Aufgabe 15)
a)
1) Zielfunktion:
l(u,v) ist der Abstand des Punkts A(u | v) vom Punkt P(1 | 2).
$l(u,v)=\sqrt{(u-1)^2+(v-2)^2}$

2) Nebenbedingung:
$v = u^2$

3) Reduktion auf 1 Variable:
$l(u)=\sqrt{(u-1)^2+(u^2-2)^2}$
Überlegung:
Betrachte:
$g(u)=(u-1)^2+(u^2-2)^2$
Durch Überlegung folgt:
l hat das gleiche Minimum wie g

4) Ableitungen:
$g'(u)=2(u-1)+2(u^2-2)\cdot 2u=2u-2+4u(u^2-2)=2u-2+4u^3-8u=4u^3-6u-2$
$g'(u)=4u^3-6u-2$
$g''(u)=12u^2-6$

5) Definitionsbereich:
D = |R

6) Lokale Extremwerte $E(a_e \mid V_e)$: $V'(a_e) = 0$:
$4u_e^3-6u_e-2=0$
Durch Probieren: $u_{e1} = -1$
Also: $4u^3 - 6u - 2 = (u+1) \cdot r(u)$
Polynomdivision:
$(4u^3 - 6u - 2) : (u+1) = 4u^2 - 4u -2$
$4u^3 + 4u^2$
--------------
$-4u^2 - 6u -2$
$-4u^2 - 4u$
---------
$-2u - 2$
$-2u - 2$
---------
0

Fall2:

$r(u_e) = 0$

$4u_e^2 - 4u_e - 2 = 0$

$$u_{e2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{16 \cdot 3}}{8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$u_{e2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$u_{e3} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$g''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 6 = 6 > 0$$

also: relatives Minimum bei $u_{e1} = -1$

$$g''(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) = 12\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 6 = 12\frac{1+2\sqrt{3}+3}{4} - 6 = 3(1+2\sqrt{3}+3) - 6 = 6+6\sqrt{3} > 0$$

also: relatives Minimum bei $u_{e2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$g''(\frac{1-\sqrt{3}}{2}) = 12\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 6 = 12\frac{1-2\sqrt{3}+3}{4} - 6 = 3(1-2\sqrt{3}+3) - 6 = 6-6\sqrt{3} < 0$$

also: relatives Maximum bei $u_{e3} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$$v_1 = f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$v_2 = f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) = (\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}87$$

$$l(-1) = \sqrt{(-1-1)^2 + ((-1)^2-2)^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

$$l(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)-1\right)^2 + \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}-2}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{4} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{4+2\sqrt{3}-8}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{2\sqrt{3}-4}{4}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{7-4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{11-6\sqrt{3}}{4}} \approx 0{,}39$$

7) Randwertuntersuchung:

$$\lim_{u->-00} l(u) = \lim_{u->-00} \sqrt{(u-1)^2 + (u^2-2)^2} \text{ --> } 00$$

$$\lim_{u->00} l(u) = \lim_{u->00} \sqrt{(u-1)^2 + (u^2-2)^2} \text{ --> } 00$$

8) Ergebnis:

Der Punkt $A(\frac{1+\sqrt{3}}{2} | \frac{2+\sqrt{3}}{2}) \approx A(1,37 | 1,87)$ hat den minimalen Abstand

$l_e = \sqrt{\frac{11-6\sqrt{3}}{4}} \approx 0,39$ von $P(1 | 2)$

Alternativlösung:
Geometrische Überlegung:
Wenn A den kürzesten Abstand von einer Kurve hat, dann muss A auf einer Senkrechten zur Kurve liegen.

$f(x) = x^2$ ;   P( 1 | 2 )
$f'(x) = 2x$
Der Punkt A(u | v) hat die Koordinaten: $A(u \mid u^2)$
Die Steigung beträgt dort:
$m_t = 2u$
Die Steigung der Senkrechten (Normalen) beträgt dort:
$$m_t = \frac{-1}{2u} = -\frac{1}{2u}$$
Die Geradengleichung der Normalen lautet:
$$\frac{y-u^2}{x-u} = -\frac{1}{2u}$$
$$g: \; y = \frac{u-x}{2u} + u^2$$
P(1 | 2) liegt auf g. Also gilt:
$$2 = \frac{u-1}{2u} + u^2 \quad | \cdot 2u$$
$$4u = u - 1 + 2u^3$$
$2u^3 - 3u - 1 = 0$
Durch raten:
$u_1 = -1$
also:
$2u^3 - 3u - 1 = (u+1) \cdot r(x)$
Polynomdivision:
$(2u^3 - 3u - 1) : (u+1) = 2u^2 - 2u - 1$
$2u^3 + 2u^2$
-----------------
$-2u^2 - 3u - 1$
$-2u^2 - 2u$
------------------
$- u - 1$
$- u - 1$
-------------------

also:
$(2u^3 - 3u - 1) = (u+1) \cdot \; 2u^2 - 2u - 1$

$$u_{2/3} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 3}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

b)
1) Zielfunktion:
l(u,v) ist der Abstand des Punkts A(u | v) vom Punkt P(0 | 0).
$l(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$

2) Nebenbedingung:
$v = -2u^2 + 4$

3) Reduktion auf 1 Variable:
$l(u) = \sqrt{u^2 + (-2u^2 + 4)^2} = \sqrt{u^2 + 4u^4 - 16u^2 + 16} = \sqrt{4u^4 - 15u^2 + 16}$
$l(u) = \sqrt{4u^4 - 15u^2 + 16}$

Überlegung:
Betrachte:
$g(u) = 4u^4 - 15u^2 + 16$
Durch Überlegung folgt:
l hat das gleiche Minimum wie g

4) Ableitungen:
$g'(u) = 16u^3 - 30u$
$g''(u) = 48u^2 - 30$

5) Definitionsbereich:
D = |R

6) Lokale Extremwerte E($a_e$ | $V_e$): V'($a_e$) = 0:
$16u_e^3 - 30u_e = 0$
$2u_e(8u_e^2 - 15) = 0$
Fall1:
$2u_e = 0$
$u_e = 0$
$u_{e1} = 0$

Fall2:
$8u_e^2 - 15 = 0$
$u_e^2 = \frac{15}{8}$
$u_{e2} = \sqrt{\frac{15}{8}} \approx 1,37$
$u_{e3} = -\sqrt{\frac{15}{8}} \approx -1,37$

$g''(0) = 48 \cdot 0^2 - 30 \; = \text{-}30 < 0$

also: relatives Maximum bei $u_{e2} = \sqrt{\frac{15}{8}}$

$g''(\sqrt{\frac{15}{8}}) = 48\left(\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^2 - 30 \; = 48 \cdot \frac{15}{8} - 30 \; = \; 90 - 30 = 60 > 0$

also: relatives Minimum bei $u_{e2} = \sqrt{\frac{15}{8}}$

$g''(-\sqrt{\frac{15}{8}}) = 48\left(-\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^2 - 30 \; = 48 \cdot \frac{15}{8} - 30 \; = \; 90 - 30 = 60 > 0$

also: relatives Minimum bei $u_{e3} = -\sqrt{\frac{15}{8}}$

$l(\sqrt{\frac{15}{8}}) = \sqrt{4\left(\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^4 - 15\left(\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^2 + 16} \; = \sqrt{4 \cdot \frac{225}{64} - 15 \cdot \frac{15}{8} + 16} \; = \sqrt{\frac{225}{16} - \frac{225}{8} + 16} =$

