27) $f(x)=(x^2-1)(x-2)^2$
ausmultiplizieren der Gleichung ergibt:
$f(x)=x^4-4x^3+3x^2+4x-4$
a) Symmetrie
a1) $f(-x)=(-x)^4-4(-x)^3+3(-x)^2+4(-x)-4=x^4+4x^3+3x^2-4x-4\neq f(x)$
Das Schaubild $K_f$ ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.
a2) $-f(-x)=-((-x)^4-4(-x)^3+3(-x)^2+4(-x)-4)=-x^4-4x^3-3x^2+4x-4\neq f(x))$
Das Schaubild $K_f$ ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte
b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$
$y_s=f(0)=0^4-4\cdot 0^3+3\cdot 0^2+4\cdot 0-4=-4$
$S_y(0 \mid -4)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$
$f(x)=(x^2-1)(x-2)^2$
$0=(x_S^2-1)(x_S-2)^2=(x_S-1)(x_S+1)(x_S-2)^2$
damit Nullstellen von f:
$S_{x1}(-1 \mid 0)$, $S_{x2}(1 \mid 0)$, $S_{x3}(2 \mid 0)$

c) Ableitungen
$f(x)=x^4-4x^3+3x^2+4x-4$
$f'(x)=4x^3-12x^2+6x+4$
$f''(x)=12x^2-24x+6$
$f'''(x)=24x-24$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = 4x_e^3 - 12x_e^2 + 6x_e + 4 \quad | : 2$

$0 = 2x_e^3 - 6x_e^2 + 3x_e + 2$

Nullstelle $x_e = 2$ durch Probieren. Also gilt:

$0 = 2x_e^3 - 6x_e^2 + 3x_e + 2 = (x_S - 2) \cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(2x_e^3 - 6x_e^2 + 3x_e + 2) : (x_e - 2) = 2x_e^2 - 2x_e - 1$

$2x_e^3 - 4x_e^2$

$------$

$-2x_e^2 + 3x_e + 2$

$-2x_e^2 + 4x_e$

$---------$

$-x_e + 2$

$-x_e + 2$

$-----$

$0$

Lösungen bestimmen von $0 = (2x_e^2 - 2x_e - 1) \cdot (x_e - 2)$

Fall1: $2x_e^2 - 2x_e - 1 = 0$

Fall2: $x_e - 2 = 0$

$x_{e3} = 2$

$$x_{e1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 3}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_{e1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$x_{e2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$f''\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 24 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 6 = 6 + 6\sqrt{3} > 0$$ ==> Tiefpunkt

$$f''\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 24 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + 6 = 6 - 6\sqrt{3} < 0$$ ==> Hochpunkt

$f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 6 = 6 > 0$ ==> Tiefpunkt

$$y_{e1} = f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) - 4 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{4}$$

$$y_{e2} = f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) - 4 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{4}$$

$y_{e3} = f(2) = 2^4 - 4\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 4 = 0$

damit:

$T_1(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \mid -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{4}) \approx T_1(-0{,}37 \mid -4{,}85$ Tiefpunkt

$T_2(2 \mid 0)$ Tiefpunkt

$H(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \mid \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{4}) \approx H\ (1{,}37 \mid -0{,}35$ Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$12x_W^2 - 24x_W + 6 = 0 \mid :6$

$2x_W^2 - 4x_W + 1 = 0$

$$x_{W1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2} = \frac{4\pm\sqrt{8}}{4} = \frac{4\pm\sqrt{4\cdot 2}}{4} = \frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

$$x_{W1} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$x_{W2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$f'''\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = 24\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - 24 = 24\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 24\left(\frac{2-\sqrt{2}-2}{2}\right)$$

$= 24\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$f'''\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = 24\cdot\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) - 24 = 24\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 24\left(\frac{2+\sqrt{2}-2}{2}\right)$$

$= 24\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_{W1} = f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1)\right)\cdot\left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - 2\right)^2 = -\sqrt{2} - \frac{5}{4}$$

$$y_{W2} = f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1)\right)\cdot\left(\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) - 2\right)^2 = \sqrt{2} - \frac{5}{4}$$

damit:

$W_1(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \mid -\sqrt{2} - \frac{5}{4}) \approx W_1(0{,}29 \mid -2{,}67)$ Wendepunkt,

$W_2(\frac{2+\sqrt{2}}{2} \mid \sqrt{2} - \frac{5}{4}) \approx W_2(1{,}71 \mid 0{,}17)$ Wendepunkt,

