1 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

1) Bestimmen Sie jeweils das bestimmte Integral:

$a)\int_0^3 x\,dx \quad b)\int_{-3}^0 x\,dx \quad c)\int_{-3}^3 x\,dx \quad d)\int_{\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}} 2x\,dx \quad e)\int_0^4 \frac{1}{3}x\,dx \quad f)\int_1^2 -3x\,dx \quad g)\int_2^4 x^2\,dx \quad h)\int_{0,5}^{1,5} x^3\,dx$

$i)\int_{-1}^2 \frac{x^2}{2}\,dx \quad j)\int_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{3}\,dx \quad k)\int_0^2 (x-2)\,dx \quad l)\int_{-2,5}^{2,5} (3x-1)\,dx \quad m)\int_{-2}^2 (\frac{3x^2}{2}-\frac{8x^3}{3})\,dx$

$n)\int_{-3}^0 (\frac{x^3}{6}-\frac{3}{2}x)\,dx \quad o)\int_{-2}^{-1} (1-2x+3x^2-4x^3)\,dx \quad p)\int_0^2 1\,dx \quad q)\int_{-1}^5 (6-t)\,dt \quad r)\int_{-2}^2 (\frac{z^2}{4}-4)\,dz \quad s)\int_1^2 t\,dx$

Begründen Sie, wo durch das bestimmte Integral zugleich auch die Fläche zwischen der x-Achse, der Kurve und den Parallelen zur y-Achse berechnet wird.

2) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graph und der x-Achse im angegeben Intervall:

$a) f(x)=3 \quad Intervall:[-5,-2] \quad b) f(t)=-\frac{3}{2}t^2 \quad Intervall:[-3,0] \quad c) f(x)=6x^2-x^3 \quad Intervall:[2,3]$

3) Berechnen Sie die Fläche, die von der x-Achse und dem Schaubild der Funktion:

$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x+2)$

eingeschlossen ist.

4) Berechnen Sie die Fläche, welche die folgenden Kurven einschliessen:

$a)\ p(x)=6-\frac{1}{2}x^2\ ,\ g(x)=2 \quad b)\ p(x)=0{,}6x^2+3x\ ,\ g(x)=-\frac{3}{2}x$

5) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve mit der Funktionsgleichung:

$p(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+4$

und der Tangente im Hochpunkt

6) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve mit der Funktionsgleichnung:

$f(x)=2x-\frac{1}{3}x^3$

und der Normale im Wendepunkt.

7) Berechnen Sie die Fläche, welche die folgenden Kurven einschliessen:

$a)\ f(x)=x^3 \quad , \quad h(x)=2x-x^2$

$b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^2 \quad , \quad h(x)=x-\frac{x^3}{12}$

8) Die x-Achse, die Geraden mit den Gleichungen x = 0 und x = a (a ≥ 0) und das Schaubild der Funktion

$f(x)=\frac{1}{4}x^2$

begrenzen eine Fläche mit dem Flächeninhalt 36 FE (Flächeneinheiten).
Wie groß ist a ?

9) Das Schaubild der Funktion f mit f(x) = mx und die x-Achse begrenzen über dem Intervall [1;2] eine Fläche. Wie muss m gewählt werden, damit der Flächeninhalt 6 Flächeneinheiten beträgt ?

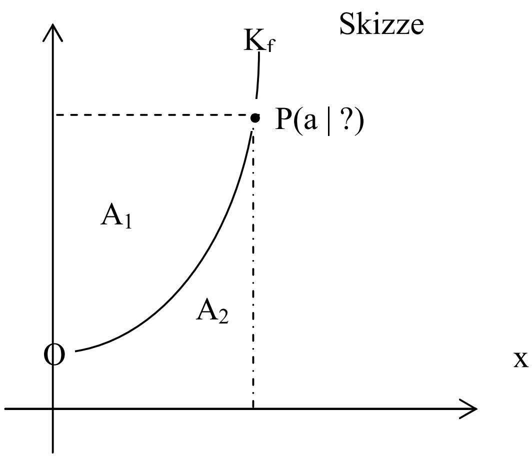
10) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und die x-Achse begrenzen über dem Intervall [0;a] eine Fläche. Wie muss a gewählt werden, damit der Flächeninhalt 4,5 Flächeneinheiten
beträgt ?

