1 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

1) Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge 16cm werden an den Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgestanzt, so dass aus dem restlichen Blech eine nach oben offene Blechschachtel gebogen werden kann.
a)Wie muss x gewählt werden, damit eine Schachtel mit maximalem Volumen entsteht?
b) Lösen Sie den Aufgabenteil a) für ein quadratisches Stück Blech mit der Seitenlänge s.

2) Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Kantenlängen a = 16cm und b =10cm werden an den Ecken Quadrate der Kantenlänge x ausgestanzt, so dass aus der restlichen Pappe eine nach oben offene Schachtel hergestellt werden kann.
a)Wie muss x gewählt werden, damit eine Schachtel mit maximalem Volumen entsteht?
b) Lösen Sie Teilaufgabe a) für die Kantenlängen s und 2s.

3) Es war einmal ein König, der aus Freude über die Vermählung seiner Tochter einigen Untertanen ein Geschenk machen wollte. Jeder Untertan sollte ein rechteckiges Stück ebenes Ackerland zur Versorgung seiner Familie erhalten. Als Bedingung stellte der König: Das Landstück muss innerhalb einer Stunde (gemessen mit einer Sanduhr) zu Fuß umlaufen werden. Wie soll ein Untertan seinen Weg wählen, damit sein Stück Ackerland möglichst groß wird, wenn er als einziges Hilfsmittel eine (Sand-)Uhr gestellt bekommt und er 6 km in einer Stunde zurücklegen kann? Wie groß wird sein Grundstück maximal?

4) Zerlegen Sie die Zahl 12 so in 2 Summanden, dass
a) ihr Produkt möglichst groß wird,
b) die Summe ihrer Quadrate möglichst klein wird.

5) a) Welche beiden reellen Zahlen mit der Differenz 1 (2; d) haben das kleinste Produkt?
b) Wie klein kann die Summe aus einer positiven Zahl und ihrem Kehrwert werden?

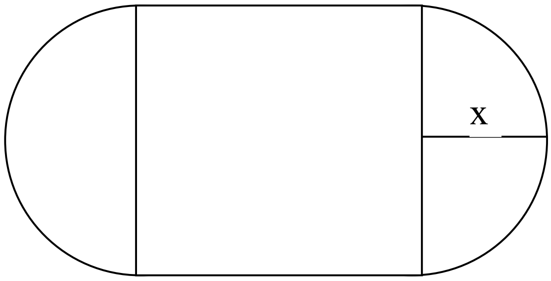
6) Aus einem 120 cm langen Draht ist ein Kantenmodell eines Quaders herzustellen, so dass eine Kante dreimal so lang ist wie eine andere und das Volumen maximal wird.

7) Gegeben sind f und g durch $f(x) = 0{,}5\,x^2 + 2$ und $g(x) = x^2 - 2x + 2$.
a) Für welche Werte $x \in [0; 4]$ wird die Summe der Funktionswerte extrem?
b) Für welche Werte $x \in [0; 4]$ wird die Differenz der Funktionswerte extrem?
c) Bearbeiten Sie diese Aufgabe mit dem GTR: Für welche Werte $x \in [0; 4]$ wird das Produkt der Funktionswerte extrem? Um welche Art von Extremum handelt es sich jeweils? Geben Sie die Extrema an.

8) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 9$. Die Punkte $A(-u \mid 0)$, $B(u \mid 0)$, $C(u \mid f(u))$ und $D(-u \mid f(u))$, wobei $0 < u < 3$, bilden ein Rechteck.
a) Für welches u wird der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD maximal?
Wie groß ist der maximale Inhalt?
b) Für welches u wird der Umfang des Rechtecks ABCD maximal?
Wie groß ist der maximale Umfang?

9) Dem Abschnitt der Parabel mit der Gleichung $y = 6 - 1/4\, x^2$, welcher oberhalb der x-Achse liegt, ist ein Rechteck
a) größten Umfangs,
b) größten Inhalts einzubeschreiben.

10)



Eine 400 m Laufbahn besteht aus 2 parallelen Strecken mit zwei angesetzten Halbkreisen. Für welchen Radius x der Halbkreise wird die rechteckige Spielfläche maximal ?

11) Einem gleichseitigem Dreieck mit der Seite s = 7 cm ist ein Parallelogramm größten Inhalts einzubeschreiben, das mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat.

12) Ein Eisenbahntunnel hat eine Querschnittsfläche von 32m². Er hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Welche Maße hat der Tunnel, wenn nur daran gedacht wird, dass der Umfang und damit der Materialverbrauch minimal ist?

13) Schon die Römer bauten Abwasserkanäle (die die gleiche Form wie ein Eisenbahntunel haben).
Der Querschnitt eines Abwasserkanals ist im Normalfall ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Wie muss ein Abwasserkanal gebaut werden, wenn bei gegebener Querschnittsfläche A = 3 m² der Umfang minimal wird?

14) Für eine Wasserrinne soll ein Blech der Breite s = 40cm und beliebiger Länge verwendet werden. Der Querschnitt der Rinne soll ein Halbkreis mit aufgesetztem Rechteck sein.
Es ist sinnvoll, die Rinne so zu formen, dass sie möglichst viel Wasser aufnehmen kann. Dazu muss der Querschnitt maximal werden. Berechnen Sie, wie die Rinne dazu geformt werden muss.

15) Gegeben ist die Gerade mit der Gleichung $y = ax - a^2$ mit $0 < a < 6$
a) Für welches a schneidet diese Gerade von der Gerade x = 6 das größte über der x-Achse liegende Stück ab ?
b) Die Gerade begrenzt mit der x-Achse und der Gerade x = 6 ein Dreieck. Für welches a hat dieses Dreieck den größten Inhalt?

16) Bestimmen Sie den Punkt A (u | v) des Graphen der Funktion f_p der vom Punkt P den kleinsten Abstand hat
a) $f(x) = x^2$; P(1 | 2)
b) $f(x) = -2x^2 + 4$: P(0 | 0)

17) Einem Quadrat mit der Seite a = 5 cm ist ein Quadrat kleinsten Inhalts einzubeschreiben, dessen Ecken auf den Seiten des gegebenen Quadrats liegen.

18) Wie müssen die Abmessungen einer zylindrischen Konservendose mit dem Volumen 1 dm³ gewählt werden, damit der Blechverbrauch bei der Herstellung minimal wird?

19 Es sollen zylinderförmige Töpfe einfachster Bauart mit dem Rauminhalt 2 Liter hergestellt werden. Wie sind Durchmesser und Höhe der Töpfe zu wählen, damit

a) die gesamte Schweißnaht, die am Bodenrand und längs einer Mantellinie angebracht werden soll, minimal wird?

b) der Blechverbrauch möglichst klein wird? Zeigen Sie, dass der Blechverbrauch am kleinsten wird, wenn die Höhe des Zylinders gleich seinem Durchmesser ist.