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \mid -\sqrt{2}-\frac{5}{4})$:

$$f'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = 4\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 12\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) + 4 = 2\sqrt{2}+2\,,$$

damit gilt nach der PSF:

$$2\sqrt{2}+2 = \frac{y-\left(-\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)}{x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \iff y+\sqrt{2}+\frac{5}{4} = (2\sqrt{2}+2)\cdot\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\iff y = 2(\sqrt{2}+1)\,x - \frac{8\sqrt{2}+5}{4}$$

$t_1$: $y = 2(\sqrt{2}+1)\,x - \frac{8\sqrt{2}+5}{4}$

f2) Wendetangente in $W_2(\frac{2+\sqrt{2}}{2} \mid \sqrt{2}-\frac{5}{4})$:

$$f'\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = 4\cdot\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 12\cdot\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) + 4 = 2-2\sqrt{2}\,,$$

damit gilt nach der PSF:

$$2-2\sqrt{2} = \frac{y-\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)}{x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \iff y-\sqrt{2}+\frac{5}{4} = (2-2\sqrt{2})\cdot\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\iff y = -2(\sqrt{2}-1)\,x - \frac{8\sqrt{2}-5}{4}$$

$t_2$: $y = -2(\sqrt{2}-1)\,x - \frac{8\sqrt{2}-5}{4}$

28) gegeben $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}x^3-x^2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=-\frac{1}{16}(-x)^4+\frac{1}{2}(-x)^3-(-x)^2=-\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^3-x^2\neq f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-\left(-\frac{1}{16}(-x)^4+\frac{1}{2}(-x)^3-(-x)^2\right)=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}x^3+x^2\neq f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_S=f(0)=-\frac{1}{16}\cdot 0^4+\frac{1}{2}\cdot 0^3-0^2=0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=-\frac{1}{16}x_S^4+\frac{1}{2}x_S^3-x_S^2 \quad | \cdot -16$

$0=x_S^4-8x_S^3+16x_S^2$ <==> $0=x_S^2(x_S^2-8x_S+16)$

Fall1: $0=x_S^2$

$x_S=0$

$x_{S1}=0$

Fall2: $0=x_S^2-8x_S+16$

$x_{S2/3}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}=4$

$x_{S2}=4$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(0 \mid 0)$, $S_{x2}(4 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x)=-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}x^3-x^2$

$f'(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x$

$f''(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x-2$

$f'''(x)=-\frac{3}{2}x+3$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -\frac{1}{4}x_e^3 + \frac{3}{2}x_e^2 - 2x \quad | \cdot -4$$

$$0 = x_e^3 - 6x_e^2 + 8x_e$$

$$0 = x_e^3 - 6x_e^2 + 8x_e$$

$$0 = x_e(x_e^2 - 6x_e + 8)$$

Fall1: $0 = x_e$

$x_{e1} = 0$

Fall2: $0 = x_e^2 - 6x_e + 8$

$$x_{e2/3} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1$$

$$x_{e2} = 4$$

$$x_{e2} = 2$$

$$f''(0) = -\frac{3}{4} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$f''(2) = -\frac{3}{4} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 1 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(4) = -\frac{3}{4} \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 2 = -2 < 0 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$y_{e1} = -\frac{1}{16} \cdot 0^4 + \frac{1}{2} \cdot 0^3 - 0^2 = 0$$

$$y_{e2} = -\frac{1}{16} \cdot 2^4 + \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 2^2 = -1$$

$$y_{e3} = -\frac{1}{16} \cdot 4^4 + \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 4^2 = 0$$

damit:

H (0 | 0) Hochpunkt, H (4 | 0) Hochpunkt, T (2 | -1) Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$0 = -\frac{3}{4}x_W^2 + 3x_W - 2 \quad | \cdot -4$$

$$0 = 3x_W^2 - 12x_W + 8$$

$$x_{W1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{3 \cdot 16}}{6}$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$$x_{W1} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}85$$

$$x_{W2} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \approx 3{,}16$$

$$f'''\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right) + 3 = -\frac{6-2\sqrt{3}}{2} + 3 = -3+\sqrt{3}+3 \neq 0 \quad \text{==> Wendepunkt}$$

$$f'''\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) + 3 = -\frac{6+2\sqrt{3}}{2} + 3 = -3-\sqrt{3}+3 \neq 0 \quad \text{==> Wendepunkt}$$

$$y_{W1} = f\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)^4 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}$$

$$y_{W2} = f\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)^4 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}$$

damit:

$W_1\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3} \,|\, -\frac{4}{9}\right) \approx W_1(0{,}85 \mid -0{,}44)$ Wendepunkt,

$W_2\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3} \,|\, -\frac{4}{9}\right) \approx W_2(3{,}16 \mid -0{,}44)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3} \,|\, -\frac{4}{9}\right)$:

$$f'\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9},$$

damit gilt nach der PSF:

$$-\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9} = \frac{y-\left(-\frac{4}{9}\right)}{x-\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} \iff y+\frac{4}{9} = -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}\left(x-\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right) \iff$$

$$y = -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}x - \frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}(\sqrt{3}-2)$$

$t_1$: $y = -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}x - \frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}(\sqrt{3}-2)$

Näherung:

$t_1$: y = -0,77 x + 0,21

f2) Wendetangente in $W_2(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}|-\frac{4}{9})$:

$$f'\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\cdot\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9},$$

damit gilt nach der PSF:

$$\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}=\frac{y-\left(-\frac{4}{9}\right)}{x-\frac{6+2\sqrt{3}}{3}} \iff y+\frac{4}{9}=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}\left(x-\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$y=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}x-\frac{4\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+2)}{9}$$

t2: $y=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}x-\frac{4\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+2)}{9}$

Näherung:

y = 0,77 x - 2,87

29) gegeben $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2-3$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^4-(-x)^2-3=\frac{1}{4}x^4-x^2-3=f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-\left(\frac{1}{4}(-x)^4-(-x)^2-3\right)=-\frac{1}{4}x^4+x^2+3\neq f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_S=f(0)=\frac{1}{4}\cdot 0^4-0^2-3=-3$

$S_y(0 \mid -3)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{4}x_S^4-x_S^2-3 \quad |\cdot 4$

$0=x_S^4-4x_S^2-12$

Substituiere:

$u=x_S^2$, dies ergibt:

$0=u^2-4u-12$

$u_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 8}{2\cdot 1}=2\pm 4$

$u_1 = -2$

$u_2 = 6$

Fall1: $x_S^2=-2$

keine Lösung

Fall2: $x_S^2=6$

$x_{S1}=\sqrt{6}$

$x_{S2}=-\sqrt{6}$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(\sqrt{6} \mid 0)\approx S_{x1}(2{,}45 \mid 0)$,

$S_{x2}(-\sqrt{6} \mid 0)\approx S_{x2}(-2{,}45 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2-3$

$f'(x)=x^3-2x$

$f''(x)=3x^2-2$

$f'''(x)=6x$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = x_e{}^3 - 2x_e$

$0 = x_e(x_e^2 - 2)$

Fall1: $0 = x_e$

$x_{e1} = 0$

Fall2: $0 = x_e^2 - 2$

$x_e^2 = 2$

$x_{e2} = \sqrt{2}$

$x_{e3} = -\sqrt{2}$

$f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2 < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(\sqrt{2}) = 3 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2 = 4 > 0$ ==> Tiefpunkt

$f''(-\sqrt{2}) = 3 \cdot (-\sqrt{2})^2 - 2 = 4 > 0$ ==> Tiefpunkt

$y_{e1} = f(0) = \frac{1}{4}0^4 - 0^2 - 3 = -3$

$y_{e2} = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}(\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^2 - 3 = -4$

$y_{e3} = f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{4}(-\sqrt{2})^4 - (-\sqrt{2})^2 - 3 = -4$

damit:

H(0 | -3) Hochpunkt,

$T_1(-\sqrt{2}\ |-4) \approx T_1(-1{,}41\ |-4)$ Tiefpunkt

$T_2(\sqrt{2}\ |-4) \approx T_2(1{,}41\ |-4)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$0 = 3x_W^2 - 2 \mid +2$

$3x_W^2 = 2 \mid :3$

$x_W^2 = \frac{2}{3}$

$x_{W1} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$x_{W2} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$f'''(\sqrt{\frac{2}{3}}) = 6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$f'''(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = 6 \cdot (-\sqrt{\frac{2}{3}}) \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_{W1}=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-3=-\frac{32}{9}$$

$$y_{W2}=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4-\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-3=-\frac{32}{9}$$

damit:

$W_1(\sqrt{\frac{2}{3}}\mid-\frac{32}{9})\approx W_1(0{,}82\mid-3{,}55)$ Wendepunkt,

$W_2(-\sqrt{\frac{2}{3}}\mid-\frac{32}{9})\approx W_2(-0{,}82\mid-3{,}55)$ Wendepunkt.