11) Welche Parabel der Form $p(x) = ax - x^2$ $(a>0)$ schließt mit der x-Achse eine Fläche von 4 Flächeninhalten ein?
Wie kann man mit dem TR die Kurve in Abhängigkeit von a zeichnen lassen?

12) Die x-Achse, die Geraden mit der Gleichung x = 0 und x = a, a>0 und das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x$ begrenzen eine Fläche.

a) Welchen Flächeninhalt hat diese Fläche ?
b) Welche Parallele zur y-Achse halbiert diese Fläche bei a)?
c) Welche Parallele zur x-Achse halbiert diese Fläche bei a)?

13)



K_f ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + 1$
Die Fläche A_1 wird durch K_f ,die y-Achse und die waagrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt. Die Fläche A_2 wird durch K_f ,die x-Achse und die senkrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt.
Für welchen Wert von a > 0 gilt: $A_1 = A_2$ und welchen Wert hat dann A_1 ?

14)
Die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers im luftleeren Raum nimmt in jeder Sekunde umd die Geschwindigkeit von 10 m/s zu.
a) Wie groß ist die Geschwindigkeit v(t) des fallenden Körpers nach t Sekunden ?
b) Zeichnen Sie die zu der Funktionsgleichung von v(t) zugehörige Kurve in ein Koordinatensystem ein.
c) Wie groß ist die zurückgelegte Strecke s(t) des fallenden Körpers nach t Sekunden?

Lösungen:

1)

Bei den Teilaufgaben, wo die Kurve nur oberhalb der x-Achse verläuft, ist das bestimmte Integral zugleich auch die Fläche zwischen der x-Achse, der Kurve und den Parallelen zur y-Achse.

a) $\int_0^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 4{,}5$

b) $\int_{-3}^0 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^0 = \frac{0^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} = -4{,}5$

c) $\int_{-3}^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} = 0$

d) $\int_{\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}} 2\,x dx = \left[x^2\right]_{\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}} = (4\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}^2 = 16 \cdot 3 - 3 = 45$

e) $\int_0^4 \frac{1}{3}\,x dx = \left[\frac{x^2}{6}\right]_0^4 = \frac{4^2}{6} - \frac{0^2}{6} = \frac{8}{3}$

f) $\int_1^2 -3\,x dx = \left[-\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 = -\frac{3 \cdot 2^2}{2} - (-\frac{3 \cdot 1^2}{2}) = -4{,}5$

g) $\int_2^4 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{56}{3}$

h) $\int_{0,5}^{1,5} x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0,5}^{4} = \frac{1{,}5^4}{4} - \frac{0{,}5^4}{4} = \frac{5}{4}$

i) $\int_{-1}^2 \frac{x^2}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^2 = \frac{2^3}{6} - \frac{(-1)^3}{6} = \frac{3}{2}$

j) $\int_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{3}\, dx = \left[\frac{x^4}{12}\right]_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2})^4}{12} - \frac{(-\sqrt{2})^4}{12} = \frac{16 \cdot 2 - 4}{12} = 5$

k) $\int_0^2 (x-2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 - \left(\frac{0^2}{2} - 2 \cdot 0\right) = -2$

l) $\int_{-2,5}^{2,5} (3\,x-1)\, dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x\right]_{-2,5}^{2,5} = \frac{3 \cdot 2{,}5^2}{2} - 2{,}5 - \left(\frac{3 \cdot (-2{,}5)^2}{2} - (-2{,}5)\right) = -5$