$\sqrt{\frac{225}{16} - \frac{450}{16} + \frac{256}{16}} \; = \; \sqrt{\frac{225 - 450 + 256}{16}} = \sqrt{\frac{31}{16}} \approx \text{-}1{,}39$

analog:

$l(-\sqrt{\frac{15}{8}}) = \sqrt{4\left(-\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^4 - 15\left(-\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^2 + 16} \; = \; \sqrt{\frac{31}{16}} \approx \text{-}1{,}39$

$v_1 = f(\sqrt{\frac{15}{8}}) = 4 - 2\left(\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^2 \; = \; 4 - 2 \cdot \frac{15}{8} = 0{,}25$

$v_2 = f(\sqrt{\frac{15}{8}}) = 4 - 2\left(-\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^2 \; = \; 4 - 2 \cdot \frac{15}{8} = 0{,}25$

7) Randwertuntersuchung:

$\lim\limits_{u->-00} l(u) = \lim\limits_{u->-00} \sqrt{4u^4 - 15u^2 + 16}$ --> 00

$\lim\limits_{u->00} l(u) = \lim\limits_{u->00} \sqrt{4u^4 - 15u^2 + 16}$ --> 00

8) Ergebnis:

Der Punkt A($\sqrt{\frac{15}{8}}$ | 0,25) ≈ A(1,37 | 0,25) bzw. der Punkt B(-$\sqrt{\frac{15}{8}}$ | 0,25) ≈ B(-1,37 | 0,25)

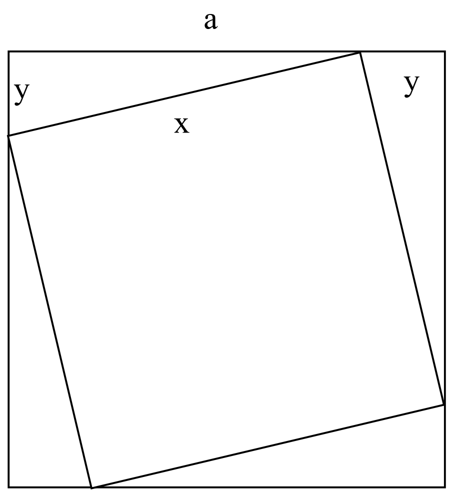
hat den minimalen Abstand $\sqrt{\frac{31}{16}} \approx 1{,}39$ von P(0 | 0)

Alternativlösung:
Geometrische Überlegung:
Wenn A den kürzesten Abstand von einer Kurve hat, dann muss A auf einer Senkrechten zur Kurve liegen.

$f(x) = 4 - 2x^2$
$f'(x) = - 4x$
Der Punkt $A(u \mid v)$ hat die Koordinaten: $A(u \mid 4-2u^2)$
Die Steigung beträgt dort:
$m_t = -4u$
Die Steigung der Senkrechten (Normalen) beträgt dort:
$$m_t = \frac{-1}{-4u} = \frac{1}{4u}$$
Die Geradengleichung der Normalen lautet:
$$\frac{y-(4-2u^2)}{x-u} = \frac{1}{4u}$$
$$g: \; y = \frac{x-u}{4u} + 4 - 2u^2$$
$P(0 \mid 0)$ liegt auf g. Also gilt:
$$0 = \frac{0-u}{4u} + 4 - 2u^2$$
$$0 = \frac{-u}{4u} + 4 - 2u^2$$
$$0 = -\frac{1}{4} + 4 - 2u^2$$
$$0 = \frac{15}{4} - 2u^2$$
$$2u^2 = \frac{15}{4}$$
$$u^2 = \frac{15}{8}$$
$$u_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{15}{8}}$$

Aufgabe 16)

a)




3) Reduktion auf 1 Variable:

$(a - y)^2 + y^2 = x^2$

$a^2 - 2ay + y^2 + y^2 = x^2$

$x^2 = a^2 - 2ay + 2y^2$

$x(y) = \sqrt{a^2 - 2ay + 2y^2}$

$A(y) = x(y)^2 = a^2 - 2ay + 2y^2$

$A(y) = 2y^2 - 2ay + a^2$

4) Ableitungen:

$A'(y) = 4y - 2a$

$A''(y) = 4$

5) Definitionsbereich:

$D = [0 ; a]$

6) Lokale Extremwerte $E(y_e \mid A_e)$: $A'(y_e) = 0$:

$4y_e - 2a = 0$

$y_e = a/2$

$A''(a/2) = 4 > 0$

also: relatives Minimum bei $y_e = 0{,}5a$

$$A(y) = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a}{2} + a^2 = \frac{a^2}{2} - a^2 + a^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$x_e = x\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{a^2 - 2a \cdot \frac{a}{2} + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

7) Randwertuntersuchung:

$A(0) = 2 \cdot 0^2 - 2a \cdot 0 + a^2 = a^2$

$A(a) = 2 \cdot a^2 - 2a \cdot a + a^2 = a^2$

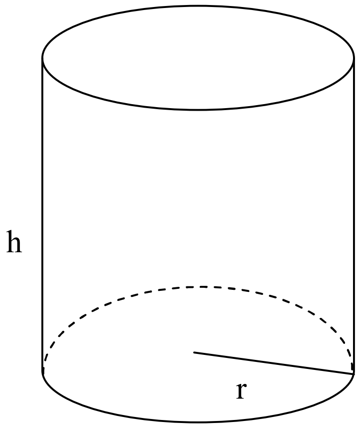
8) Ergebnis:

Das Rechteck mit der Seite $x_e = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ hat den minimalen Flächeninhalt von $A_e = \frac{a^2}{2}$

Aufgabe 17)

1) Zielfunktion:

$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$




2) Nebenbedingung:

V = 1 Liter = 1 $dm^3$

$1 = \pi r^2 h$, also:

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

4) Ableitungen:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$$

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4}{r^3}$$

5) Definitionsbereich:

D = {r∈|R | r > 0} = ]0 ; 00[

6) Lokale Extremwerte $E(r_e \mid A_e)$: $A'(r_e) = 0$:

$$4\pi r_e - \frac{2}{r_e^2} = 0$$

$$4\pi r_e = \frac{2}{r_e^2} \implies r_e^3 = \frac{1}{2\pi}$$

$$r_e = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^3} > 0$$

also: relatives Minimum bei $r_e = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0{,}54$ und $h_e = \frac{1}{\pi r_e^2} \approx 1{,}08$

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = 2\pi \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}^{\,2} + \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}} \approx 5{,}54$$