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1(\sqrt{\frac{2}{3}}\mid-\frac{32}{9})$:

$f'(\sqrt{\frac{2}{3}})=\sqrt{\frac{2}{3}}^3-2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=-\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}$, damit gilt nach der PSF:

$$-\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}=\frac{y-\left(-\frac{32}{9}\right)}{x-\sqrt{\frac{2}{3}}}\Longleftrightarrow y+\frac{32}{9}=-\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}\left(x-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\Longleftrightarrow y=-\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}x-\frac{8}{3}$$

$t_1$: $y=-\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}x-\frac{8}{3}$

Näherung:

$t_1$: y = -1,09 x - 2,67

f2) Wendetangente in $W_2(-\sqrt{\frac{2}{3}}\mid-\frac{32}{9})$:

$f'\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-2\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}$ , damit gilt nach der PSF:

$$\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}=\frac{y-\left(-\frac{32}{9}\right)}{x-\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}\Longleftrightarrow y+\frac{32}{9}=\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}\left(x+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\Longleftrightarrow y=\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}x-3$$

$t_2$: $y=\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}x-\frac{8}{3}$

Näherung:

$t_2$: y = 1,09 x - 2,67

30) gegeben $f(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{8}(-x)^4-\frac{3}{2}(-x)^3+\frac{9}{2}(-x)^2=\frac{1}{8}x^4+\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{2}(-x)^2\neq f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-\left(\frac{1}{8}(-x)^4-\frac{3}{2}(-x)^3+\frac{9}{2}(-x)^2\right)=-\frac{1}{8}x^4-\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2\neq f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_s=f(0)=\frac{1}{8}\cdot 0^4-\frac{3}{2}\cdot 0^3+\frac{9}{2}\cdot 0^2=0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{8}x_S^4-\frac{3}{2}x_S^3+\frac{9}{2}x_S^2 \quad |\cdot 8$

$0=x_S^4-12x_S^3+36x_S^2$ <==> $0=x_S^2(x_S^2-12x_S+36)$

Fall1: $x_S^2-12x_S+36$

$x_{S1/2}=\frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 36}}{2\cdot 1}=6$

$x_{S1}=6$

Fall2: $x_S^2=0$

$x_S=0$

$x_{S2}=0$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(0 \mid 0)$

$S_{x2}(6 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+9x$

$f''(x)=\frac{3}{2}x^2-9x\ \ +9$

$f'''(x)=3x^2-9$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = \frac{1}{2}x_e^3 - \frac{9}{2}x_e^2 + 9x_e \quad | \cdot 2$

$0 = x_e^3 - 9x_e^2 + 18x_e$ <==> $0 = x_e(x_e^2 - 9x_e + 18)$

Fall1: $x_S^2 - 12x_S + 36$

Fall2: $x_e = 0$

$x_{e3} = 0$

$x_{e1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 3}{2}$

$x_{e1} = 6$

$x_{e1} = 3$

$f''(6) = \frac{3}{2} \cdot 6^2 - 9 \cdot 6 + 9 = 9 > 0$ ==> Tiefpunkt

$f''(3) = \frac{3}{2} \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 9 = -4{,}5 > 0$ ==> Hochpunkt

$f''(0) = \frac{3}{2} \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$ ==> Tiefpunkt

$y_{e1} = f(6) = \frac{1}{8} \cdot 6^4 - \frac{3}{2} \cdot 6^3 + \frac{9}{2} \cdot 6^2 = 0$

$y_{e2} = f(3) = \frac{1}{8} \cdot 3^4 - \frac{3}{2} \cdot 3^3 + \frac{9}{2} \cdot 3^2 = \frac{81}{8}$

$y_{e3} = f(0) = \frac{1}{8} \cdot 0^4 - \frac{3}{2} \cdot 0^3 + \frac{9}{2} \cdot 0^2 = 0$

damit:

$T_1(6 \mid 0)$ Tiefpunkt, $T_2(0 \mid 0)$ Tiefpunkt, $H(3|10\frac{1}{8})$ Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$\frac{3}{2}x_W^2 - 9x_W + 9 = 0 \;|\cdot\; \frac{2}{3}$

