1 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

1)

Das folgende Schaubild zeigt den Verlauf der zweiten Ableitungsfunktion h'' einer Funktion für $-3 \leq x \leq 6$

Entscheiden Sie in diesem Intervall für jeden der folgenden Sätze, ob er richtig oder falsch ist und begründen Sie Ihre Antwort.

a) Der Graph K_h hat an der Stelle x = 0 einen Wendepunkt.

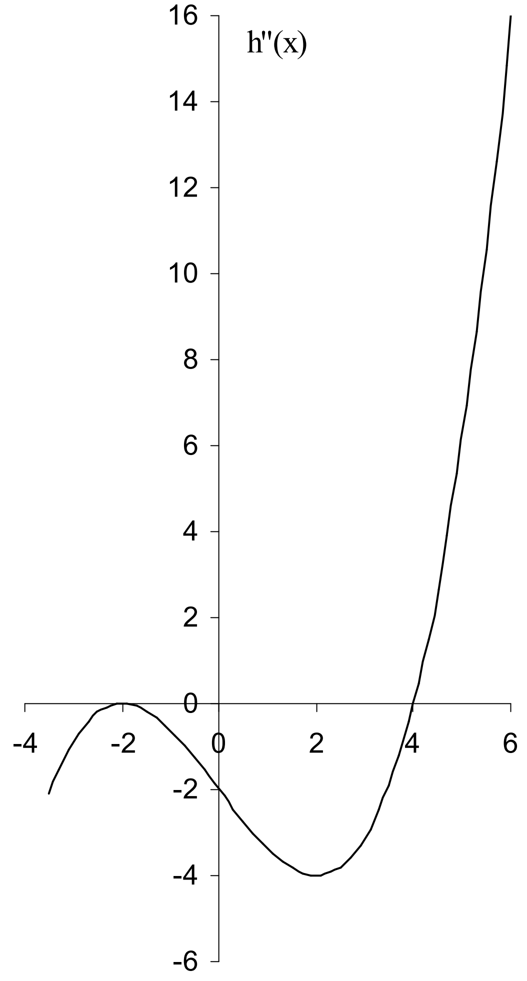
b) Der Graph K_h ändert in dem angegebenen Intervall genau einmal sein Krümmungsverhalten.

c) Der Graph von h' hat im Intervall von $2 \leq x \leq 5$ einen Hochpunkt.

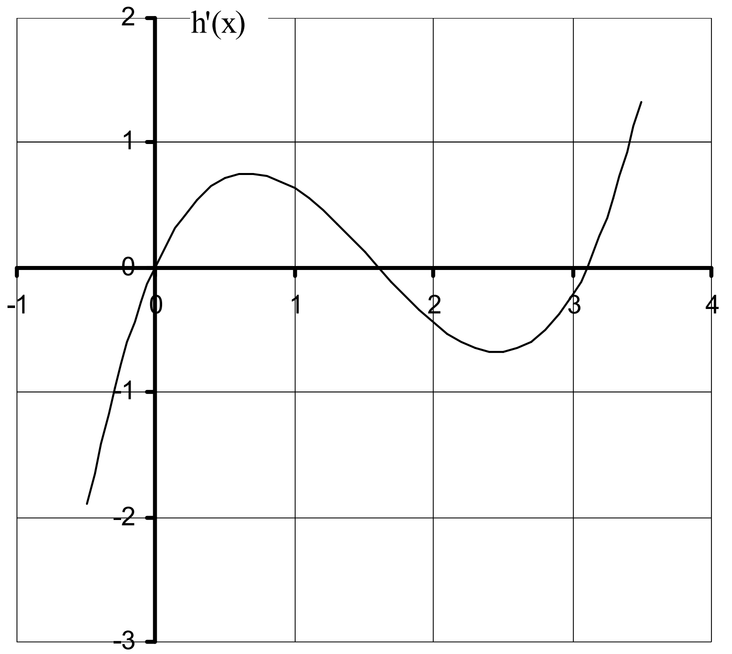
d) Der Graph von h' ist im Intervall von $4 \leq x \leq 6$ streng monoton steigend.

e) Geben Sie eine Funktionsgleichung von h'' an, deren Kurve mit dem Schaubild unten möglichst genau übereinstimmt.

f) Geben Sie eine Funktionsgleichung der Funktion h an, deren 2. Ableitung mit dem Schaubild unten möglichst genau übereinstimmt.