7) Randwertuntersuchung:

$$\lim_{r->0} A(r) = \lim_{r->0}(2\pi r^2 + \frac{2}{r}) \text{ --> } 00$$

$$\lim_{r->00} A(r) = \lim_{r->00}(2\pi r^2 + \frac{2}{r}) \text{ --> } 00$$

8) Ergebnis:

Der Zylinder erreicht bei $r_e = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0{,}54$ dm und $h_e = \frac{1}{\pi r_e^2} \approx 1{,}08$

seinen minimale Blechverbrauch $A_e \approx 5{,}54$ dm² FE

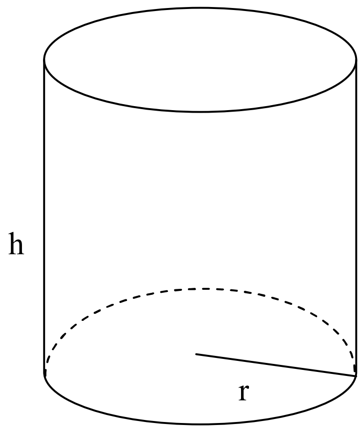
Aufgabe 18)

a)

1) Zielfunktion:

l(r,h) ist die Länge der Schweißnaht.

$l(r,h) = 2\pi r + h$




2) Nebenbedingung:

$V = \pi r^2 h$ , also:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$$l(r) = 2\pi r + \frac{V}{\pi r^2}$$

4) Ableitungen:

$$l'(r) = 2\pi - \frac{2V}{\pi r^3}$$

$$l''(r) = \frac{6V}{\pi r^4}$$

5) Definitionsbereich:

D = {r∈|R | r > 0} = ]0 , 00[

6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid l_e)$: $l'(x_e) = 0$:

$$2\pi - \frac{2V}{\pi r_e^3} = 0$$

$$\frac{2V}{\pi r_e^3} = 2\pi \text{ ==> } \pi r_e^3 = \frac{V}{\pi} \text{ ==> } r_e^3 = \frac{V}{\pi^2}$$

$$r_e = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}}$$

$$l''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}}\right) = \frac{6V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}}\right)^4} > 0$$

also: relatives Minimum bei $r_e = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}}$

und $h_e = \frac{V}{\pi r_e^2}$

$$l\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}}\right) = 2\pi\sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}} + \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}}\right)} = 2\pi\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi^2}} + \frac{2000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi^2}}\right)}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$\lim_{r->0} l(r) = \lim_{r->0}(2\pi r^2 + \frac{2}{r}) \text{ --> } 00$$

$$\lim_{r->00} l(r) = \lim_{r->00}(2\pi r^2 + \frac{2}{r}) \text{ --> } 00$$

8) Ergebnis (für V = 2)

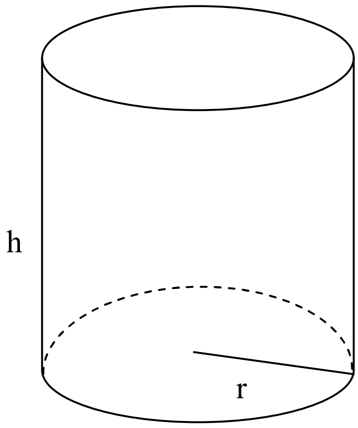
Die Schweißnaht erreicht bei $r_e = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi^2}} \approx 5{,}87$ LE und $h_e = \frac{V}{\pi r_e^2} \approx 108{,}39$

ihre minimale Länge $l_e = 2\pi \sqrt[3]{\frac{2000}{\pi^2}} + \frac{2000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi^2}}\right)} \approx 145{,}3$ LE

b)

1) Zielfunktion:

$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$




2) Nebenbedingung:

$V = \pi r^2 h$, also:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

4) Ableitungen:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

5) Definitionsbereich:

D = {r∈|R | r > 0} = ]0 , 00[

6) Lokale Extremwerte E($x_e$ | $A_e$): A'($x_e$) = 0:

$$4\pi r_e - \frac{2V}{r_e^2} = 0$$

$$4\pi r_e = \frac{2V}{r_e^2} \implies r_e^3 = \frac{V}{2\pi}$$

$$r_e = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^3} > 0$$

also: relatives Minimum bei $r_e = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ und $h_e = \frac{V}{\pi r_e^2}$

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 2\pi \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}^2 + \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$\lim_{r \to 0} A(r) = \lim_{r \to 0} (2\pi r^2 + \frac{2V}{r}) \text{ --> } 00$$

$$\lim_{r \to 00} A(r) = \lim_{r \to 00} (2\pi r^2 + \frac{2V}{r}) \text{ --> } 00$$

8) Ergebnis (für V = 2):

Der Zylinder erreicht bei $r_e = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 0{,}68$ LE und he = $\frac{V}{\pi r_e^2} \approx 1{,}36$ LE

seinen minimale Blechverbrauch $A_e = 2\pi \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}^2 + \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} \approx 10{,}15$ FE

9)
Zeige: $h_e = 2r_e$

a) $r_e = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, also

$$2r_e = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

b)

$$h_e = \frac{V}{\pi r_e^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}} = \frac{V}{\pi \cdot \frac{V^{2/3}}{(2\pi)^{2/3}}} = \frac{V(2\pi)^{2/3}}{\pi V^{2/3}} = \frac{V \cdot 2^{2/3} \cdot \pi^{2/3}}{\pi V^{2/3}} =$$

$$\frac{V^{1/3} \cdot 2^{2/3} \cdot \pi^{2/3}}{\pi} = \frac{V^{1/3} \cdot (2^2)^{1/3}}{\pi^{1/3}} = \frac{V^{1/3} \cdot 4^{1/3}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Aufgabe 19)

a)

Lösung:

1) Zielfunktion:

Funktionsgleichung der Geraden:

$$\frac{y-4}{x-1} = \frac{2-4}{5-1}$$

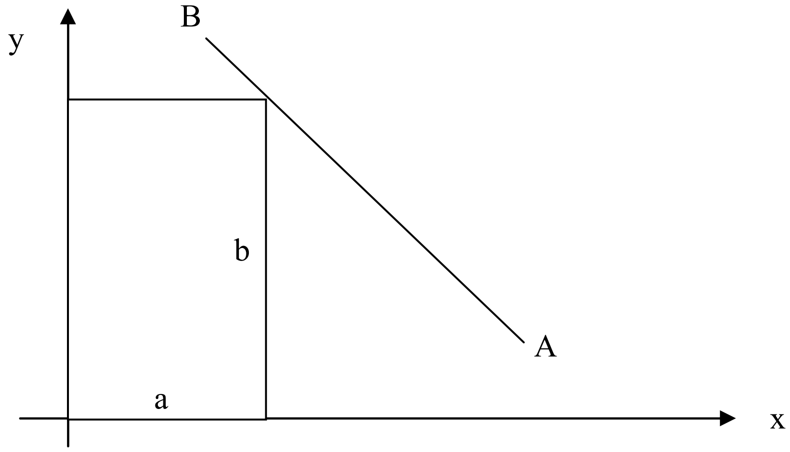
$$\frac{y-4}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$, also

