randwertuntersuchung:
d(-2) = 0
d(2) = 0

Ergebnis:
Für $x_e = 1$ wird der maximale Wert d(1) = $2 \cdot 1 + 2 - \frac{1}{8} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^3 = 3\frac{3}{8}$ erreicht.
4)
1. Lösung:
Die 2. Ableitung ist eine Parabel 2. Ordnung.
Wäre an einer der beiden Nullstellen die 3. Ableitung gleich 0, dann wäre eine der 2 Nullstellen eine doppelte Nullstelle und damit die Parabel 2. Ordnung eine Parabel 3. Ordnung. Widerspruch.
Also ist die 3. Ableitung an keiner an keiner Nullstellen der Parabel 2. Ordnung gleich 0.
Also Wendepunkte.

2. Lösung:
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
$f'''(x) = 24ax + 6b$

Die Nullstellen der 2. Ableitung werden bestimmt durch:
$12ax^2 + 6bx + 2c = 0$
Für die Nullstellen der 2. Ableitung gilt damit:
$$x_{1/2} = \frac{-6b \pm \sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a} = \frac{-b}{4a} \pm \frac{\sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a}$$
also: $x_1 = \frac{-6b + \sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a}$ und $x_2 = \frac{-6b - \sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a}$

Die Nullstelle der 3. Ableitung wird bestimmt durch:

$24ax + 6b = 0$
Für die Nullstelle der 3. Ableitung gilt damit:

$$x_3 = -\frac{6b}{24a}$$

Annahme:
$x_3 = x_1$

also: $\frac{\sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a} = 0$ ==> $x_2 = x_1$ Widerspruch

Annahme:
$x_3 = x_2$

also: $-\frac{\sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a} = 0$ ==> $\frac{\sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a} = 0$ ==> $x_2 = x_1$ Widerspruch