2)



Das obige Bild zeigt das Schaubild $K_{h'}$ derAbleitungsfunktion h' einer Funktion h.
Gib an ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch oder nicht entscheidbar sind.
Begründe alle Antworten jeweils in einem Satz.

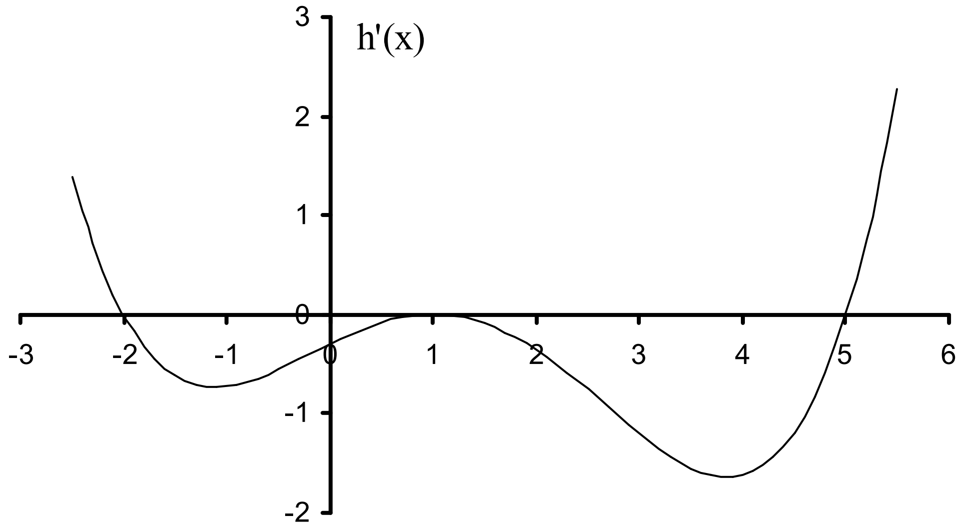
a) Im Intervall [2 ; 3] ist h monoton fallend.

b) An der Stelle x = 0 hat das Schaubild von h eine Nullstelle.

c) An der Stelle x_1 mit $1 < x_1 < 2$, an der $K_{h'}$ die x-Achse schneidet, hat das Schaubild von h einen Hochpunkt.

d) Der Funktionswert an der Stelle 0 ist kleiner als der Funktionswert an der Stelle 1, also $h(0) < h(1)$.

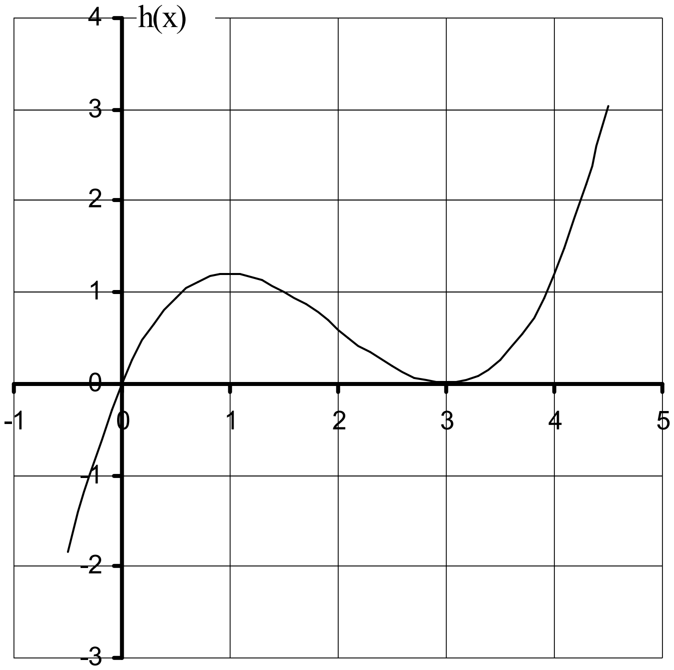
3)



Das obige Bild zeigt das Schaubild $K_{h'}$ derAbleitungsfunktion h' einer Funktion h.
Gib an ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch oder nicht entscheidbar sind.
Begründe alle Antworten.

a) h ist für x > 5 streng monoton wachsend.
b) h hat im Intervall [-2,5 ; 5,5] genau 3 Extremstellen.
c) h besitzt mindestens 3 Wendepunkte.
d) Es gilt $h(5) < h(4)$
e) h hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.
f) Es gilt $h''(-2,5) > 0$

4)



Das obige Bild zeigt einen Ausschnitt des Schaubildes der Funktion h.