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

A(a,b) = a · b




2) Nebenbedingung:

b = f(a) = $-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$$A(a) = a \cdot (-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{9}{2}a$$

4) Ableitungen:

$$A'(a) = -a + \frac{9}{2}$$

$$A''(a) = -1$$

5) Definitionsbereich:

D = [1; 5]

6) Lokale Extremwerte E($a_e$ | $A_e$): A'($a_e$) = 0:

$$-a_e + \frac{9}{2} = 0$$

$$a_e = \frac{9}{2}$$

$$A''(\frac{9}{2}) = -1 < 0$$

also: relatives Maximum bei $a_e = \frac{9}{2}$

$$A(\frac{9}{2}) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{81}{4} + \frac{81}{2} = -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} = \frac{81}{8}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$A(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{9}{2} \cdot 1 = 4$$

$$A(5) = -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + \frac{9}{2} \cdot 5 = 10$$

8) Ergebnis:

Die Fläche erreicht für $a_e = \frac{9}{2} = 4{,}5$ ihr absolutes Maximum $A_e = \frac{81}{8} = 10{,}125$ FE

Die Fläche erreicht für $a_e = 1$ ihr absolutes Minimum $A_e = 4$ FE

b)
Lösung:
1) Zielfunktion:
$V(a,b) = \pi b^2 a$

2) Nebenbedingung:
b = $-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}$

s

3) Reduktion auf 1 Variable:
$$V(a) = \pi\left(-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}\right)^2 a = \pi a\left(\frac{a^2}{4} + \frac{81}{4} - \frac{9}{2}a\right) = \frac{\pi a^3}{4} + \frac{81\pi}{4}a - \frac{9\pi}{2}a^2$$
$$V(a) = \frac{\pi}{4}a^3 - \frac{9\pi}{2}a^2 + \frac{81\pi}{4}a$$

4) Ableitungen:
$$V'(a) = \frac{3\pi}{4}a^2 - 9\pi a + \frac{81\pi}{4}$$
$$V''(a) = \frac{3\pi}{2}a - 9\pi$$

5) Definitionsbereich:
D = [1; 5]

6) Lokale Extremwerte E($a_e$ | $A_e$): A'($a_e$) = 0:
$$\frac{3\pi}{4}a_e^2 - 9\pi a_e + \frac{81\pi}{4} = 0 \;\mid\; \cdot\frac{4\pi}{3}$$
$$a_e^2 - 12a_e + 27 = 0$$
$$a_{e1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 1\cdot 27}}{2\cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = 6 \pm 3$$
$a_{e1} = 9 \notin D$
$a_{e2} = 3$
$$V''(3) = \frac{3\pi}{2}\cdot 3 - 9\pi = \frac{9\pi}{2} - 9\pi = -\frac{9\pi}{2} < 0$$
also: relatives Maximum bei $a_{e2} = 3$
$$V(3) = \frac{\pi}{4}\cdot 3^3 - \frac{9\pi}{2}\cdot 3^2 + \frac{81\pi}{4}\cdot 3 = \frac{27\pi}{4} - \frac{81\pi}{2} + \frac{243\pi}{4} = \frac{27\pi - 162\pi + 243\pi}{4} =$$
$$\frac{27\pi - 162\pi + 243\pi}{4} = 27\pi$$

7) Randwertuntersuchung:

$$V(1)=\frac{\pi}{4}\cdot 1^3-\frac{9\pi}{2}\cdot 1^2+\frac{81\pi}{4}\cdot 1=\frac{\pi}{4}-\frac{9\pi}{2}+\frac{81\pi}{4}=\frac{\pi-18\pi+81\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}=16\pi$$

$$V(5)=\frac{\pi}{4}\cdot 5^3-\frac{9\pi}{2}\cdot 5^2+\frac{81\pi}{4}\cdot 5=\frac{125\pi}{4}-\frac{225\pi}{2}+\frac{405\pi}{4}=\frac{125\pi-450\pi+405\pi}{4}=$$

$$\frac{125\pi-450\pi+405\pi}{4}=20\pi$$

8) Ergebnis:

Das Volumen (bei Drehung um die x-Achse) erreicht für $a_e = 1$ ihr absolutes Minimum

$V_e = 16\pi \approx 50{,}27$ VE

Das Volumen (bei Drehung um die x-Achse) erreicht für $a_e = 3$ ihr absolutes Maximum

$V_e = 27\pi \approx 84{,}82$ VE

c)
Lösung:
1) Zielfunktion:
$V(a,b) = \pi a^2 b$

2) Nebenbedingung:
s

b = $-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}$

3) Reduktion auf 1 Variable:
$V(a) = \pi a^2\left(-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}\right) = \pi a^2 \cdot -\frac{1}{2}a + \pi a^2 \cdot \frac{9}{2} = -\frac{\pi}{2}a^3 + \frac{9\pi}{2}a^2$
$V(a) = -\frac{\pi}{2}a^3 + \frac{9\pi}{2}a^2$

4) Ableitungen:
$V'(a) = -\frac{3\pi}{2}a^2 + 9\pi a$
$V''(a) = -3\pi a + 9\pi$

5) Definitionsbereich:
D = [1; 5]

6) Lokale Extremwerte E($a_e$ | $A_e$): A'($a_e$) = 0:
$-\frac{3\pi}{2}a_e^2 + 9\pi a_e = 0$
$a_e^2 - 6a_e = 0$
$a_e(a_e - 6) = 0$

Fall1:
$a_e = 0$
$a_{e1} = 0 \notin D$

Fall2:
$a_e - 6 = 0$
$a_e = 6$
$a_{e2} = 6 \notin D$

7) Randwertuntersuchung:
$V(1) = -\frac{\pi}{2}\cdot 1^3 + \frac{9\pi}{2}\cdot 1^2 = -\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} = 4\pi$
$V(5) = -\frac{\pi}{2}\cdot 5^3 + \frac{9\pi}{2}\cdot 5^2 = -\frac{125\pi}{2} + \frac{225\pi}{2} = 50\pi$

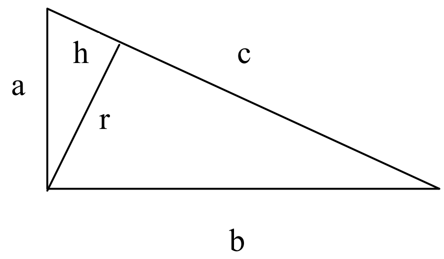
8) Ergebnis:
Das Volumen (bei Drehung um die y-Achse) erreicht für $a_e = 1$ ihr absolutes Minimum
$V_e = 4\pi \approx 12{,}57$ VE
Das Volumen (bei Drehung um die y-Achse) erreicht für $a_e = 5$ ihr absolutes Maximum
$V_e = 50\pi \approx 157{,}08$ VE

Aufgabe 20)

a)