m) $\int_{-2}^2 (\frac{3\,x^2}{2} - \frac{8\,x^3}{3})\, dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{2x^4}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{2^3}{2} - \frac{2 \cdot 2^4}{3} - \left(\frac{(-2)^3}{2} - \frac{2 \cdot (-2)^4}{3}\right) = 8$

n) $\int_{-3}^0 (\frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x)\, dx = \left[\frac{x^4}{24} - \frac{3x^2}{4}\right]_{-3}^0 = \frac{0^4}{24} - \frac{3 \cdot 0^2}{4} - \left(\frac{(-3)^4}{24} - \frac{3 \cdot (-3)^2}{4}\right) = \frac{-81}{24} + \frac{27}{4} = \frac{27}{8}$

o) $\int_{-2}^{-1}(1-2x+3x^2-4x^3)\,dx=\left[x-x^2+x^3-x^4\right]_{-2}^{-1}$

$=(-1)-(-1)^2+(-1)^3-(-1)^4-((-2)-(-2)^2+(-2)^3-(-2)^4)$

$=-1-1-1-1-(-2-4-8-16))=-4-(-30)=26$

p) $\int_0^2 dx=\int_0^2 1\cdot\,dx=[x]_0^2=2-0=2$

q) $\int_{-1}^{5}(6-t)\,dt=\left[6t-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{5}=6\cdot 5-\frac{5^2}{2}-\left(6\cdot(-1)-\frac{(-1)^2}{2}\right)=30-\frac{5^2}{2}-(-6-\frac{1}{2})=24$

r) $\int_{-2}^{2}(\frac{z^2}{4}-4)\,dz=\left[\frac{z^3}{12}-4z\right]_{-2}^{2}=\frac{2^3}{12}-4\cdot 2-\left(\frac{(-2)^3}{12}-4\cdot(-2)\right)=\frac{8}{12}-8+\frac{8}{12}-8=-\frac{44}{3}$

s) $\int_1^2 t\,dx=[t\cdot x]_1^2=t\cdot 2-t\cdot 1=t$

2)

a) Es gibt keine Nullstellen zwischen den Integrationsgrenzen (nachprüfen !)

$I=\int_{-5}^{-2}3dx=[3x]_{-5}^{-2}=3\cdot(-2)-3\cdot(-5)=9$ ==> A= | I | = 9

b) Es gibt keine Nullstellen zwischen den Integrationsgrenzen (nachprüfen !)

$I=\int_{-3}^{0}-\frac{3}{2}t^2dx=[-\frac{t^3}{2}]_{-3}^{0}=-\frac{0^3}{2}-\left(-\frac{(-3)^3}{2}\right)=-\frac{27}{2} \Longrightarrow A=|I|=|-\frac{27}{2}|=\frac{27}{2}$

c) Es gibt keine Nullstellen zwischen den Integrationsgrenzen (nachprüfen !)

$I=\int_2^3(6x^2-x^3)dx=\left[2x^3-\frac{x^4}{4}\right]_2^3=2\cdot 3^3-\frac{3^4}{4}-\left(2\cdot 2^3-\frac{2^4}{4}\right)=54-\frac{81}{4}-(16-4)$

$=42-\frac{81}{4}=\frac{87}{4} \Longrightarrow A=|I|=|\frac{87}{4}|=\frac{87}{4}$

3)

$$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x+2)=\frac{1}{4}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)$$

3.1) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$$0=\frac{1}{4}(x_S-1)(x_S-3)(x_S+2)$$