20) Auf der Strecke AB mit A (5 | 2) und B (1 | 4) ist ein Punkt P so gesucht, dass

a) das achsenparallele Rechteck OQPR (Q auf der x-Achse, R auf der y-Achse) maximalen (minimalen) Flächeninhalt hat

b) der Zylinder, der entsteht, wenn Rechteck OQPR um die x-Achse gedreht wird, maximales (minimales) Volumen hat

c) der Zylinder, der entsteht wenn Rechteck OQPR um die y-Achse gedreht wird, maximales (minimales) Volumen hat?

20) Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypothenuse c = 6 cm erzeugt

a) einen Kegel größten Inhalts, wenn man es um eine Kathete dreht

b) einen Doppelkegel größten Inhalts wenn man es um die Hypothenuse dreht?

21) a) einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundseite c = 5,6 cm und der Höhe h = 3,6 cm ist einen Rechteck größten Inhalts einzubeschreiben.

b) Einem Kegel mit Grundkreisradius r = 3 cm und Höhe h = 5 cm ist ein Zylinder größten Inhalts einzubeschreiben.

c) Demselben Kegel ist ein Kegel größten Inhalts einzubeschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt der Grundfläche des gegebenen Kegels liegt.

22) Einer Kugel mit Radius a = 4 cm ist

a) ein Zylinder,

b) ein Kegel größten Inhalts einzubeschreiben.

23) Einer senkrechten quadratischen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h soll ein Quader mit möglichst großem Volumen einbeschrieben werden.

Bemerkung:

Bitte folgendes Schema benutzen:

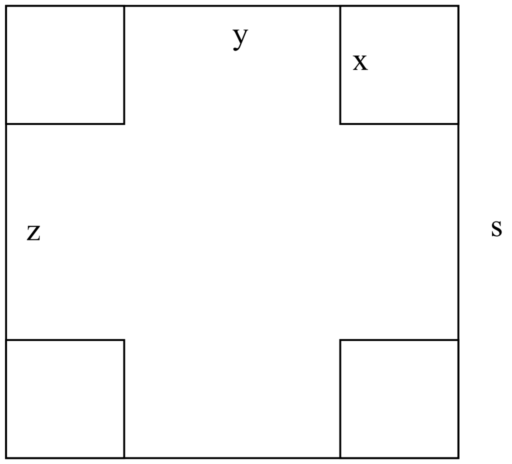
1) Zielfunktion:
2) Nebenbedingung:
3) Reduktion auf 1 Variable:
4) Ableitungen:
5) Definitionsbereich:
6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid V_e)$: $V'(x_e) = 0$:
7) Randwertuntersuchung:
8) Ergebnis:

Lösungen

Aufgabe 1)

b)

Lösung:



1) Zielfunktion:

$V(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$

2) Nebenbedingung:

$y = s - 2x$

$z = s - 2x$

$s>0$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$V(x) = (s-2x) \cdot (s-2x) \cdot x$

$V(x) = 4x^3 - 4sx^2 + s^2x$

4) Ableitungen:

$V'(x) = 12x^2 - 8sx + s^2$

$V''(x) = 24x - 8s$

5) Definitionsbereich:

$D = [0; s/2]$

6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid V_e)$: $V'(x_e) = 0$:

$12 x_e^2 - 8sx_e + s^2 = 0$

$$x_{e1/2} = \frac{8s \pm \sqrt{(-8s)^2 - 4 \cdot 12 \cdot s^2}}{2 \cdot 12} = \frac{8s \pm \sqrt{64s^2 - 48s^2}}{24} = \frac{8s \pm \sqrt{16s^2}}{24} = \frac{8s \pm 4s}{24} = \frac{2s \pm s}{6} =$$

$$x_{e1} = \frac{s}{2}$$

$$x_{e2} = \frac{s}{6}$$

$$V''(\frac{s}{2}) = \frac{24s}{2} - 8s = 4s > 0$$

also: relatives Minimum bei $x_{e1} = \frac{s}{2}$

$$V''(\frac{s}{6}) = \frac{24s}{6} - 8s = -4s < 0$$

also: relatives Maximum bei $x_{e2} = \frac{s}{6}$

$$V(\frac{s}{6}) = 4\left(\frac{s}{6}\right)^3 - 4s\left(\frac{s}{6}\right)^2 + s^2\left(\frac{s}{6}\right) = V(\frac{s}{6}) = 4\frac{s^3}{216} - 4s\frac{s^2}{36} + \frac{s^3}{6} = \frac{4s^3 - 24s^3 + 36s^3}{216}$$

$$= \frac{16s^3}{216} = \frac{2}{27}s^3$$

7) Randwertuntersuchung:

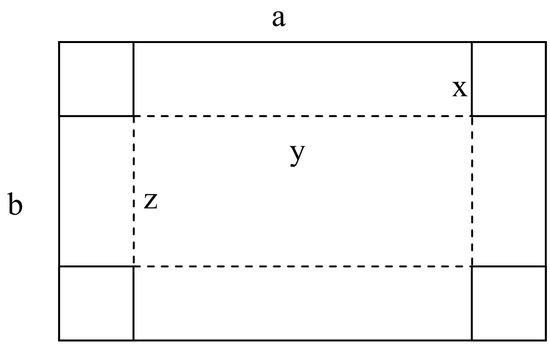
$V(0) = (s-2\cdot 0) \cdot (s-2\cdot 0) \cdot 0 = 0$

$V(s/2) = (s-2\cdot s/2) \cdot (s-2\cdot s/2) \cdot s/2 = 0$

8) Ergebnis (für s = 16)

Das Volumen erreicht für $x_e = \frac{s}{6}$ LE sein absolutes Maximum $V_e = \frac{2}{27}s^3 \approx$ 303,41 VE

Aufgabe 2)
a)
Lösung:
1) Zielfunktion:
$V(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$



2) Nebenbedingung:
$y = a - 2x$
$z = b - 2x$
$0<b<a$

3) Reduktion auf 1 Variable:
$V(x) = (a-2x) \cdot (b-2x) \cdot x$
$V(x) = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$

4) Ableitungen:
$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$
$V''(x) = 24x - 4(a+b)$