Begründe, warum folgende Aussagen wahr sind.

a) $\int_1^2 h(x)dx < 2$

b) Jede Stammfunktion F von h ist im Intervall [1 ; 2] streng monoton steigend

c) Jede Stammfunktion F von h hat im gezeichneten Bereich ein Minimum

5)

Geben Sie eine Polynomfunktion 5. ten Grades an, die genau 3 Nullstellen hat.

Lösung:
1)
a) $h''(0) \neq 0$ (siehe Zeichnung) ==> K_h hat an der Stelle x = 0 keinen WP.
b) h'' macht genau an der der Stelle x = 4 einen VZW (Vorzeichenwechsel) von - nach + und geht (von links kommend) damit genau einmal von einer Rechtskurve in eine Linkskurve über und ändert damit genau einmal sein Krümmungsverhalten.
c) h'' macht in diesem Intervall keinen VZW von + nach - und hat damit in diesem Intervall keinen HP.
d) h'' ist in diesem Intervall immer > 0. Damit ist h' in diesem Intervall streng monoton steigend.
e)
$h''(x) = a(x+2)^2 (x-4) = a(x^2 + 4x + 4)(x - 4) = a(x^3 + 4x^2 + 4x - 4x^2 - 16x - 16) =$
$a(x^3 - 12x - 16) = ax^3 - 12ax - 16a$
$//h'''(x) = 3ax^2 - 12a$
Aus Zeichnung ablesen:
$h''(2) = -4$, also:
$-4 = a \cdot 2^3 - 12a \cdot 2 - 16a = -32a$
$a = 1/8$
// oder alernativ:
// $h''(0) = -2$, also:
// $-2 = a \cdot 0^3 - 12a \cdot 0 - 16a = -16a$
// $a = 1/8$

also:

$$h''(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{3}{2}x - 2$$

$$h'(x) = \frac{x^4}{32} - \frac{3}{4}x^2 - 2x$$

$$h(x) = \frac{x^5}{160} - \frac{x^3}{4} - x^2$$

2)
a) Ja, da h' in diesem Intervall negativ ist.
b) Nicht entscheidbar. Man kann nur sagen, daß h dort die Steigung 0 hat.
c) Ja, denn $h'(x_1) = 0$ und h' macht an x_1 einen VZW von plus nach minus.
d) Ja, da h' im Intervall [0 ; 1] größer 0 ist, ist dort h streng nonoton wachsend und damit $h(0) < h(1)$.

3)
a) Nicht entscheidbar, da man den Verlauf der Kurve von h' dort nicht kennt.
b) Nein. Es gibt zwar 3 Stellen an denen der Wert von h' Null wird. Also kann es zwar maximal 3 Extremstellen geben. Doch an der Stelle x = 1 macht h' keinen VZW, also gibt es dort keine Extremstelle. Also gibt es genau 2 Extremstellen.
c) Nein. Es gibt genau 2 Stellen an denen $h''(x) = 0$ wird und $h''(x)$ einen VZW macht. Also gibt es genau 2 Wendepunkte.

d) ja, da h' im Intervall [4 ; 5] kleiner Nul ist, ist h dort streng monoton fallend, also $h(5) < h(4)$

e) Nicht entscheidbar. Man kann nur behaupten, daß h dort eine negative Steigung hat.

f) Nein, da die Steigung von h' an der Stelle x = - 2,5 laut Zeichnung negativ ist.

4)

a) Ja: Wie man sieht ist $h(x)$ zwischen 1 und 2 kleiner als 2. Also ist die Fläche kleiner als die Fläche der 2 Kästchen (und die beträgt 2).

b) Ja, da h' im Intervall $[1 ; 2]$ größer 0 ist.

c) Ja. Da F an $x = 0$ eine waagrechte Tangente hat und dort einen VZW von - nach + macht. Da F an $x = 3$ eine waagrechte Tangente hat und dort keinen VZW macht, hat es dort auch keinen TP (und auch keinen HP).