Fall 1:
$x_S - 1 = 0$
$x_S = 1$, also
$x_{S1} = 1$

Fall 2:
$x_S - 3 = 0$
$x_S = 3$, also
$x_{S2} = 3$

Fall 3:
$x_S + 2 = 0$
$x_S = -2$, also
$x_{S3} = -2$

also:

$$x_{S1}=1;\ x_{S2}=3;\ x_{S3}=-2$$

3.2)
Teilfläche 1

$$I_1=\int_{-2}^{1}\frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x+2)dx=\int_{-2}^{1}\frac{1}{4}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\int_{-2}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1^4}{4}-\frac{2\cdot1^3}{3}-\frac{5\cdot1^2}{2}+6\cdot1-\left(\frac{(-2)^4}{4}-\frac{2\cdot(-2)^3}{3}-\frac{5\cdot(-2)^2}{2}+6\cdot(-2)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{5}{2}+6-\left(\frac{16}{4}-\frac{-16}{3}-\frac{20}{2}-12\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{5}{2}+6-\frac{16}{4}-\frac{16}{3}+10+12\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{5}{2}-\frac{16}{3}+24\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3-8-30-64+288}{12}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{189}{12}=\frac{63}{16}$$

3.3) Teilfläche 2

$$I_2=\int_{1}^{3}\frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x+2)dx=\int_{-2}^{1}\frac{1}{4}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\int_{1}^{3}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{1}^{3}=\frac{1}{4}\left(\frac{3^4}{4}-\frac{2\cdot3^3}{3}-\frac{5\cdot3^2}{2}+6\cdot3-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{2\cdot1^3}{3}-\frac{5\cdot1^2}{2}+6\cdot1\right)\right)=-\frac{4}{3}$$

3.4) Gesamtfläche

$$A=|I_1|+|I_2|=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}\approx 5{,}27$$

4)

a)

Schnittpunkte $S_x(x_s \mid y_s)$ von K_p und K_g

$$2 = 6 - \frac{1}{2}x_S^2$$

$$\frac{1}{2}x_S^2 = 4 <==> x_S^2 = 8 <==>$$

$$x_{S1} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ ;\ x_{S2} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

$$I = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (6 - \frac{1}{2}x^2 - 2)dx = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (4 - \frac{1}{2}x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{6}\right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$$

$$= \left[4 \cdot 2\sqrt{2} - \frac{(2\sqrt{2})^3}{6}\right] - \left[4 \cdot (-2\sqrt{2}) - \frac{(-2\sqrt{2})^3}{6}\right] = \left[8\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\right] - \left[-8\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{3}\right]$$

$$= 16\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3} ==> A = |I| = \left|\frac{32\sqrt{2}}{3}\right| = \frac{32\sqrt{2}}{3}$$

b)

Schnittpunkte $S_x(x_s \mid y_s)$ von K_p und K_g

$$0{,}6x_S^2 + 3x_S = -\frac{3}{2}x_S \mid \cdot 10$$

$$6x_S^2 + 30x_S = -15x_S <==> 6x_S^2 + 45x_S = 0 <==> x_S(6x_S + 45) = 0 <==>$$

Fall1: $6x_S + 45 = 0$

$$6x_S = -45$$

$$x_S = -\frac{45}{6} = -7{,}5$$

$$x_{S1} = -7{,}5$$

Fall2: $x_S = 0$

$x_{S2} = 0$

$$I = \int_{-7,5}^{0} \left(0{,}6x^2 + 3x - (\frac{3}{2}x)\right)dx = \int_{-7,5}^{0} \left(0{,}6x^2 + 4{,}5x\right)dx = \left[0{,}2x^3 + 2{,}25x^2\right]_{-7,5}^{0}$$

$$= 0{,}2 \cdot 0^3 + 2{,}25 \cdot 0^2 - (0{,}2 \cdot (-7{,}5)^3 + 2{,}25 \cdot (-7{,}5)^2) = -(0{,}2 \cdot (-7{,}5)^3 + 2{,}25 \cdot (-7{,}5)^2)$$

$= -42{,}1875 ==> A = |I| = |-42{,}1875| = 42{,}1875$

5)