5) Definitionsbereich:
$D = [0; b/2]$

6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid V_e)$: $V'(x_e) = 0$:
$12 x_e^2 - 4(a+b) x_e + ab = 0$

$$x_{e1/2} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16(a+b)^2 - 4 \cdot 12 \cdot ab}}{2 \cdot 12} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16a^2 + 32ab + 16b^2 - 48 \cdot ab}}{24} =$$

$$\frac{4(a+b) \pm \sqrt{16a^2 - 16ab + 16b^2}}{24} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16(a^2 - ab + b^2)}}{24} =$$

$$\frac{4(a+b) \pm 4\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{24} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$$

$$x_{e1} = \frac{a+b+\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$$

$$x_{e2} = \frac{a+b-\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$$

$$V''\left(\frac{a+b+\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}\right) = 24\left(\frac{a+b+\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}\right) - 4(a+b) =$$

$$4(a+b) + 4\sqrt{a^2 - ab + b^2} - 4(a+b) = 4\sqrt{a^2 - ab + b^2} = 4\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + ab} =$$

$$4\sqrt{(a-b)^2 + ab} > 0$$

also: relatives Minimum bei $x_{e1} = \dfrac{a+b+\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$

$$V''\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)=24\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)-4(a+b)=$$

$$4(a+b)-4\sqrt{a^2-ab+b^2}-4(a+b)=-4\sqrt{a^2-ab+b^2}=-4\sqrt{a^2-2ab+b^2+ab}=$$

$$-4\sqrt{(a-b)^2+ab}<0$$

also: relatives Maximum $x_{e2}=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$

$$V\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)=4\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)^3-2(a+b)\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)^2+$$

$$(a+b)\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)=\frac{\sqrt{(a^2-ab+b^2)^3}}{27}-\frac{a^3}{27}+\frac{a^2b}{18}+\frac{ab^2}{18}-\frac{b^3}{27}$$

7) Randwertuntersuchung:
V(0) = (a-2·0) · (b-2·0) · 0 = 0
V(b/2) = (a-2·b/2) · (b-2·b/2) · b/2 = 0

8) Ergebnis:

Das Volumen erreicht für $x_e = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ LE sein absolutes Maximum

$V_e = \frac{(a^2-ab+b^2)^{1,5}}{27}-\frac{a^2b}{18}+\frac{ab^2}{18}-\frac{b^3}{27}$ VE

b)
setze b = s und a = 2s

relatives Maximum $x_{e2}=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}=\frac{2s+s-\sqrt{(2s)^2-2s^2+s^2}}{6}=$

$$\frac{3s-\sqrt{4s^2-2s^2+s^2}}{6}=\frac{3s-\sqrt{3s^2}}{6}=\frac{3s-\sqrt{3}s}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}s$$

$$x_{e2}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}s$$

$$V_e=\frac{((2s)^2-2s^2+s^2)^{1,5}}{27}-\frac{(2s)^2\cdot s}{18}+\frac{s\cdot s^2}{18}-\frac{s^3}{27}=\frac{(3s^2)^{1,5}}{27}-\frac{4s^3}{18}+\frac{s^3}{18}-\frac{s^3}{27}=$$

$$\frac{\sqrt{(3s^2)^3}}{27}-\frac{11s^3}{54}=\frac{\sqrt{27s^6}}{27}-\frac{11s^3}{54}=\frac{\sqrt{27}s^3}{27}-\frac{11s^3}{54}=\left(\frac{2\sqrt{27}}{54}-\frac{11}{54}\right)s^3=\left(\frac{2\sqrt{27}-11}{54}\right)s^3$$

$$V_e=\left(\frac{2\sqrt{27}-11}{54}\right)s^3$$

Aufgabe 3)
1) Zielfunktion:
a und b sind die Seitenlängen des Rechtecks.
$A(a,b) = a \cdot b$

2) Nebenbedingung:
$2(a + b) = 6$
$2a + 2b = 6$
$a + b = 3$
$b = 3 - a$

3) Reduktion auf 1 Variable:
$A(a) = a \cdot (3 - a) = 3a - a^2$
$A(a) = 3a - a^2$

4) Ableitungen:
$A'(a) = -2a + 3$
$A''(a) = -2$

5) Definitionsbereich:
$D = [0 ; 3]$

6) Lokale Extremwerte $E(a_e \mid A_e)$: $A'(a_e) = 0$:
$-2a_e + 3 = 0$
$a_e = 1,5$
$A''(1,5) = -2 < 0$
also: relatives Maximum bei $a_e = 1,5$
$A(1,5) = 3 \cdot 1,5 - 1,5^2 = 2,25$

7) Randwertuntersuchung:
$A(0) = 0$
$A(3) = 3 \cdot 3 - 3^2 = 0$

8) Ergebnis:
Die Fläche erreicht bei $a_e = b_e = 1,5$ LE ihren Maximalwert $A_e = 2,25$ FE

Aufgabe 4)
a)
1) Zielfunktion:
x und y sind Zahlen.
$h(x,y) = x \cdot y$

2) Nebenbedingung:
$x + y = 12$, also
$y = 12 - x$

3) Reduktion auf 1 Variable:
$h(x) = x \cdot (12-x)$, also:
$h(x) = 12x - x^2$

4)Ableitungen:
$h'(x) = 12 - 2x$
$h''(x) = -2$

5) Definitionsbereich:
D = |R

6) Lokale Extremwerte : $E(x_e \mid h_e)$: $h'(x_e) = 0$:
$12 - 2x_e = 0$
$x_e = 6$
$h''(x_e) = -2 < 0$
also: relatives Maximum bei $x_e = 6$.

7) Randwertuntersuchung:
$\lim_{x->-00} h(x) = \lim_{x->-00} (12x - x^2)$ -->-00
$\lim_{x->00} h(x) = \lim_{x->00} (12x - x^2)$ --> -00

8) Ergebnis:
Für $6 \cdot 6$ wird das Produkt maximal

b)

1) Zielfunktion:
x und y sind Zahlen.
$h(x,y) = x^2 + y^2$

2) Nebenbedingung:
$x + y = 12$, also
$y = 12 - x$

3) Reduktion auf 1 Variable:
$h(x) = x^2 + (12-x)^2$, also:
$h(x) = 2x^2 - 24x + 144$

4)Ableitungen:
$h'(x) = 4x - 24$
$h''(x) = 4$

5) Definitionsbereich:
D = |R

6) Lokale Extremwerte : $E(x_e \mid h_e)$: $h'(x_e) = 0$:
$4x_e - 24 = 0$
$x_e = 6$

$h''(x_e) = 4 > 0$
also: relatives Minimum bei $x_e = 6$.