1) Zielfunktion:

$$V(a,b) = \frac{\pi}{3} b^2 \cdot a$$




2) Nebenbedingungen:

$a^2 + b^2 = c^2$, also:

$b^2 = c^2 - a^2$

3) Reduktion auf eine Variable:

$$V(a) = \frac{\pi}{3}(c^2 - a^2) \cdot a = \frac{\pi}{3}c^2 a - \frac{\pi}{3}a^3$$

$$V(a) = \frac{\pi}{3}c^2 a - \frac{\pi}{3}a^3$$

4) Ableitungen:

$$V'(a) = \frac{\pi}{3}c^2 - \pi a^2$$

$$V''(a) = -2\pi a$$

5) Definitionsbereich:

D = [0 ; c]

6) Lokale Extremwerte : $E(a_e \mid V_e)$: $V'(a_e) = 0$:

$$\frac{\pi}{3}c^2 - \pi a_e^2 = 0$$

$$a_e^2 = \frac{1}{3}c^2$$

$$a_{e1} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

$$a_{e2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}c \notin \text{D}$$

$$V''(\frac{\sqrt{3}}{3}c) = -2\pi \frac{\sqrt{3}}{3}c = -\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}c < 0$$

also: relatives Maximum bei $a_{e1} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$

$$V(\frac{\sqrt{3}}{3}c) = \frac{\pi}{3}c^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right) - \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}c^3 - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{27}c^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}c^3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{27}c^3 = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}c^3$$

7) Randwertuntersuchung:

$$V(0) = \frac{\pi}{3}c^2 \cdot 0 - \frac{\pi}{3} \cdot 0^3 = 0$$

$$V(c) = \frac{\pi}{3}c^2 \cdot c - \frac{\pi}{3} \cdot c^3 = 0$$

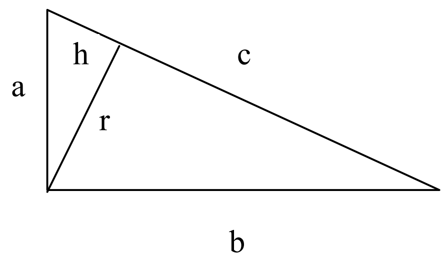
8) Ergebnis (für c = 6):

Das Volumen des Kegels erreicht bei $a_e = \frac{\sqrt{3}}{3}c \approx 3{,}46$ LE sein absolutes Maximum von

$V_e = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}c^3 \approx 87{,}06$ VE

b)

3) Reduktion auf eine Variable:




$$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h + \frac{\pi}{3} r^2 \cdot (c-h) =$$

$$\frac{\pi}{3} r^2 h + \frac{\pi}{3} r^2 c - \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 c$$

4) Ableitungen:

$$V'(r) = \frac{2\pi}{3} rc$$

$$V''(r) = \frac{2\pi}{3} c$$

5) Definitionsbereich:

D = [0 ; c/2]

6) Lokale Extremwerte : E($r_e$ | $V_e$): V'($r_e$) = 0:

$$\frac{2\pi}{3} c r_e = 0 \quad | \cdot \frac{3}{2\pi c}$$

$r_e = 0$

$$V''(0) = \frac{2\pi}{3} c > 0$$

also: relatives Minimum bei $r_e = 0$

7) Randwertuntersuchung:

$$V(0) = \frac{\pi}{3} \cdot 0^2 \cdot c = 0$$

$$V(\frac{c}{2}) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot c = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{c^2}{4} \cdot c = \frac{\pi}{12} c^3$$

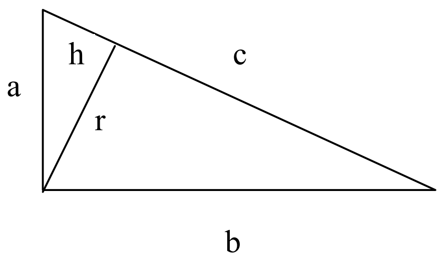
8) Ergebnis (für c = 6):

Das Volumen des Kegels erreicht bei $r_e = \frac{c}{2} = 3$ LE sein absolutes Maximum von

$V_e = \frac{\pi}{12} c^3 \approx 56{,}55$ VE

b) Alternativlösung

3) Reduktion auf eine Variable:




$$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h + \frac{\pi}{3} r^2 \cdot (c-h) =$$

$$\frac{\pi}{3} r^2 \cdot h + \frac{\pi}{3} r^2 c - \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 c$$

Es gilt:

$h^2 + r^2 = a^2$, also:

$r^2 = a^2 - h^2$

Nach dem Kathetensatz gilt:

$a^2 = ch$, also

$$h = \frac{a^2}{c}$$

also:

$r^2 = a^2 - \frac{a^4}{c^2}$

also:

$$V(a) = \frac{\pi}{3} c(a^2 - \frac{a^4}{c^2}) = \frac{\pi}{3} ca^2 - \frac{\pi}{3c} a^4$$

$$V(a) = \frac{\pi c}{3} a^2 - \frac{\pi}{3c} a^4$$

4) Ableitungen:

$$V'(a) = \frac{2\pi c}{3} a - \frac{4\pi}{3c} a^3$$

$$V''(a) = \frac{2\pi c}{3} - \frac{4\pi}{c} a^2$$

5) Definitionsbereich:

D = [0 ; c]

6) Lokale Extremwerte : $E(a_e \mid V_e)$: $V'(a_e) = 0$:

$$\frac{2\pi c}{3} a_e - \frac{4\pi}{3c} a_e^3 = 0$$

$$a_e (\frac{2\pi c}{3} - \frac{4\pi}{3c} a_e^2) = 0$$

Fall1:

$a_e = 0$

$a_{e1} = 0$ (Randpunkt)

Fall2:

$$\frac{2\pi c}{3} - \frac{4\pi}{3c} a_e^2 = 0 \quad | \cdot \ \frac{3c}{2\pi}$$

$$c^2 - 2a_e^2 = 0$$

$$c^2 - 2a_e^2 = 0$$

$$a_e^2 = \frac{c^2}{2}$$

$$a_{e1} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$a_{e1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}c \notin \mathrm{D}$$

$$V''(\frac{\sqrt{2}}{2}c) = \frac{2\pi c}{3} - \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 = V''(\frac{\sqrt{2}}{2}c) = \frac{2\pi c}{3} - \frac{4\pi}{c}\cdot\frac{1}{2}c^2 = \frac{2\pi c}{3} - 2\pi c = -\frac{4\pi c}{3} < 0$$

also: relatives Maximum bei $a_{e1} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$

$$V(\frac{\sqrt{2}}{2}c) = \frac{\pi c}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - \frac{\pi}{3c}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^4 = \frac{\pi c}{3}\cdot\frac{c^2}{2} - \frac{\pi}{3c}\cdot\frac{c^4}{4} = \frac{\pi c^3}{6} - \frac{\pi c^3}{12} = \frac{2\pi c^3 - \pi c^3}{12} = \frac{\pi c^3}{12}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$V(0) = \frac{\pi c}{3}\cdot 0^2 - \frac{\pi}{3c}\cdot 0^4 = 0$$

$$V(c) = \frac{\pi c}{3}\cdot c^2 - \frac{\pi}{3c}\cdot c^4 = 0$$

8) Ergebnis (für c = 6):