$p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$

$p'(x) = x^3 - 4x$

$p''(x) = 3x^2 - 4$

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $p'(x_e) = 0$

$0 = x_e^3 - 4x_e$

$0 = x_e(x_e^2 - 4)$

Fall1: $x_e^2 - 4 = 0$

$x_e^2 = 4$

$x_{e1} = 2$

$x_{e2} = -2$

Fall2: $x_e = 0$

$x_{e3} = 0$

$p''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 > 0$ ==> Tiefpunkt

$p''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0$ ==> Tiefpunkt

$p''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = 8 > -4 < 0$ ==> Hochpunkt

$p(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 4 = 4$

also:

H(0 | 4) ist Hochpunkt

Gleichung der Tangente K_t:

t(x) = 4

Schnittpunkte $S_x(x_s \mid y_s)$ von K_p und K_t

$\frac{1}{4}x_S^4 - 2x_S^2 + 4 = 4$

$\frac{1}{4}x_S^4 - 2x_S^2 = 0 \iff x_S^4 - 8x_S^2 = 0 \iff x_S^2(x_S^2 - 8) = 0$

Fall1: $x_S^2 - 8 = 0$

$x_S^2 = 8$

$x_{S1} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$x_{S2} = -\sqrt{8} = -\sqrt{4 \cdot 2} = -2\sqrt{2}$

Fall2: $x_S = 0$

$x_{S3} = 0$

$$A = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (4 - (\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4))dx = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2)dx = \left[-\frac{x^5}{20} + \frac{2x^3}{3} \right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$$

$$= \left[-\frac{(2\sqrt{2})^5}{20} + \frac{2 \cdot (2\sqrt{2})^3}{3} \right] - \left[-\frac{(-2\sqrt{2})^5}{20} + \frac{2 \cdot (-2\sqrt{2})^3}{3} \right] = \left[-\frac{128\sqrt{2}}{20} + \frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{128\sqrt{2}}{20} + \frac{32\sqrt{2}}{3} \right]$$

$$= -\frac{256\sqrt{2}}{20} + \frac{64\sqrt{2}}{3} = -\frac{64\sqrt{2}}{5} + \frac{64\sqrt{2}}{3} = \frac{-192\sqrt{2} + 320\sqrt{2}}{15} = \frac{128\sqrt{2}}{15} \approx 12{,}07$$

6)

a) Ableitungen

$f(x) = 2x - \frac{1}{3}x^3$

$f'(x) = 2 - x^2$

$f''(x) = -2x$

$f'''(x) = -2$

b) Wendepunkte

Wendepunkte W(x_w|y_w): f ''(x_w) = 0

$-2x_W = 0$

$x_W = 2$

f ''' (2) = -2 ≠ 0 ==> Wendepunkt

$y_W = 2 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = 0$

damit:

W(0 |0) Wendepunkt

c) Steigung im Wendepunkt

$f'(0) = 2 - 0^2 = 2$

d) Steigung der Normalen im Wendepunkt

$m = -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{2}$

e) PSF der Normalen K_n

$\frac{y-0}{x-0} = -\frac{1}{2}$

$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$

$K_n : y = -\frac{1}{2}x$

f) Schnittpunkte S (x_s | y_s) von K_p und K_t

$2x_S - \frac{1}{3}x_S^3 = -\frac{1}{2}x_S \quad | \cdot 6$

$12x_S - 2x_S^3 = -3x_S$ <==> $15x_S - 2x_S^3 = 0$ <==> $x_S(15 - 2x_S^2) = 0$

Fall1: $15 - 2x_S^2 = 0$

$2x_S^2 = 15$

$x_S^2 = 7{,}5$

$x_{S1} = \sqrt{7{,}5}$

$x_{S2} = -\sqrt{7{,}5}$

Fall2: $x_S = 0$

$x_{S3} = 0$

$$I_1 = \int_{-\sqrt{7,5}}^{0} (2x - \frac{1}{3}x^3 - (-0{,}5x))dx = \int_{-\sqrt{7,5}}^{0} (2{,}5x - \frac{1}{3}x^3)dx = \left[1{,}25x^2 - \frac{x^4}{12}\right]_{-\sqrt{7,5}}^{0}$$