7) Randwertuntersuchung:
$\lim_{x->-00} h(x) = \lim_{x->-00} (2x^2 - 24x + 144)$ --> 00
$\lim_{x->00} h(x) = \lim_{x->00} (2x^2 - 24x + 144)$ --> 00

8) Ergebnis:
Für $6^2 + 6^2$ wird die Summe der Quadrate minimal

Aufgabe 5)
a)
1) Zielfunktion:
x und y sind Zahlen.
$h(x,y) = x \cdot y$

2) Nebenbedingung:
$x - y = d$
$d >= 0$
also:
$y = x - d$

3) Reduktion auf 1 Variable:
$h(x) = x \cdot (x - d)$, also:
$h(x) = x^2 - xd$

4)Ableitungen:
$h'(x) = 2x - d$
$h''(x) = 2$

5) Definitionsbereich:
D = |R

6) Lokale Extremwerte : $E(x_e \mid h_e)$: $h'(x_e) = 0$:
$2x_e - d = 0$
$x_e = d/2 > 0$
$h''(d/2) = 2 > 0$
also: relatives Minimum bei $x_e = d/2$.
$h(d/2) = (d/2)^2 - (d/2)d = d^2/4 - d^2/2 = - d^2/4$

7) Randwertuntersuchung:
$\lim_{x->-00} h(x) = \lim_{x->-00} (x^2 - xd)$ --> 00
$\lim_{x->00} h(x) = \lim_{x->00} (x^2 - xd)$ --> 00

8) Ergebnis:
Für $d/2 \cdot -d/2$ wird das Produkt minimal

b)
3) Reduktion auf 1 Variable:
x ist eine Zahlen ungleich 0.

$$h(x) = x + \frac{1}{x}$$

4)Ableitungen:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$h''(x) = \frac{2}{x^3}$$

5) Definitionsbereich:
D = {x ∈ |R | x > 0} =]0 , 00[

6) Lokale Extremwerte : E(x_e | h_e): h'(x_e) = 0:

$$1 - \frac{1}{x_e^2} = 0$$

$$x_e^2 = 1$$

$x_{e1} = 1$
$x_{e2} = -1 \notin D$

$$h''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$$

also: relatives Minimum bei $x_e = 1$

$$h(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

7) Randwertuntersuchung:

$$\lim_{x->0} h(x) = \lim_{x->0}(x + \frac{1}{x}) \text{ --> } 00$$

$$\lim_{x->00} h(x) = \lim_{x->00}(x + \frac{1}{x}) \text{ --> } 00$$

8) Ergebnis:
Für 1 + 1/1 wird die Summe minimal

Aufgabe 6)
1) Zielfunktion:
a, b und c sind die Kantenlängen des Kantenmodells.
$V(a, b, c) = abc$

2) Nebenbedingung:
$120 = 4a + 4b + 4c$
$b= 3a$

$120= 4a + 12a + 4c \quad | : 4$
$30 = a + 3a + c$
$c = 30 - 4a$

3) Reduktion auf 1 Variable:
$V(a) = a \cdot 3a \cdot (30-4a) = 3a^2 \cdot (30-4a) = 90a^2 - 12a^3$
$V(a) = 90a^2 - 12a^3$

4) Ableitungen:
$V(a) = -12a^3 + 90a^2$
$V'(a)= -36a^2 + 180a$
$V''(a)= -72a + 180$

5) Definitionsbereich:
$D = [0 ; 7{,}5]$

6) Lokale Extremwerte $E(a_e \mid V_e)$: $V'(a_e) = 0$:
$-36a_e^2 + 180 a_e = 0$
$36a_e(-a_e + 5) = 0$

Fall1: $36a_e = 0$
also: $a_{e1} = 0$ (Randpunkt)

Fall2: $-a_e + 5 = 0$
also: $a_{e2} = 5$
$V''(5)= -72\cdot 5 + 180 = -180 < 0$
also: relatives Maximum bei $a_{e1} = 5$.
$V(5)= -12\cdot 5^3 + 90\cdot 5^2 = 750$
$V(5)= 750$

7) Randwertuntersuchung:
$V(0) = -12\cdot 0^3 + 90\cdot 0^2 = 0$
$V(7{,}5) = -12\cdot 7{,}5^3 + 90\cdot 7{,}5^2 = 0$

8) Ergebnis:
Das Volumen erreicht für $a_e = 5$ LE sein absolutes Maximum $V_e = 750$ VE

Aufgabe 7)

a)

3) Reduktion auf 1 Variable:

s(x) ist die Summe der Funktionswerte.

$s(x) = f(x) + g(x) = 0,5\ x^2 + 2 + x^2 - 2x + 2 = 1,5\ x^2 - 2x + 4$

4) Ableitungen:

$s'(x) = 3x - 2$

$s''(x) = 3$

5) Definitionsbereich:

$D = [0 ; 4]$

6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid s_e)$: $s'(x_e) = 0$:

$3x_e - 2 = 0$

$x_e = \frac{2}{3}$

$s''(\frac{2}{3}) = 3 > 0$

also: relatives Minimum bei $x_e = \frac{2}{3}$

$$s\left(\frac{2}{3}\right) = 1,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} - 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 4 = 3\frac{1}{3}$$

7) Randwertuntersuchung:

$s(0) = 1,5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 4 = 4$

$s(4) = 1,5 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 4 = 20$

8) Ergebnis:

Die Summe der Funktionswerte erreicht bei $x_{e1} = \frac{2}{3}$ ihr absolutes Minimum $3\frac{1}{3}$ und bei $x_{e2} = 4$ ihr absolutes Maximum 20

b)
3) Reduktion auf 1 Variable:
$d(x)$ ist die Differenz der Funktionswerte.
$d(x) = f(x) - g(x) = 0,5\ x^2 + 2 -(x^2 - 2x + 2) = -0,5\ x^2 + 2x$

4) Ableitungen:
$d'(x) = -x + 2$
$d''(x) = -1$

5) Definitionsbereich:
$D = [0 ; 4]$

6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid d_e)$: $d'(x_e) = 0$:
$-x_e + 2 = 0$
$x_e = 2$
$d''(2) = -1 < 0$
also: relatives Maximum bei $x_e = 2$

7) Randwertuntersuchung:
$d(0) = -0,5 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$
$d(4) = -0,5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 0$

8) Ergebnis:
$d(2) = -0,5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 2$
Die Differenz der Funktionswerte erreicht bei $x_{e1} = 2$ ihr absolutes Maximum 2 und bei $x_{e2} = 4$ bzw. $x_{e3} = 0$ ihr absolutes Minimum 0.

Aufgabe 8)

a)

3) Reduktion auf 1 Variable:

A(u) ist die Fläche des Rechtecks.