5)

$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1)$

2 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

1) Eine Parabel 3. Ordnung mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ berührt in O(0|0) die x-Achse. Die Tangente in P(-3 | 0) ist parallel zu der Gerade mit der Funktionsgleichung $g(x) = 6x$.Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

2) Eine Parabel 3. Ordnung hat in P(1 | 4) eine waagrechte Tangente und in Q(0 | 2) einen Wendepunkt.Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

3) Eine Parabel 3. Ordnung geht durch P(0 | -5) und Q(1 | 0) und berührt in R(5 | 0) die x-Achse. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

4) Eine Parabel 3. Ordnung geht durch O(0 | 0) und hat ihren Wendepunkt in P(1 | -2). Die Wendetangente schneidet die x-Achse in Q(2 | 0). Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

5) Eine Parabel 3. Ordnung hat die selben Achsenschnittpunkte wie die Parabel mit der Funktionsgleichnung $p(x) = 2x-0{,}5x^3$. Beide Parabeln stehen in O(0 | 0) senkrecht aufeinander. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

6) Eine bzgl. der y-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung hat in P(2 | 0) eine Wendetangente mit der Steigung -4/3. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

7) Eine bzgl. der y-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung geht durch P(0 | -4) und hat in Q(-4 | 0) eine waagrechte Tangente. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

8) Eine Parabel 4. Ordnung hat im Wendepunkt O(0 | 0) und für x = 6 waagrechte Tangenten. Sie schneidet die x-Achse ein zweites Mal mit der Steigung -8.Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

9) Eine Parabel 4. Ordnung hat in O(0 | 0) eine waagrechte Tangente und in P(-2 | 2) einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

10) Eine bzgl. O(0 | 0) punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in P(-1 | 1) eine Wendetangente mit der Steigung 3. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

11) Eine bzgl. O(0 | 0) punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in O(0 | 0) die Tangente mit der Funktionsgleichung $t(x) = 7x$ und in P(1 | 0) einen Wendepunkt. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

12) Zeige: Die Parabel mit der Funktionsgleichnung $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx$ $(a, b, c > 0)$ besitzt 3 Wendepunkte , die auf einer Ursprungsgeraden liegen.

13) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung O(0|0) und besitzt den Wendepunkt W(1|-2). Die Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt S(3|0). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

14) Die ganzrationale Funktion 4. Grades besitzt die 3 Extremstellen 0, 2, 4 sowie die Nullstelle 1. Der Funktionswert an der Stelle 0 ist -9/4. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

Lösungen:
1)
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

a) O(0 | 0) ∈ K_f
$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$
$d = 0$

b) berührt in O(0 | 0) die x-Achse
f '(0) = 0
$3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$
$c = 0$

c) da c = 0 und d = 0 folgt:
$f(x) = ax^3 + bx^2$

d) P(-3 | 0) ∈ K_f
$0 = a \cdot (-3)^3 + b \cdot (-3)^2$
$0 = -27a + 9b \quad |:9$
$0 = -3a + b \quad (G1)$

e) g hat die Steigung 6
f '(-3) = 6
$3a \cdot (-3)^2 + 2b \cdot (-3) = 0$
$6 = 27a - 6b \quad |:3$
$2 = 9a - 2b \quad (G2)$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1) und (G2):
$a = \frac{2}{3},\ b = 2$

g) Ergebnis:
$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

Probe:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$$

$$f'(x) = 2x^2 + 4x$$

$$f''(x) = 4x + 4$$

a) O(0 | 0) $\in$ K_f

$$0 = \frac{2}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2$$

$$0 = 0 \quad (wahr)$$

b) berührt in O(0 | 0) die x-Achse

$$f'(0) = 0$$

$$2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \quad (wahr)$$

c) P(-3 | 0) $\in$ K_f

$$0 = \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2$$

$$0 = -18 + 18 = 0 \quad (wahr)$$

d) g hat die Steigung 6

f '(-3) = 6

$$2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) = 6$$

$$18 - 12 = 6 \quad (wahr)$$

2)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

a) P(1 | 4) $\in K_f$

$4 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$

$4 = a + b + c + d \quad (G1)$

b) P(1 | 4) hat eine waagrechte Tangente

f '(1) = 0

$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0$

$3a + 2b + c = 0 \quad (G2)$

c) Q(0 | 2) $\in K_f$

$2 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$

$d = 2$

d) Q(0 | 2) ist Wendepunkt

f ''(0) = 0

$6a \cdot 0 + 2b = 0$

$b = 0$

e) d = 2 und b = 0 eingesetzt in (G1) und (G2) ergibt:

$4 = a + c + 2$

$2 = a + c \qquad (G3)$

$3a + c = 0 \qquad (G4)$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G3) und (G4):

a = -1, c = 3

g) Ergebnis:

$f(x) = -x^3 + 3x + 2$

Probe:

$f(x) = -x^3 + 3x + 2$

$f'(x) = -3x^2 + 3$

$f''(x) = -6x$

a) P(1 | 4) $\in$ K_f

$4 = -1^3 + 3 \cdot 1 + 2$

$4 = 4 \quad (wahr)$

b) P(1 | 4) hat eine waagrechte Tangente

$f'(1) = 0$

$-3 \cdot 1^2 + 3 = 0$

$0 = 0 \quad (wahr)$

c) Q(0 | 2) $\in$ K_f

$2 = -0^3 + 3 \cdot 0 + 2$

$2 = 2 \quad (wahr)$

d) Q(0 | 2) ist Wendepunkt

$f''(0) = 0$

$-6 \cdot 0 = 0$

$0 = 0 \quad (wahr)$

3)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

a) P(0 | -5) $\in$ K_f

$-5 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$

$d = -5$

b) Q(1 | 0) $\in$ K_f

$0 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$

$0 = a + b + c + d \quad (G1)$

c) R(5 | 0) $\in$ K_f

$0 = a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d$

$0 = 125a + 25b + 5c + d \quad (G2)$

d) R(5 | 0) berührt die x-Achse

f '(5) = 0

$3a \cdot 5^2 + 2b \cdot 5 + c = 0$

$75a + 10b + c = 0 \quad (G3)$

e) d = -5 eingesetzt in (G1) und (G2) ergibt:

$0 = a + b + c - 5 \qquad (G4)$

$0 = 125a + 25b + 5c - 5 \qquad (G5)$

$75a + 10b + c = 0 \qquad (G3)$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G3), (G4) und (G5):

$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{11}{5},\ c = 7$

g) Ergebnis:

$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{11}{5}x^2 + 7x - 5$

4)
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

a) O(0 | 0) $\in K_f$
$$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$
$$d = 0$$

b) P(1 | -2) $\in K_f$
$$-2 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$$
$$-2 = a + b + c + d \quad (G1)$$

c) P(1 | -2) ist Wendepunkt
f "(1) = 0
$$6a \cdot 1 + 2b = 0$$
$$6a + 2b = 0$$
$$3a + b = 0 \quad (G2)$$

d) Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt Q(2 | 0)
Steigung m der Wendetangente (durch P(1 | -2) und Q(2 | 0))
$$m = \frac{-2-0}{1-2} = 2 \quad \text{(Steigungsdreieck)}$$
andererseits:
$$2 = m = f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c$$
$$2 = 3a + 2b + c \quad (G3)$$

e) d = 0 eingesetzt in (G1) ergibt:
$$-2 = a + b + c \quad (G4)$$

$$3a + b = 0 \qquad (G2)$$
$$2 = 3a + 2b + c \quad (G3)$$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G2), (G3) und (G4):
$$a = -4,\ b = 12,\ c = -10$$

g) Ergebnis:
$$f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 10x$$

5)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\qquad p(x) = 2x - \frac{1}{2} \cdot x^3$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$ $\qquad p'(x) = 2 - \frac{3}{2} \cdot x^2$

a) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ von K_p mit der x-Achse

$S_x(x_s \mid 0) \in K_p$

$0 = 2x_S - \frac{1}{2}x_S^3 \Leftrightarrow 0 = x_S(2 - \frac{1}{2}x_S^2)$

Fall 1:

$x_S = 0$, also:

$x_{S1} = 0$

Fall 2:

$2 - \frac{1}{2}x_S^2 = 0$

$x_S^2 = 4$

$x_{S1} = -2$

$x_{S2} = 2$

damit:

$S_{x1}(0 \mid 0)$

$S_{x2}(-2 \mid 0)$

$S_{x3}(2 \mid 0)$

Da K_p die gleichen Achsenschnittpunkte hat wie K_f gilt:

b) $S_{x1}(0 \mid 0) \in K_f$

$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$

$d = 0$

c) $S_{x2}(-2 \mid 0) \in K_f$

$0 = a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d$

$0 = -8a + 4b - 2c + d \quad (G1)$

d) $S_{x3}(2 \mid 0) \in K_f$

$0 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d$

$0 = 8a + 4b + 2c + d \quad (G2)$

e) d = 0 eingesetzt in (G1) und (G2) ergibt:

$0 = -8a + 4b - 2c \quad (G3)$

$0 = 8a + 4b + 2c \quad (G4)$

f) Parabeln stehen in O(0 | 0) senkrecht aufeinander

f '(0) · p'(0) = -1

$$(3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c) \cdot (2 - \frac{3}{2} \cdot 0^2) = -1$$

$$c \cdot 2 = -1$$

$$c = -\frac{1}{2} \quad (G5)$$

g) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G3), (G4) und (G5):

$$a = \frac{1}{8}, \quad c = -\frac{1}{2},$$

h) Ergebnis:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x$$

6)

a) symmetrisch bzgl. der y-Achse:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

b) P(2 | 0) $\in K_f$

$$0 = a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + c$$

$$0 = 16a + 4b + c \qquad (G1)$$

c) P(2 | 0) ist Wendepunkt

f ''(2) = 0

$$12a \cdot 2^2 + 2b = 0$$

$$48a + 2b = 0$$

$$24a + b = 0 \qquad (G2)$$

d) Wendetangente hat die Steigung -4/3

f '(2) = 0

$$4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 = -\frac{4}{3}$$

$$32a + 4b = -\frac{4}{3}$$

$$24a + 3b = -1 \qquad (G3)$$

e) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$$a = \frac{1}{48},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{5}{3}$$

f) Ergebnis:

$$f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}$$

7)

a) symmetrisch bzgl. der y-Achse:

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$f''(x) = 12ax^2 + 2b$

b) P(0 | -4) $\in$ K_f

$-4 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c$

$c = -4$

c) c = -4 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ergibt:

$f(x) = ax^4 + bx^2 - 4$

d) Q(-4 | 0) $\in$ K_f

$0 = a \cdot (-4)^4 + b \cdot (-4)^2 - 4$

$0 = 256a + 16b - 4$

$0 = 64a + 4b - 1 \quad (G1)$

e) waagrechteTangente in Q(-4 | 0)

f '(-4) = 0

$4a \cdot (-4)^3 + 2b \cdot (-4) = 0$

$-256a - 8b = 0$

$32a + b = 0 \quad (G2)$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2):

$a = -\frac{1}{64}, \; b = \frac{1}{2}$

f) Ergebnis:

$f(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4$

Probe machen!!!!

8)

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

a) O(0 | 0) $\in$ K_f

$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$

$e = 0$

b) e = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ergibt:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$

c) O(0 | 0) ist Wendepunkt

$12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0$

$c = 0$

d) c = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ ergibt:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + dx$

e) In O(0 | 0) waagrechte Tangente

f ' (0) = 0

$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$

$d = 0$

f) d = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + dx$ ergibt:

$f(x) = ax^4 + bx^3$

g) Für x = 6 waagrechte Tangente

f ' (0) = 0

$4a \cdot 6^3 + 3b \cdot 6^2 = 0 \quad | : 6^2$

$24a + 3b = 0$

$8a + b = 0 \quad (G1)$

h) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ von K_f mit der x-Achse

$S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = ax_S^4 + bx_S^3$

$0 = x_S^3(ax_S + b)$

Fall 1:

$x_S = 0$,

$x_{S1} = 0$

1. Schnittpunkt

Fall 2:

$ax_S + b = 0$

$x_S = -\frac{b}{a}$

2. Schnittpunkt

i) Steigung im 2. Schnittpunkt = -8

$$-8 = 4a \cdot (-\frac{b}{a})^3 + 3b \cdot (-\frac{b}{a})^2$$

$$-8 = -4a \cdot \frac{b^3}{a^3} + 3b \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

$$-8 = -4 \cdot \frac{b^3}{a^2} + 3 \cdot \frac{b^3}{a^2} \quad | \cdot a^2$$

$$-8a^2 = -b^3$$

$$b^3 = 8a^2 \quad (G2)$$

j) (G1) nach b auflösen und in (G2) einsetzen

$$(-8a)^3 = 8a^2$$

$$-512a^3 = 8a^2$$

$$-512a^3 - 8a^2 = 0 \quad | : 8$$

$$-64a^3 - a^2 = 0$$

$$a^2(-64a - 1) = 0$$

Fall 1:
$a^2 = 0$,
$a_1 = 0$
nicht möglich, da
Polynom 4. Ordnung

Fall 2:

$$-64a - 1 = 0$$

$$a = -\frac{1}{64}$$

j) a einsetzen in (G1)

$$8 \cdot -\frac{1}{64} + b = 0$$

$$b = \frac{1}{8}$$

k) Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3$$

9)

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

a) O(0 | 0) $\in K_f$

$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$

$e = 0$

b) e = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ergibt:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$

c) O(0 | 0) hat eine waagrechte Tangente
f '(0) = 0

$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$

$d = 0$

d) d = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ ergibt:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$

e) P(-2 | 2) $\in K_f$

$2 = a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2$

$2 = 16a - 8b + 4c$

$1 = 8a - 4b + 2c \quad (G1)$

f) P(-2 | 2) ist Wendepunkt, also f ''(-2) = 0

$12a \cdot (-2)^2 + 6b \cdot (-2) + 2c = 0$

$48a - 12b + 2c = 0$

$24a - 6b + c = 0 \quad (G2)$

g) P(-2 | 2) hat eine waagrechte Tangente
f '(-2) = 0

$4a \cdot (-2)^3 + 3b \cdot (-2)^2 + 2c \cdot (-2) = 0$

$-32a + 12b - 4c = 0$

$-8a + 3b - c = 0 \quad (G3)$

h) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$a = \frac{3}{8},\ b = 2,\ c = 3$

i) Ergebnis:

$f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2$

10)

$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$

$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$

$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$

a) P(-1 | 1) $\in K_f$

$1 = a \cdot (-1)^5 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)$

$1 = -a - b - c \quad (G1)$

b) P(-1 | 1) ist Wendepunkt

f ''(-1) = 0

$20a \cdot (-1)^3 + 6b(-1) = 0$

$-20a - 6b = 0$

$-10a - 3b = 0 \quad (G2)$

c) Wendetangente in P(-1 | 1) hat die Steigung 3

f '(-1) = 3

$5a \cdot (-1)^4 + 3b \cdot (-1)^2 + c = 3$

$5a + 3b + c = 3 \quad (G3)$

d) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$a = -\frac{3}{2},\ b = 5,\ c = -\frac{9}{2}$

e) Ergebnis:

$f(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 5x^3 - \frac{9}{2}x$

11)

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

a) Steigung O(0 | 0) ist 7

f '(0) = 7

$$5a \cdot 0^4 + 3b \cdot 0^2 + c = 7$$

$$c = 7 \quad (G1)$$

b) P(1 | 0) $\in$ K_f

$$0 = a \cdot 1^5 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1$$

$$0 = a + b + c \quad (G2)$$

c) P(1 | 0) ist Wendepunkt

f ''(0) = 0

$$20a \cdot 1^3 + 6b \cdot 1 = 0$$

$$20a + 6b = 0$$

$$10a + 3b = 0 \quad (G3)$$

d) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$a = 3,\ b = -10,\ c = 7$

e) Ergebnis:

$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7$$

12)

$f(x) = ax^5 - bx^3 + cx$

$f'(x) = 5ax^4 - 3bx^2 + c$ $\qquad$ a > 0 $\wedge$ b > 0 $\wedge$ c > 0

$f''(x) = 20ax^3 - 6bx$

$f'''(x) = 60ax^2 - 6b$

a) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$20ax_w^{\,3} - 6bx_w = 0$

$10ax_w^{\,3} - 3bx_w = 0$

$x_w \cdot (10ax_w^{\,2} - 3b) = 0$

Fall 1:

$x_w = 0$, also:

$x_{w1} = 0$

Fall 2:

$10ax_w^{\,2} - 3b = 0 \Leftrightarrow x_w^{\,2} = \frac{3b}{10a} \Leftrightarrow$

$x_{w1} = -\sqrt{\frac{3b}{10a}} \quad \Leftrightarrow \quad x_{w2} = \sqrt{\frac{3b}{10a}}$