$$= \left[1{,}25 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{12}\right] - \left[1{,}25 \cdot (-\sqrt{7{,}5})^2 - \frac{(-\sqrt{7{,}5})^4}{12}\right] = -\left[1{,}25 \cdot (-\sqrt{7{,}5})^2 - \frac{(-\sqrt{7{,}5})^4}{12}\right]$$

$$= -1{,}25 \cdot \sqrt{7{,}5}^2 + \frac{\sqrt{7{,}5}^4}{12} = -1{,}25 \cdot 7{,}5 + \frac{7{,}5^2}{12} = -\frac{75}{16}$$

$$I_2 = \int_{0}^{\sqrt{7,5}} (2x - \frac{1}{3}x^3 - (-0{,}5x))dx = \int_{0}^{\sqrt{7,5}} (2{,}5x - \frac{1}{3}x^3)dx = \left[1{,}25x^2 - \frac{x^4}{12}\right]_{0}^{\sqrt{7,5}}$$

$$= \left[1{,}25 \cdot \sqrt{7{,}5}^2 - \frac{\sqrt{7{,}5}^4}{12}\right] - \left[1{,}25 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{12}\right] = \left[1{,}25 \cdot \sqrt{7{,}5}^2 - \frac{\sqrt{7{,}5}^4}{12}\right]$$

$$= 1{,}25 \cdot 7{,}5 - \frac{7{,}5^2}{12} = +\frac{75}{16}$$

also:

$A = | I_1 | + | I_2 | = \left|-\frac{75}{16}\right| + \left|\frac{75}{16}\right| = \frac{75}{8}$

7)

a)

Schnittpunkte $S(x_s \mid y_s)$ von K_f und K_h

$x_S^3 = 2x_S - x_S^2$

$x_S^3 + x_S^2 - 2x_S = 0 \Longleftrightarrow x_S(x_S^2 + x_S - 2) = 0 \Longleftrightarrow$

Fall1: $x_S^2 + x_S - 2 = 0$

$$x_{S1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$x_{S1} = -2$

$x_{S2} = 1$

Fall2: $x_S = 0$

$x_{S3} = 0$

$$I_1 = \int_{-2}^{0} ((x^3 - (2x - x^2))dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x + x^2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right] =$$

$$= -\left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] = \frac{8}{3}$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - (2x - x^2)dx = \int_{0}^{1} (x^3 - 2x + x^2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - 1^2\right] - \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2\right] = -\frac{5}{12}$$

$$A = |I_1| + |I_2| = \left|\frac{8}{3}\right| + \left|-\frac{5}{12}\right| = \frac{37}{12}$$

b)
Schnittpunkte $S_x(x_s \mid y_s)$ von K_p und K_g

$$\frac{1}{3}x_S^2 = x_S - \frac{x_S^3}{12} \quad | \cdot 12$$

$$4x_S^2 = 12x_S - x_S^3 \iff x_S^3 + 4x_S^2 - 12x_S = 0 \iff x_S(x_S^2 + 4x_S - 12) = 0 \iff$$

Fall1: $x_S^2 + 4x_S - 12 = 0$

$$x_{S1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot(-12)}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} = -2 \pm 4$$