$A(u) = 2u \cdot f(u) = 2u\cdot(9-u^2) = 18u - 2u^3$

$A(u) = 18u - 2u^3$

4) Ableitungen:

$A'(u) = 18 - 6u^2$

$A''(u) = -12u$

5) Definitionsbereich:

Da $f(3) = 0$, gilt:

$D =]0 ; 3[$

6) Lokale Extremwerte $E(u_e \mid A_e)$: $A'(u_e) = 0$:

$-6u_e^2 + 18 = 0$

$u_e^2 = 3$

$u_{e1} = \sqrt{3}$

$u_{e2} = -\sqrt{3} \notin D$

$A''(\sqrt{3}) = -12\sqrt{3} < 0$

also: relatives Maximum bei $x_e = \sqrt{3}$

$A(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^3 = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

7) Randwertuntersuchung:

$A(0) = 18\cdot 0 - 2\cdot (0)^3 = 0$

$A(3) = 18\cdot 3 - 2\cdot 3^3 = 0$

8) Ergebnis:

Die Fläche erreicht bei $u_e = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ LE ihren Maximalwert $A_e = 12\sqrt{3} \approx 20{,}78$ FE

b)

3) Reduktion auf 1 Variable:

U(u) ist der Umfang des Rechtecks.

$U(u) = 4u + 2\ f(u) = 4u + 2(9-u^2) = 4u + 18 - 2u^2$

$U(u) = -\ 2u^2 + 4u + 18$

4) Ableitungen:

$U'(u) = -\ 4u + 4$

$U''(u) = -\ 4$

5) Definitionsbereich:

Da $f(3) = 0$, gilt:

$D =]0\ ;\ 3[$

6) Lokale Extremwerte $E(u_e \mid A_e)$: $A'(u_e) = 0$:

$-4u_e + 4 = 0$

$u_e = 1$

$U''(1) = -4 < 0$

also: relatives Minimum bei $u_e = 1$

$U(1) = -\ 2\cdot1^2 + 4\cdot1 + 18 = 20$

7) Randwertuntersuchung:

$U(0) = -\ 2\cdot0^2 + 4\cdot0 + 18 = 18$

$U(3) = -\ 2\cdot3^2 + 4\cdot3 + 18 = 12$

8) Ergebnis:

Der Umfang erreicht bei $u_e = 1$ LE seinen Maximalwert $U_e = 20$ LE

Aufgabe 9)
a)
3) Reduktion auf 1 Variable:
u(x) ist der Umfang des Rechtecks.

$$u(x) = 4x + 2f(x) = 4x + 2 \cdot (6 - \frac{1}{4}x^2) = 4x + 12 - \frac{1}{2}x^2$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 12$$

4) Ableitungen:
$u'(x) = - x + 4$
$u''(x) = -1$

5) Definitionsbereich:
$D = [0 ;\ \ 2\sqrt{6}\,]$

6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid u_e)$: $u'(x_e) = 0$:
$-x_e + 4 = 0$
$x_e = 4$
$u''(4) = -1 < 0$
also: relatives Maximum bei $x_e = 4$

$$u(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 12 = 20$$

7) Randwertuntersuchung:

$$u(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 12 = 12$$

$$u(2\sqrt{6}) = -\frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{6})^2 + 4 \cdot (2\sqrt{6}) + 12 = -\frac{1}{2} \cdot 24 + 8\sqrt{6} + 12 = 8\sqrt{6} \approx 19{,}6$$

8) Ergebnis:
Der Umfang erreicht bei $x_e = 4$ LE seinen Maximalwert $u_e = 20$ LE

b)

3) Reduktion auf 1 Variable:

A(x) ist die Fläche des Rechtecks.

$$A(x) = 2x \cdot f(x) = 2x \cdot (6 - \frac{1}{4}x^2) = 12x - \frac{1}{2}x^3$$

$$A(x) = 12x - \frac{1}{2}x^3$$

4) Ableitungen:

$$A'(x) = 12 - \frac{3}{2}x^2$$

$$A''(x) = -3x$$

5) Definitionsbereich:

D = [0 ; $2\sqrt{6}$]

6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid A_e)$: $A'(x_e) = 0$:

$$12 - \frac{3}{2}x_e^2 = 0$$

$$\frac{3}{2}x_e^2 = 12 \Longrightarrow x_e^2 = 8$$

$x_{e1} = 2\sqrt{2}$

$x_{e2} = -2\sqrt{2} \notin D$

$A''(2\sqrt{2}) = -3 \cdot 2\sqrt{2} < 0$

also: relatives Maximum bei $x_{e1} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$

$$A(2\sqrt{2}) = 12 \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^3 = 24\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \approx 22{,}63$$

7) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 12 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0^3 = 0$$

$$A(2\sqrt{6}) = 12 \cdot 2\sqrt{6} - \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{6})^3 = 24\sqrt{6} - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sqrt{6} = 0$$

8) Ergebnis:

Die Fläche erreicht bei $x_e = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$ LE ihren Maximalwert $A_e = 16\sqrt{2} \approx 22{,}63$ FE

Aufgabe 10)

a) Zielfunktion:

$A(x, z) = 2x \cdot z$

b) Nebenbedingung:

$400 = 2z + 2\pi x$

$200 = z + \pi x$

$z = 200 - \pi x$

c) Reduktion auf 1 Variable:

$A(x) = 2x\,(200 - \pi x) = 400x - 2\pi x^2$

d) Ableitungen:

$A'(x) = 400 - 4\pi x$

$A''(x) = -4\pi$

e) Definitionsbereich: $D = [0\,;\, \frac{200}{\pi}]$

f) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid A_e)$:

$A'(x_e) = 0$:

$0 = 400 - 4\pi\, x_e$

$x_e = 100/\pi \approx 31{,}83$

$x_e \in D$

$A(\frac{100}{\pi}) = 400 \cdot \frac{100}{\pi} - 2\pi \frac{10000}{\pi^2} = \frac{20000}{\pi} \approx 6366{,}2$

g) Randwertuntersuchung:

$A(0) = 0$ $\qquad$ $A(\frac{200}{\pi}) = 2 \cdot \frac{200}{\pi}(200 - \pi \frac{200}{\pi}) = 0$

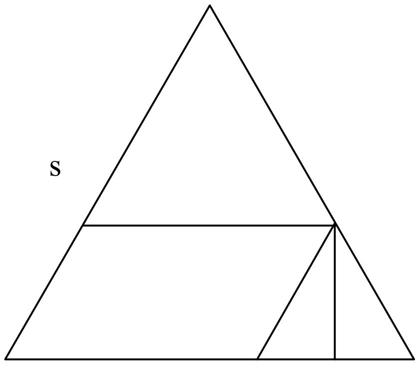
h) Ergebnis:

Die maximale Fläche wird für $x = 100/\pi$ mit $A_e \approx 6366{,}2$ erreicht.