Das Volumen des Kegels erreicht bei $a_e = \frac{\sqrt{2}}{2}c = 3\sqrt{2} \approx 3{,}24$ LE sein absolutes Maximum

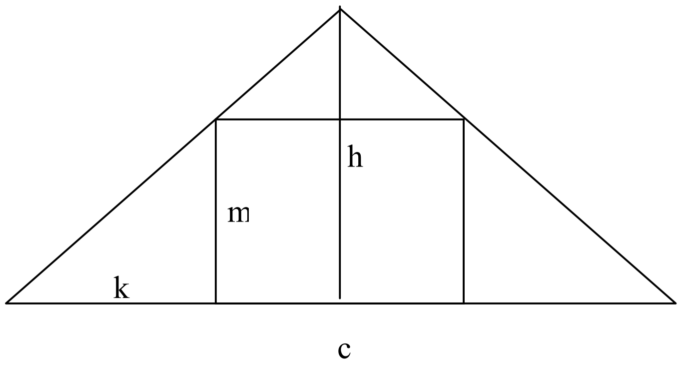
von $V_e = \frac{\pi c^3}{12} \approx 56{,}55$ VE

Aufgabe 21)

a)

1) Zielfunktion:

$$A(m,k) = 2m \cdot \left(\frac{1}{2}c - k\right)$$




2) Nebenbedingungen:

$\frac{m}{k} = \frac{h}{\frac{c}{2}}$, also:

$$m = \frac{2hk}{c}$$

3) Reduktion auf eine Variable:

$$A(k) = 2m \cdot \left(\frac{1}{2}c - k\right) = 2\frac{2hk}{c}\left(\frac{1}{2}c - k\right) = \frac{4hk}{c}\left(\frac{1}{2}c - k\right) = 2hk - \frac{4hk^2}{c}$$

$$A(k) = 2hk - \frac{4hk^2}{c}$$

4) Ableitungen:

$$A'(k) = 2h - \frac{8hk}{c}$$

$$A''(k) = -\frac{8h}{c}$$

5)

D = [0 ; c/2]

6) Lokale Extremwerte $E(k_e \mid A_e)$: $A'(k_e) = 0$:

$$0 = 2h - \frac{8hk_e}{c}$$

$$2h = \frac{8hk_e}{c} \implies 2ch = 8hk_e$$

$$k_e = \frac{c}{4}$$

$$A''\left(\frac{c}{4}\right) = -\frac{8h}{c} < 0$$

also: relatives Maximum bei $k_e = \frac{c}{4}$.

$$A\left(\frac{c}{4}\right) = 2h \cdot \frac{c}{4} - \frac{4h \cdot \left(\frac{c}{4}\right)^2}{c} = \frac{hc}{2} - \frac{hc}{4} = \frac{hc}{4}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 2h \cdot 0 - \frac{4h \cdot 0^2}{c} = 0$$

$$A(\frac{c}{2}) = 2h \cdot \frac{c}{2} - \frac{4h \cdot (\frac{c}{2})^2}{c} = hc - \frac{4h \cdot \frac{c^2}{4}}{c} = 0$$

8) Ergebnis (für c = 5,6 und h = 3,6):

Der Flächeninhalt des Rechtecks erreicht bei $k_e = \frac{c}{4} = 1{,}4$ LE sein absolutes Maximum von $A_e = \frac{hc}{4} = 5{,}04$ FE

b)

1) Zielfunktion:

k sei der Radius und m die Höhe des Zylinders

$V(k,m) = \pi k^2 \cdot m$

2) Nebenbedingungen:

$\frac{m}{r-k} = \frac{h}{r}$, also:

$m = \frac{h(r-k)}{r}$

3) Reduktion auf eine Variable:

$V(k) = \pi k^2 \cdot \frac{h(r-k)}{r} = \frac{\pi k^2 h(r-k)}{r} = \pi k^2 h - \frac{\pi k^3 h}{r}$

$V(k) = \pi k^2 h - \frac{\pi k^3 h}{r}$

4) Ableitungen:

$V'(k) = 2\pi hk - \frac{3\pi hk^2}{r}$

$V''(k) = 2\pi h - \frac{6\pi hk}{r}$

5) Definitionsbereich:

D = [0 ; r]

6) Lokale Extremwerte : $E(k_e \mid V_e)$: $V'(k_e) = 0$:

$0 = 2\pi hk_e - \frac{3\pi hk_e^2}{r}$

$0 = 2\pi rhk_e - 3\pi hk_e^2$ ==> $0 = k_e(2\pi rh - 3\pi hk_e)$

Fall1: $k_e = 0$

also: $k_{e1} = 0$

Fall2: $0 = 2\pi rh - 3\pi hk_e$

also: $k_{e2} = \frac{2r}{3}$

$V''(0) = 2\pi h - \frac{6\pi h \cdot 0}{r} = 2\pi h > 0$

also: relatives Minimum bei $k_{e1} = 0$.

$V''(\frac{2r}{3}) = 2\pi h - \frac{6\pi h \cdot (\frac{2r}{3})}{r} = 2\pi h - 4\pi h = -2\pi h < 0$

also: relatives Maximum bei $k_{e2}$ =. $\frac{2r}{3}$

$$V(\frac{2r}{3}) = \pi \cdot \left(\frac{2r}{3}\right)^2 \cdot h - \frac{\pi \cdot \left(\frac{2r}{3}\right)^3 \cdot h}{r} = \frac{4\pi r^2 h}{9} - \frac{8\pi r^3 h}{27r} = \frac{4\pi r^2 h}{9} - \frac{8\pi r^2 h}{27} = \frac{4}{27}\pi r^2 h$$

7) Randwertuntersuchung:

$$V(0) = \pi \cdot 0^2 \cdot h - \frac{\pi \cdot 0^3 \cdot h}{r} = 0$$

$$V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{\pi \cdot r^3 \cdot h}{r} = 0$$

8) Ergebnis (für r = 3 cm und Höhe h = 5):

Das Volumen des Zylinders erreicht bei $k_e = \frac{2r}{3} = 2$ LE sein absolutes Maximum von

$V_e = \frac{4}{27}\pi r^2 h \approx 20{,}94$ VE

c)
1) Zielfunktion:
k sei der Radius und m die Höhe des Kegels

$$V(k,m) = \frac{\pi}{3}k^2 \cdot m$$

2) Nebenbedingungen:

$\frac{m}{r-k} = \frac{h}{r}$, also:

$$m = \frac{h(r-k)}{r}$$

3) Reduktion auf eine Variable:

$$V(k) = \frac{\pi}{3}k^2 \cdot \frac{h(r-k)}{r} = \frac{\pi k^2 h(r-k)}{3r} = \frac{\pi}{3}k^2 h - \frac{\pi k^3 h}{3r}$$

$$V(k) = \frac{\pi}{3}k^2 h - \frac{\pi k^3 h}{3r}$$

4) Ableitungen:

$$V'(k) = \frac{2}{3}\pi hk - \frac{\pi hk^2}{r}$$

$$V''(k) = \frac{2}{3}\pi h - \frac{2\pi hk}{r}$$

5) Definitionsbereich:
D = [0 ; r]