$x_{S1} = -6$

$x_{S2} = 2$

Fall2: $x_S = 0$

$x_{S3} = 0$

$$I_1 = \int_{-6}^{0}(x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{3})dx = \left[-\frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2}\right]_{-6}^{0}$$

$$= \left[-\frac{0^4}{48} - \frac{0^3}{9} + \frac{0^2}{2}\right] - \left[-\frac{(-6)^4}{48} - \frac{(-6)^3}{9} + \frac{(-6)^2}{2}\right] = -(-27 + 24 + 18) = -15$$

$$I_2 = \int_{0}^{2}(x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{3})dx = \left[-\frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= \left[-\frac{2^4}{48} - \frac{2^3}{9} + \frac{2^2}{2}\right] - \left[-\frac{0^4}{48} - \frac{0^3}{9} + \frac{0^2}{2}\right] = -\frac{16}{48} - \frac{8}{9} + \frac{4}{2} = -\frac{1}{3} - \frac{8}{9} + 2$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{9} + 2 = \frac{-3 - 8 + 18}{9} = \frac{7}{9}$$

$$A = |I_1| + |I_2| = |-15| + \left|\frac{7}{9}\right| = 15\frac{7}{9}$$

8)

$A = \int_0^a \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^a = \frac{a^3}{12} - \frac{0^3}{12} = \frac{a^3}{12}$

andererseits gilt

A = 36

also:

$\frac{a^3}{12} = 36$

$a^3 = 36 \cdot 12$ <==> $a = \sqrt[3]{36 \cdot 12} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{6^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$

also:

$a = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$

9)

$\int_1^2 mxdx = 6$

$\left[\frac{m}{2} \cdot x^2 \right]_1^2 = 6$ <==> $\frac{m}{2} \cdot 2^2 - \frac{m}{2} \cdot 1^2 = 6$ <==> $2m - \frac{m}{2} = 6$ <==> $\frac{3m}{2} = 6$ <==>

m = 4

10)

$\int_0^a \frac{1}{2} x^2 \, dx = 4{,}5$

$\left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^a = 4{,}5$ <==> $\frac{1}{6} a^3 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 4{,}5$ <==> $\frac{1}{6} a^3 = 4{,}5$

<==> $a^3 = 27$ <==> $a = \sqrt[3]{27}$ <==>

a = 3

11)

a) Schnittpunkte mit der x-Achse

Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_p$

$ax_S - x_S^2 = 0$ **<==>** $x_S(a - x_S) = 0$

Fall1: $a - x_S = 0$

$x_S = a$

$x_{S1} = a$

Fall2: $x_S = 0$

$x_{S2} = 0$

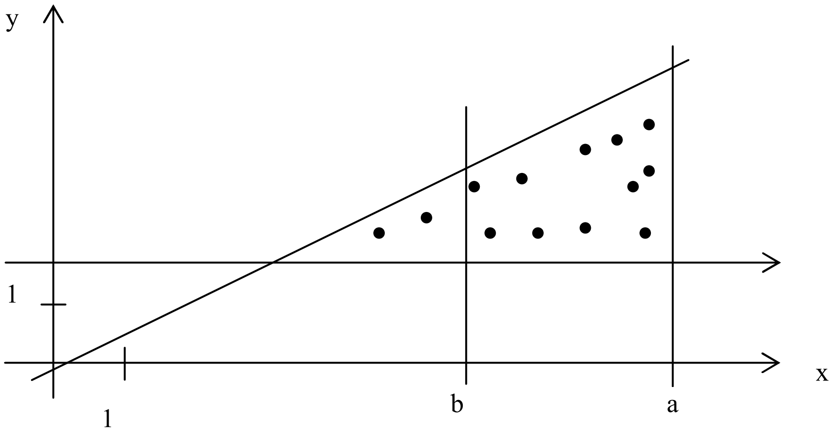
b) Berechnung der Fläche

$\int_0^a (ax - x^2) \, dx = 4$

$\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 4$ <==> $\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} - \left(\frac{0^3}{2} - \frac{0^3}{3} \right) = 4$ <==> $\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = 4$ <==> $\frac{a^3}{6} = 4$ <==>

$a = \sqrt[3]{24} \approx 2{,}85$

12)



a)

$$\int_0^a \frac{1}{2}x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^a = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}\cdot 0^2 = \frac{a^2}{4}$$

b)