Aufgabe 11)

1) Zielfunktion:

A(x) = x · h



2) Nebenbedingungen:

$$h = \frac{s-x}{2}\sqrt{3}$$

3) Reduktion auf eine Variable:

$$A(x) = x\frac{s-x}{2}\sqrt{3} = x\frac{s\sqrt{3}}{2} - x^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A(x) = x\frac{s\sqrt{3}}{2} - x^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) Ableitungen:

$$A'(x) = \frac{s\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}$$

$$A''(x) = -\sqrt{3}$$

5) Definitionsbereich:

D =[0, s]

6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid A_e)$: $A'(x_e) = 0$:

$$0 = \frac{s\sqrt{3}}{2} - x_e\sqrt{3}$$

$$\frac{s\sqrt{3}}{2} = x_e\sqrt{3}$$

$$x_e = \frac{s}{2}$$

$$A''(\frac{s}{2}) = -\sqrt{3} < 0$$

also: relatives Maximum bei $x_e = \frac{s}{2}$.

$$A(\frac{s}{2}) = \frac{s}{2}\frac{s\sqrt{3}}{2} - (\frac{s}{2})^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{s^2\sqrt{3}}{4} - \frac{s^2\sqrt{3}}{8} = \frac{s^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7^2\sqrt{3}}{8} = \frac{49\sqrt{3}}{8} \approx 10{,}6 \text{ FE}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 0\cdot\frac{s\sqrt{3}}{2} - 0\cdot^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$A(s) = s\frac{s\sqrt{3}}{2} - s^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

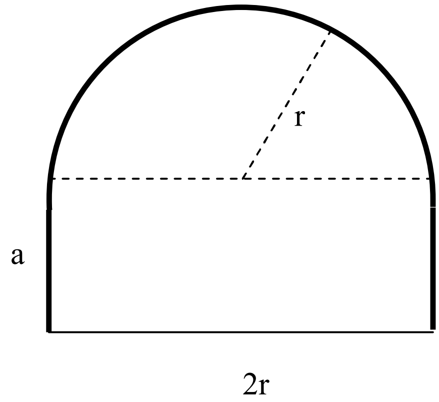
8) Ergebnis (für s = 7)

Für $x_e = s/2 = 3{,}5$ und $h_e = \frac{s}{4}\sqrt{3} = \frac{7}{4}\sqrt{3} \approx 3{,}03$ LE erreicht die Fläche des Parallelogramms ihr absolutes Maximum von $A_e = \frac{s^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7^2\sqrt{3}}{8} = \frac{49\sqrt{3}}{8} \approx 10{,}6$ FE

Aufgabe 12)

1) Zielfunktion:

$U(r,a) = \pi r + 2a$



2) Nebenbedingung:

$$32 = \frac{\pi r^2}{2} + 2ra$$

$$2ra = 32 - \frac{\pi r^2}{2}, \text{ also}$$

$$a = \frac{32}{2r} - \frac{\pi r}{4}$$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$$U(r) = \pi r + 2\left(\frac{32}{2r} - \frac{\pi r}{4}\right) = \pi r + \frac{32}{r} - \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} r + \frac{32}{r}$$

$$U(r) = \frac{\pi}{2} r + \frac{32}{r}$$

4) Ableitungen:

$$U'(r) = \frac{\pi}{2} - \frac{32}{r^2}$$

$$U''(r) = \frac{64}{r^2} > 0$$

5) Definitionsbereich: r>0 und a $\geq$ 0

Wenn r maximal wird, muß a gleich 0 werden:

$$\frac{\pi r^2}{2} = 32 \quad ==> \quad r = \sqrt{\frac{64}{\pi}} \approx 4{,}51$$

D =] 0 ; $\sqrt{\frac{64}{\pi}}$]

6) Lokale Extremwerte E(r_e | U_e): U'(r_e) = 0:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{32}{r_e^2} = 0 \;|\cdot\; r_e^2$$

$$\frac{\pi}{2} r_e^2 - 32 = 0 \quad <==> \quad \frac{\pi}{2} r_e^2 = 32 \quad <==> \quad r_e^2 = \frac{64}{\pi}$$

$r_{e1} = \sqrt{\frac{64}{\pi}} \approx 4{,}51$ (Randpunkt)

$r_{e2} = -\sqrt{\frac{64}{\pi}} \notin D$

Es gilt $U''(r) = \frac{64}{r^2} > 0$

also: relatives Minimum bei $r_{e1} = \sqrt{\frac{64}{\pi}} \approx 4{,}51$

$$U\left(\sqrt{\frac{64}{\pi}}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{64}{\pi}} + \frac{32}{\sqrt{\frac{64}{\pi}}} = 4\sqrt{\pi} + 4\sqrt{\pi} = 8\sqrt{\pi}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$\lim_{r->0} U(r) = \lim_{r->0}\left(\frac{\pi}{2} r + \frac{32}{r}\right) \text{--> 00}$$

$$U\left(\sqrt{\frac{64}{\pi}}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{64}{\pi}} + \frac{32}{\sqrt{\frac{64}{\pi}}} = 4\sqrt{\pi} + 4\sqrt{\pi} = 8\sqrt{\pi}$$

8) Ergebnis:

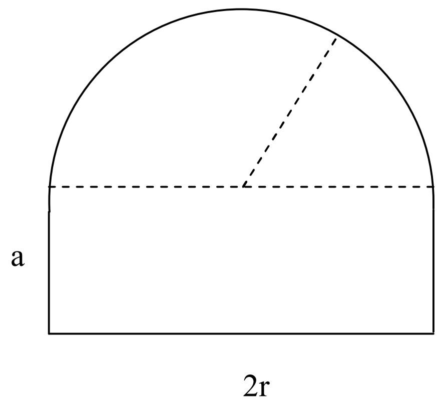
Der Eisenbahntunnel erreicht bei $r_e = \sqrt{\frac{64}{\pi}} \approx 4{,}51$ LE seinen minimalen Umfang von

$U_e = 8\sqrt{\pi} \approx 14{,}18$ LE

Aufgabe 13)