6) Lokale Extremwerte : $E(k_e \mid V_e)$: $V'(k_e) = 0$:

$$0 = \frac{2}{3}\pi hk_e - \frac{\pi hk_e^2}{r}$$

$$0 = \frac{2}{3}\pi rhk_e - \pi hk_e^2 \implies 0 = k_e(\frac{2}{3}\pi rh - \pi hk_e)$$

Fall1: $k_e = 0$
also: $k_{e1} = 0$

Fall2: $0 = \frac{2}{3}\pi rh - \pi hk_e$

also: $k_{e2} = \frac{2r}{3}$

$$V''(0) = \frac{2}{3}\pi h - \frac{2\pi h \cdot 0}{r} = \frac{2}{3}\pi h > 0$$

also: relatives Minimum bei $k_{e1} = 0$.

$$V''\left(\frac{2r}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi h-\frac{2\pi h\cdot\left(\frac{2r}{3}\right)}{r}=\frac{2}{3}\pi h-\frac{4}{3}\pi h=-\frac{2}{3}\pi h\ <0$$

also: relatives Maximum bei $k_{e2}$ =. $\frac{2r}{3}$

$$V\left(\frac{2r}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{2r}{3}\right)^2\cdot h-\frac{\pi\cdot\left(\frac{2r}{3}\right)^3\cdot h}{3r}=\frac{4\pi r^2h}{27}-\frac{8\pi r^3h}{81r}=\frac{4\pi r^2h}{27}-\frac{8\pi r^2h}{81}=\frac{4}{81}\pi r^2h$$

7) Randwertuntersuchung:

$$V(0)=\frac{\pi}{3}\cdot 0^2\cdot h-\frac{\pi\cdot 0^3\cdot h}{3r}=0$$

$$V(r)=\frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot h-\frac{\pi\cdot r^3\cdot h}{3r}=0$$

8) Ergebnis (für r = 3 cm und Höhe h = 5):

Das Volumen des Kegels erreicht bei $k_e = \frac{2r}{3} = 2$ LE sein absolutes Maximum von

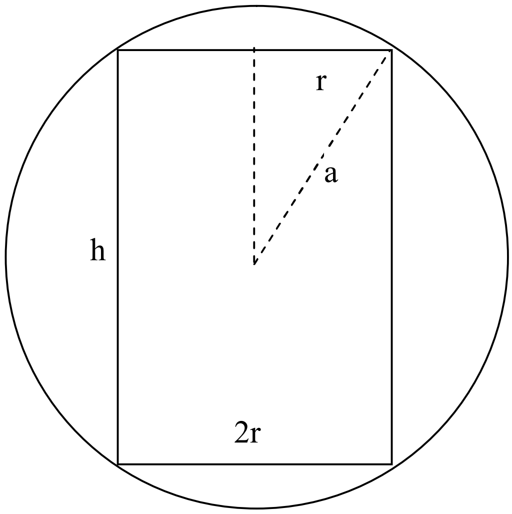
$V_e = \frac{4}{81}\pi r^2 h \approx 6{,}98$ VE

Aufgabe 22)

a)

1) Zielfunktion:

$V(r,h) = \pi h r^2$




2) Nebenbedingung:

$(2r)^2 + h^2 = (2a)^2$ , also:

$$r^2 = a^2 - \frac{h^2}{4}$$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$$V(h) = \pi h(a^2 - \frac{h^2}{4}) = \pi a^2 h - \frac{\pi}{4} h^3$$

$$V(h) = \pi a^2 h - \frac{\pi}{4} h^3$$

4) Ableitungen:

$$V'(h) = \pi a^2 - \frac{3\pi}{4} h^2$$

$$V''(h) = -\frac{3\pi}{2} h$$

5) Definitionsbereich:

D = [0 ; 2a]

6) Lokale Extremwerte $E(h_e \mid V_e)$: $V'(h_e) = 0$:

$$\pi a^2 - \frac{3\pi}{4} h_e^2 = 0$$

$$4a^2 - 3h_e^2 = 0$$

$$h^2 = \frac{4a^2}{3}$$

$$h_{e1} = \sqrt{\frac{4a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \qquad he_2 = -\sqrt{\frac{4a^2}{3}} = -\frac{2a}{\sqrt{3}} \notin \text{D}$$

$$V''(\frac{2a}{\sqrt{3}}) = -3\pi \frac{2a}{\sqrt{3}} < 0$$

also: relatives Maximum bei $h_{e1} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$$V(\frac{2a}{\sqrt{3}}) = \pi a^2 \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{2\pi a^3}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi a^3}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} a^3$$

7) Randwertuntersuchung:

$$V(0) = \pi a^2 \cdot 0 - \frac{\pi}{4} \cdot 0^3 = 0$$

$$V(2a) = \pi a^2 \cdot (2a) - \frac{\pi}{4} \cdot (2a)^3 = 0$$

8) Ergebnis (für a = 4):

Das Volumen erreicht für $h_e = \frac{2a}{\sqrt{3}} \approx 6{,}62$ LE sein absolutes Maximum

$V_e = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} a^3 \approx 154{,}78$VE

b) Ansatz führt nicht zum Ziel

1) Zielfunktion:

$$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

2) Nebenbedingung:

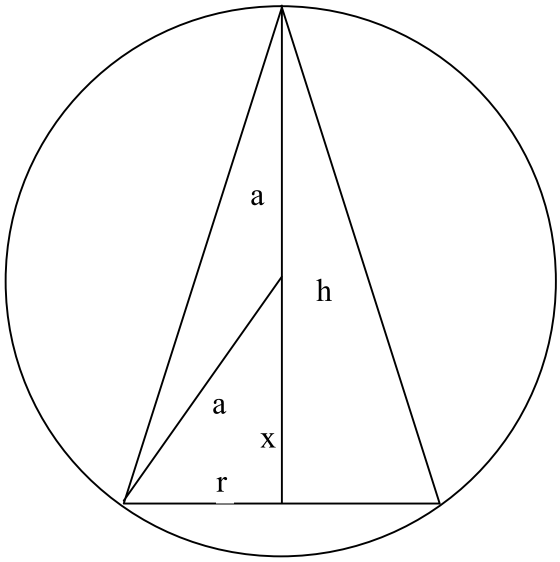
$r^2 + x^2 = a^2$ , also:

$x^2 = a^2 - r^2$, also

$$x = \sqrt{a^2 - r^2}$$

außerdem:

$h = a + x$




3) Reduktion auf 1 Variable:

$$V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 (a + \sqrt{a^2 - r^2}) =$$

$$\frac{\pi}{3} ar^2 + \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{a^2 - r^2}) =$$

$$\frac{\pi}{3} ar^2 + \frac{\pi}{3} \sqrt{r^4 (a^2 - r^2)} = \frac{\pi}{3} ar^2 + \frac{\pi}{3} \sqrt{a^2 r^4 - r^6}$$

$$V(r) = \frac{\pi}{3} ar^2 + \frac{\pi}{3} \sqrt{a^2 r^4 - r^6}$$

4) Ableitungen:

$$V'(r) = \frac{2\pi}{3} ar + \frac{\pi}{6\sqrt{a^2 r^4 - r^6}} (4a^2 r^3 - 6r^5)$$

b)

1) Zielfunktion:

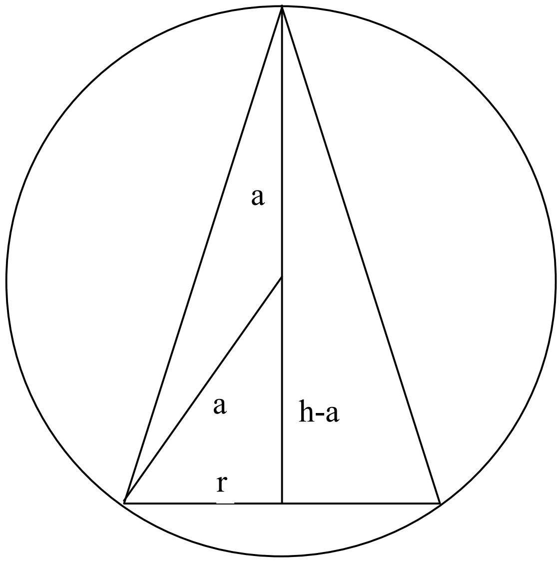
$$V(r,h) = \frac{\pi}{3} h r^2$$

2) Nebenbedingung:

$r^2 + (h-a)^2 = a^2$

$r^2 + h^2 - 2ah + a^2 = a^2$

$r^2 = 2ah - h^2$




3) Reduktion auf 1 Variable:

$$V(h) = \frac{\pi}{3} h(2ah - h^2) = \frac{2\pi a}{3} h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$$

$$V(h) = \frac{2\pi a}{3} h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$$

4) Ableitungen:

$$V'(h) = \frac{4\pi a}{3} h - \pi h^2$$

$$V''(h) = \frac{4\pi a}{3} - 2\pi h$$

5) Definitionsbereich:

D = [0 ; a]

6) Lokale Extremwerte $E(h_e \mid V_e)$: $V'(h_e) = 0$:

$$\frac{4\pi a}{3} h_e - \pi h_e^2 = 0$$

$$\pi h_e \left(\frac{4a}{3} - h_e\right) = 0$$

Fall1:

$$\pi h_e = 0$$

$h_{e1} = 0$ (Randpunkt)

Fall2:

$$\frac{4a}{3} - h_e = 0$$

$$h_{e2} = \frac{4a}{3}$$

$$V''\left(\frac{4a}{3}\right) = \frac{4\pi a}{3} - 2\pi \frac{4a}{3} = -\frac{4\pi a}{3} < 0$$

also: relatives Maximum $h_{e2} = \frac{4a}{3}$

$$V\left(\frac{4a}{3}\right) = \frac{2\pi a}{3}\left(\frac{4a}{3}\right)^2 - \frac{\pi}{3}\left(\frac{4a}{3}\right)^3 = \frac{32\pi a^3}{27} - \frac{64\pi a^3}{81} = \frac{32\pi}{81} a^3$$

7) Randwertuntersuchung:

$$V(0) = \frac{2\pi a}{3} \cdot 0^2 - \frac{\pi}{3} \cdot 0^3 = 0$$

$$V(a) = \frac{2\pi a}{3} \cdot a^2 - \frac{\pi}{3} \cdot a^3 = 0$$

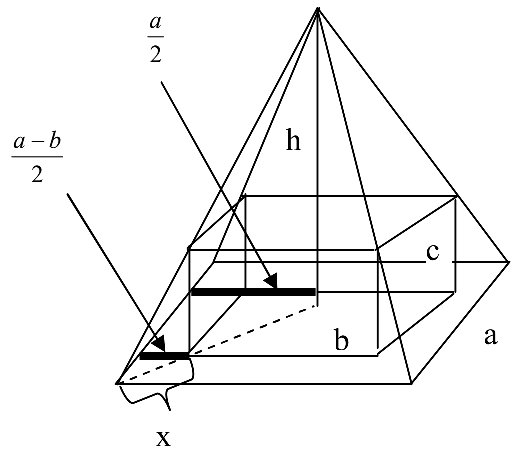
8) Ergebnis (für a = 4):

Das Volumen erreicht für $h_e = \frac{4a}{3} \approx 5{,}33$ LE sein absolutes Maximum

$V_e = \frac{32\pi}{81} a^3 \approx 79{,}43$ VE

Aufgabe 23)

1) Zielfunktion:
V(b,c) = b²c




2) Nebenbedingung:
y sei die große gestrichelte Linie
Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{x}{y}$$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt auch:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{h}$$

also:

$$\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{c}{h}$$, also:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c}{h}$$

$$c = \frac{a-b}{a}h$$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$$V(b) = b^2\frac{a-b}{a}h = hb^2 - \frac{h}{a}b^3$$

$$V(b) = hb^2 - \frac{h}{a}b^3$$

4) Ableitungen:

$$V'(b) = 2hb - \frac{3h}{a}b^2$$

$$V''(b) = 2h - \frac{6h}{a}b$$

5) Definitionsbereich:
D = [0 ; a]

6) Lokale Extremwerte $E(b_e \mid V_e)$: $V'(b_e) = 0$:

$$2hb_e - \frac{3h}{a}b_e^2 = 0 \quad | : h \neq 0$$

$$2b_e - \frac{3}{a}b_e^2 = 0$$

$$b_e(2 - \frac{3}{a}b_e) = 0$$

Fall1: $b_e = 0$

also: $b_{e1} = 0$ (Randpunkt)

Fall2: $2 - \frac{3}{a}b_e = 0$

also: $b_{e2} = \frac{2a}{3}$

$$V''(\frac{2a}{3}) = 2h - \frac{6h}{a} \cdot \frac{2a}{3} = 2h - 4h = -2h < 0$$

also: relatives Maximum bei $b_{e2} = \frac{2a}{3}$.

$$V(\frac{2a}{3}) = h\left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \frac{h}{a}\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{4a^2h}{9} - \frac{8a^3h}{27a} = \frac{4a^2h}{9} - \frac{8a^2h}{27} = \frac{4a^2h}{27}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$V(0) = h \cdot 0^2 - \frac{h}{a} \cdot 0^3 = 0$$

$$V(a) = h \cdot a^2 - \frac{h}{a} \cdot a^3 = 0$$

8) Ergebnis:

Der Quader erreicht bei $b_e = \frac{2a}{3}$ LE sein maximales Volumen $V_e = \frac{4a^2h}{27}$ VE