Die Hälfte der Fläche beträgt:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}$$

Die Parallele zur y-Achse, die die Fläche halbiert, hat die Gleichung:

x = b

also gilt:

$$\int_0^b \frac{1}{2}x\,dx = \frac{a^2}{8}$$

$$\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^b = \frac{a^2}{8} \iff \frac{b^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{a^2}{8} \iff \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{8} \iff b^2 = \frac{a^2}{2} \iff$$

$b = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$, weil a > 0

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

c)
Die Hälfte der Fläche beträgt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}$$

Die Parallele P zur x-Achse, die die Fläche halbiert, hat die Gleichung:
y = b
Schnittpunkte $S_x(x_s \mid y_s)$ von P und K_f

$$\frac{1}{2} x_S = b$$

$$x_S = 2b$$

Die Fläche A_d des oberen Dreiecks beträgt:

$$A_d = \frac{(\frac{1}{2} a - b) \cdot (a - x_S)}{2} = \frac{(\frac{1}{2} a - b) \cdot (a - 2b)}{2}$$

also gilt:

$$\frac{(\frac{1}{2} a - b) \cdot (a - 2b)}{2} = \frac{a^2}{8}$$

$$4 \cdot (\frac{1}{2} a - b) \cdot (a - 2b) = a^2$$

$$(2a - 4b) \cdot (a - 2b) = a^2$$

$$2a^2 - 4ab - 4ab + 8b^2 = a^2$$

$$8b^2 - 8ab + a^2 = 0$$

$$b_{1/2} = \frac{8a \pm \sqrt{(8a)^2 - 4 \cdot 8 \cdot a^2}}{16} = \frac{8a \pm \sqrt{32a^2}}{16} = \frac{8a \pm \sqrt{32}a}{16} = \frac{8a \pm \sqrt{16 \cdot 2}a}{16} = \frac{8a \pm 4\sqrt{2}a}{16}$$

$$= \frac{8a \pm 4\sqrt{2}a}{16} = \frac{2a \pm \sqrt{2}a}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \cdot a$$

$$b_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \cdot a$$

$$b_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \cdot a$$

b_2 ist keine Lösung, da $x_2 = 2b_2 = 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \cdot a = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \cdot a > a$

13)

$$A_1 = \int_0^a (a^2 + 1 - (x^2 + 1))dx = \int_0^a (a^2 + 1 - x^2 - 1))dx = [a^2 - x^2]_0^a =$$

$$[a^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^a = a^2 \cdot a - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

$$A_2 = \int_0^a ((x^2 + 1))dx = [\frac{x^3}{3} + x]_0^a = \frac{a^3}{3} + a - (\frac{0^3}{3} + 0) = \frac{a^3}{3} + a$$

Es soll gelten: $A_1 = A_2$
Also:

$$\frac{2a^3}{3} = \frac{a^3}{3} + a \quad | * 3$$

$2\,a^3 = a^3 + 3a$
$a^3 - 3\,a = 0$
$a \cdot (a^2 - 3) = 0$
Fall1: $a = 0$ (keine Lösung, da $a > 0$)
Also: $a_1 = 0$
Fall2: $(a^2 - 3) = 0$
$a^2 = 3$
also:
$a_2 = -\sqrt{3}$ (keine Lösung, da $a > 0$)
$a_3 = \sqrt{3}$ (Lösung)
also:

$$A_1 = \frac{2a^3}{3} = \frac{2\sqrt{3}^3}{3} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

14)
a)
$v(t) = 10 \cdot t$
wobei t die Anzahl der Sekunden und v die Geschwindigkeit in m/s beträgt.

b)

$$s(t) = \int_0^{t_0} 10t = \left[5t^2\right]_0^{t_0} = 5t_0^2 - 5 \cdot 0 = 5t_0^2$$