1) Zielfunktion:

$$U(r,a) = \pi r + 2a + 2r = r(\pi+2) + 2a$$
$$U(r,a) = r(\pi+2) + 2a$$



2) Nebenbedingung:

$$3 = \frac{\pi r^2}{2} + 2ra$$

$2ra = 3 - \dfrac{\pi r^2}{2}$, also

$$a = \frac{3}{2r} - \frac{\pi r}{4}$$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$$U(r) = r(\pi+2) + 2\left(\frac{3}{2r} - \frac{\pi r}{4}\right) = r(\pi+2) + \frac{3}{r} - \frac{\pi r}{2} = r(\pi + 2 - \frac{\pi}{2}) + \frac{3}{r} = r(\frac{\pi}{2} + 2) + \frac{3}{r}$$

$$U(r) = r(\frac{\pi}{2} + 2) + \frac{3}{r}$$

4) Ableitungen:

$$U'(r) = \frac{\pi}{2} + 2 - \frac{3}{r^2}$$

$$U''(r) = \frac{6}{r^3}$$

5) Definitionsbereich:

Wenn r maximal wird, muß a gleich 0 werden:

$$\frac{\pi r^2}{2} = 3 \quad ==> \quad r = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \approx 1{,}38$$

$$D =]\,0\,;\ \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,]$$

6) Lokale Extremwerte $E(r_e \mid U_e)$: $U'(r_e) = 0$:

$$\frac{\pi}{2} + 2 - \frac{3}{r_e^2} = 0$$

$$\frac{3}{r_e^2} = \frac{\pi}{2} + 2 \quad ==> \quad r_e^2 = \frac{3}{\frac{\pi}{2} + 2} \quad ==> \quad r_e^2 = \frac{6}{\pi + 4}$$

$$r_{e1} = \sqrt{\frac{6}{\pi+4}} \approx 0{,}92$$

$$r_{e2} = -\sqrt{\frac{6}{\pi+4}} \quad \notin D$$

$$U''\left(\frac{6}{\pi+4}\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{\pi+4}\right)^3} > 0$$

also: relatives Minimum bei $r_{e1} = \sqrt{\frac{6}{\pi+4}} \approx 0{,}92$

$$U\left(\sqrt{\frac{6}{\pi+4}}\right) = \sqrt{\frac{6}{\pi+4}}\left(\frac{\pi}{2}+2\right) + \frac{3}{\sqrt{\frac{6}{\pi+4}}} = \sqrt{\frac{6}{\pi+4}} \cdot \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{\frac{6}{\pi+4}} + \sqrt{\frac{3(\pi+4)}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{6\cdot\pi^2}{(\pi+4)\cdot 4}} + 2\sqrt{\frac{6}{\pi+4}} + \sqrt{\frac{3(\pi+4)}{2}} = \sqrt{\frac{3\pi^2}{2(\pi+4)}} + 2\sqrt{\frac{6}{\pi+4}} + \sqrt{\frac{3(\pi+4)}{2}} \approx 6{,}57$$

7) Randwertuntersuchung:

$$\lim_{r->0} U(r) = \lim_{r->0} r\left(\frac{\pi}{2}+2\right) + \frac{3}{r} \text{ --> } 00$$

$$U\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right) = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}+2\right) + \frac{3}{\sqrt{\frac{6}{\pi}}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{3}{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}} = \sqrt{\frac{6\cdot\pi^2}{\pi\cdot 4}} + \sqrt{\frac{4\cdot 6}{\pi}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{\frac{6}{\pi}}} =$$

$$\sqrt{\frac{3\pi}{2}} + \sqrt{\frac{24}{\pi}} + \sqrt{\frac{9}{\frac{6}{\pi}}} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} + \sqrt{\frac{24}{\pi}} + \sqrt{\frac{9\pi}{6}} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} + \sqrt{\frac{24}{\pi}} + \sqrt{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$2\sqrt{\frac{3\pi}{2}} + \sqrt{\frac{24}{\pi}} = \sqrt{6\pi} + \sqrt{\frac{24}{\pi}} \approx 7{,}11$$

8) Ergebnis:

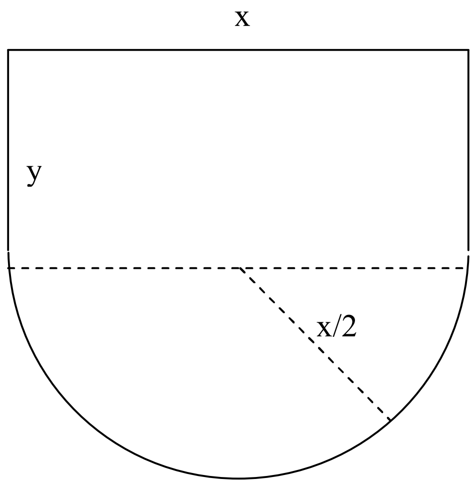
Der Abwasserkanal erreicht bei $r_e = \sqrt{\frac{6}{\pi+4}} \approx 0{,}84$ LE seinen minimalen Umfang von

$U_e = \sqrt{\frac{3\pi^2}{2(\pi+4)}} + 2\sqrt{\frac{6}{\pi+4}} + \sqrt{\frac{3(\pi+4)}{2}} \approx 6{,}57$ LE

Aufgabe 14)

1) Zielfunktion:

Fläche des Rechtecks: x · y



Fläche des Halbkreises: $\dfrac{\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{\pi x^2}{8}$

also:

$$A(x, y) = x \cdot y + \frac{\pi x^2}{8}$$

2) Nebenbedingung:

$\dfrac{\pi x}{2} + 2y = s$, also

$$y = \frac{s}{2} - \frac{\pi x}{4}$$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$A(x) = x \cdot (\dfrac{s}{2} - \dfrac{\pi x}{4}) + \dfrac{\pi x^2}{8} = \dfrac{s}{2} \cdot x - \dfrac{\pi x^2}{4} + \dfrac{\pi x^2}{8}$, also:

$$A(x) = \frac{s}{2} \cdot x - \frac{\pi x^2}{8}$$

4) Ableitungen:

$$A'(x) = \frac{s}{2} - \frac{\pi x}{4}$$

$$A''(x) = -\frac{\pi}{4}$$

5) Definitionsbereich:

x kann maximal so groß werden, bis y gleich 0 wird, also: $s = \dfrac{\pi x}{2}$, also: $x = \dfrac{2s}{\pi}$

D = [0 ; $\dfrac{2s}{\pi}$]

6) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid V_e)$: $A'(x_e) = 0$:

$$\frac{s}{2} - \frac{\pi x_e}{4} = 0$$

$$x_e = \frac{2s}{\pi}$$

$$A''(\frac{2s}{\pi}) = -\frac{\pi}{4} < 0$$

also: relatives Maximum bei $x_e = \dfrac{2s}{\pi}$.