Berechne die 3. Ableitung and den x-Koordinaten x_{w1}, x_{w2}, x_{w3}

$f'''(0) = 60a \cdot 0^2 - 6b = -6b \neq 0,\ \ da\, b > 0$

$f'''(-\sqrt{\frac{3b}{10a}}) = 60a \cdot (-\sqrt{\frac{3b}{10a}})^2 - 6b = 60a \cdot \frac{3b}{10a} - 6b = 18b - 6b = 12b \neq 0,\ \ da\, b > 0$

$f'''(\sqrt{\frac{3b}{10a}}) = 60a \cdot (\sqrt{\frac{3b}{10a}})^2 - 6b = 60a \cdot \frac{3b}{10a} - 6b = 18b - 6b = 12b \neq 0,\ \ da\, b > 0$

also gibt es 3 Wendepunkte mit den Koordinaten x_{w1}, x_{w2}, x_{w3}

b) Berechne die y-Koordinate von $x_{w1} = 0$

$f(0) = a \cdot 0^5 - b \cdot 0^3 + c \cdot 0 = 0$

also: $W_1(0|0)$ ist Wendepunkt. Dieser liegt auf einer Ursprungsgeraden.

b) Man sieht, daß gilt:

$x_{w1} = -\, x_{w2}$

Da die Hochzahlen der Parabel ungerade sind, ist sie punktsymmetrisch bzgl. O(0|0). Es gilt daher:

$f(x_{w1}) = -\, f(x_{w1}) = -\, f(x_{w2})$

$f(x_{w1}) = -\, f(x_{w2})$

Also unterscheiden sich die y-Koordinaten von x_{w1} und x_{w2} nur durch das Vorzeichen.

Bezeichnen die y-Koordinate von x_{w1} mit v. Dann sind die Wendepunkte

$W_2(x_{w1}, v)$, $W_3(-x_{w1}, -v)$.

Diese sind punktsymmetrisch bzgl. O(0|0) und liegen deshalb auf einer Ursprungsgeraden.

Andere Beweismöglichleit: Zeige durch Punktprobe, dass W1 und W2 auf einer Ursprungsgeraden mit der Funktionsgleichung y = mx liegen.

13)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

a) $O(0 \mid 0) \in K_f$

$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$

$d = 0$

b) d = 0 eingesetzt in $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ergibt:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

c) $W(1 \mid -2) \in K_f$

$-2 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1$

$-2 = a + b + c \quad (G1)$

d) Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt S(3 | 0)

Steigung m der Wendetangente (durch W(1 | -2) und S(3 | 0))

$m = \dfrac{-2-0}{1-3} = 1 \quad$ (Steigungsdreieck)

andererseits:

$1 = m = f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c$

$3a + 2b + c = 1 \quad (G2)$

e) W(1 | -2) ist Wendepunkt

$f''(1) = 0$

$6a \cdot 1 + 2b = 0$

$6a + 2b = 0$

$3a + b = 0 \quad (G3)$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$a = -3, \; b = 9, \; c = -8$

f) Ergebnis:

$f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 8x$

14)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

a) Extremstelle 0

f '(0) = 0

$$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$$

$$d = 0$$

b) Extremstelle 2

f '(2) = 0

$$4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 = 0$$

$$32a + 12b + 4c = 0$$

$$8a + 3b + c = 0 \quad (G1)$$

c) Extremstelle 4

f '(4) = 0

$$4a \cdot 4^3 + 3b \cdot 4^2 + 2c \cdot 4 = 0$$

$$256a + 48b + 8c = 0$$

$$32a + 6b + c = 0 \quad (G2)$$

d) Nullstelle 1

$$f(1) = 0$$

$$a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + e$$

$$a + b + c + d + e = 0 \ \ (G3)$$

e) Funktionswert an der Stelle 0 ist -9/4

$$f(0) = -\frac{9}{4}$$

$$a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = -\frac{9}{4}$$

$$e = -\frac{9}{4}$$

f) d = 0 und $e = -\frac{9}{4}$ eingesetzt in (G3) ergibt

$$a + b + c - \frac{9}{4} = 0 \quad (G4)$$

g) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G4):

$$a = \frac{1}{4}, \ b = -2, \ c = 4$$

i) Ergebnis:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 - \frac{9}{4}$$