$$A(\frac{2s}{\pi}) = \frac{s}{2} \cdot \frac{2s}{\pi} - \frac{\pi \cdot (\frac{2s}{\pi})^2}{8} = \frac{s^2}{\pi} - \frac{s^2}{2\pi} = \frac{s^2}{2\pi}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = \frac{s}{2} \cdot 0 - \frac{\pi \cdot 0^2}{8} = 0$$

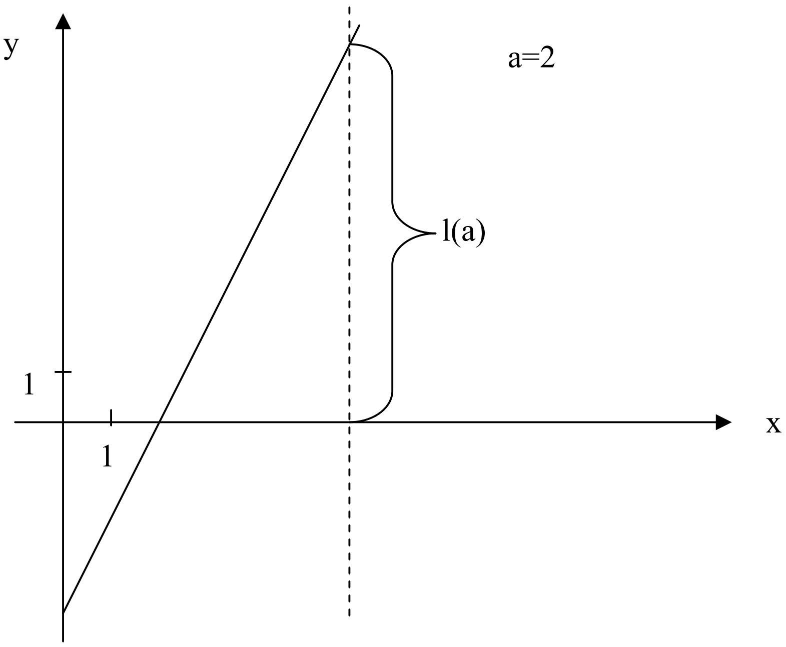
$$A(\frac{2s}{\pi}) = \frac{s}{2} \cdot \frac{2s}{\pi} - \frac{\pi \cdot (\frac{2s}{\pi})^2}{8} = \frac{s^2}{\pi} - \frac{s^2}{2\pi} = \frac{s^2}{2\pi}$$

8) Ergebnis (für s = 40)
Für s = 40 gilt:

$\frac{40^2}{2\pi} > \frac{2 \cdot 40}{2\pi}$, also:

Für $x_e = \frac{80}{2\pi} = \frac{40}{\pi} \approx 12{,}73$ LE und $y_e = 0$ LE wird die Querschnittsfläche $A_e = \frac{40^2}{2\pi} = \frac{800}{\pi} \approx 254{,}66$ FE maximal.

Aufgabe 15)
a)



3) Reduktion auf eine Variable:
$l(a) = y(6) = a \cdot 6 - a^2$
$l(a) = a \cdot 6 - a^2$

Die Nullstellen dieser nach unten geöffneten Normalparabel sind 0 und 6.
Also liegt der Scheitel (= relatives und absolutes Maximum) bei $a_e = 3$
$l(3) = 3 \cdot 6 - 3^2 = 9$

5) Definitionsbereich:
D =]0 ; 6[

8) Ergebnis
Die Länge des abgeschnittenen Stücks erreicht bei $a_e = 3$ LE sein absolutes Maximum von $A_e = 9$ LE

b)

1) Zielfunktion:

Die x-Koordinate des Schnittpunkts der Geraden mit der x-Achse sei x_S

$$A(x_S, a) = \frac{(6 - x_S) \cdot y(6)}{2} = \frac{(6 - x_S) \cdot (6a - a^2)}{2}$$

2) Nebenbedingungen:

Es gilt (nachprüfen!):

Die x-Koordinate des Schnittpunkts der Geraden mit der x-Achse ist $x_S = a$

3) Reduktion auf eine Variable:

$$A(a) = \frac{(6 - a) \cdot (6a - a^2)}{2} = \frac{(6 - a) \cdot a \cdot 6 - a)}{2} = \frac{a(6 - a)^2}{2} = \frac{36a - 12a^2 + a^3}{2}$$

$$A(a) = \frac{a^3}{2} - 6a^2 + 18a$$

4) Ableitungen:

$$A'(a) = \frac{3}{2}a^2 - 12a + 18$$

$$A''(a) = 3a - 12$$

5) Definitionsbereich:

D =]0 ; 6]

6) Lokale Extremwerte : $E(a_e \mid V_e)$: $V'(a_e) = 0$:

$$\frac{3}{2}a_e^2 - 12a_e + 18 = 0$$

$$3a_e^2 - 24a_e + 36 = 0$$

$$a_{e1/2} = \frac{24 \mp \sqrt{576 - 4 \cdot 3 \cdot 18}}{6} = \frac{24 \mp \sqrt{360}}{6} = \frac{24 \mp 6\sqrt{10}}{6} = 4 \pm \sqrt{10}$$

$$a_{e1} == 4 + \sqrt{10}$$

$$a_{e2} == 4 - \sqrt{10}$$

$$A''(4 + \sqrt{10}) = 3(4 + \sqrt{10}) - 12 = 12 + 3\sqrt{10} - 12 = 3\sqrt{10} > 0$$

also: relatives Minimum bei $a_{e1} == 4 + \sqrt{10}$

$$A''(4 - \sqrt{10}) = 3(4 - \sqrt{10}) - 12 = 12 - 3\sqrt{10} - 12 = 3 - \sqrt{10} < 0$$

also: relatives Minimum bei $a_{e2} == 4 - \sqrt{10}$

$$A(4 - \sqrt{10}) = \frac{(4 - \sqrt{10})^3}{2} - 6(4 - \sqrt{10})^2 + 18(4 - \sqrt{10}) = 8 + \sqrt{10}$$

7) Randwertuntersuchung:

$$\lim_{a->0} A(a) = \lim_{a->0}(\frac{a^3}{2} - 6 \cdot a^2 + 18 \cdot a) = \frac{0^3}{2} - 6 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{a->6} A(a) = \lim_{a->6}(\frac{6^3}{2} - 6 \cdot 6^2 + 18 \cdot 6) = \frac{6^3}{2} - 6 \cdot 6^2 + 18 \cdot 6 = 0$$

8) Ergebnis

Die Fläche des Dreiecks erreicht bei $a_e = 4 - \sqrt{10} \approx 0{,}84$ LE sein absolutes Maximum von $A_e = 8 + \sqrt{10} \approx 11{,}16$ FE