$x_W^2 - 6x_W + 6 = 0$

$x_{W1/W2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$

$x_{W1} = 3 - \sqrt{3}$

$x_{W2} = 3 - \sqrt{3}$

$f'''(3 - \sqrt{3}) = 3 \cdot (3 - \sqrt{3})^2 - 9 = 27 - 18\sqrt{3} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$f'''(3 + \sqrt{3}) = 3 \cdot (3 + \sqrt{3})^2 - 9 = 27 + 18\sqrt{3} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_{W1} = f(3 - \sqrt{3}) = \frac{1}{8} \cdot (3 - \sqrt{3})^4 - \frac{3}{2} \cdot (3 - \sqrt{3})^3 + \frac{9}{2} \cdot (3 - \sqrt{3})^2 = 4{,}5$

$y_{W1} = f(3 + \sqrt{3}) = \frac{1}{8} \cdot (3 + \sqrt{3})^4 - \frac{3}{2} \cdot (3 + \sqrt{3})^3 + \frac{9}{2} \cdot (3 + \sqrt{3})^2 = 4{,}5$

damit:
$W_1(3-\sqrt{3} \mid 4{,}5) \approx W_1(1{,}27 \mid 4{,}5)$ Wendepunkt,
$W_2(3+\sqrt{3} \mid 4{,}5) \approx W_1(4{,}73 \mid 4{,}5)$ Wendepunkt.

f) Wendetangenten
f1) Wendetangente in $W_1(3-\sqrt{3} \mid 4{,}5)$:
$f'(3-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\cdot(3-\sqrt{3})^3 - \frac{9}{2}\cdot(3-\sqrt{3})^2 + 9\cdot(3-\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$, damit gilt nach der PSF:
$3\sqrt{3} = \frac{y-4{,}5}{x-(3-\sqrt{3})}$ <==> $y-4{,}5 = 3\sqrt{3}(x-3+\sqrt{3})$ <==> $y = 3\sqrt{3}x + \frac{27}{2} - 9\sqrt{3}$
$t_1$: $y = 3\sqrt{3}x + \frac{27}{2} - 9\sqrt{3}$
Näherung:
y = 5,2x - 2,09

f2) Wendetangente in $W_1(3+\sqrt{3} \mid 4{,}5)$:
$f'(3+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\cdot(3+\sqrt{3})^3 - \frac{9}{2}\cdot(3+\sqrt{3})^2 + 9\cdot(3+\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$, damit gilt nach der PSF:
$-3\sqrt{3} = \frac{y-4{,}5}{x-(3+\sqrt{3})}$ <==> $y-4{,}5 = -3\sqrt{3}(x-3-\sqrt{3})$ <==> $y = -3\sqrt{3}x + \frac{27}{2} + 9\sqrt{3}$
$t_2$: $y = -3\sqrt{3}x + \frac{27}{2} + 9\sqrt{3}$
Näherung:
y = -5,2x + 29,09

31) gegeben $f(x)=\frac{1}{40}x^4-\frac{3}{5}x^2+2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{40}(-x)^4-\frac{3}{5}(-x)^2+2=\frac{1}{40}x^4-\frac{3}{5}x^2+2=f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-\left(\frac{1}{40}(-x)^4-\frac{3}{5}(-x)^2+2\right)=-\frac{1}{40}x^4+\frac{3}{5}x^2-2\neq f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_S=f(0)=\frac{1}{40}\cdot 0^4-\frac{3}{5}\cdot 0^2+2=2$

$S_y(0 \mid 2)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$\frac{1}{40}x_S^4-\frac{3}{5}x_S^2+2=0 \quad | \cdot 40$

$x_S^4-24x_S^2+80=0$

Substituiere:

$u=x_S^2$, dies ergibt:

$u^2-24u+80=0$

$u_{1/2}=\frac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot 1\cdot 80}}{2\cdot 1}=\frac{24\pm 16}{2}=12\pm 8$

$u_1=20$

$u_2=4$

Fall1: $x_S^2=20$

$x_{S1}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$

$x_{S2}=-\sqrt{20}=-\sqrt{4\cdot 5}=-2\sqrt{5}$

Fall2: $x_S^2=4$

$x_{S3}=\sqrt{4}=2$

$x_{S4}=-\sqrt{4}=-2$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(2\sqrt{5} \mid 0)\approx S_{x1}(4{,}48 \mid 0)$

$S_{x2}(-2\sqrt{5} \mid 0)\approx S_{x2}(-4{,}48 \mid 0)$

$S_{x3}(-2 \mid 0)$

$S_{x4}(2 \mid 0)$

c) Ableitungen

$$f(x)=\frac{1}{40}x^4-\frac{3}{5}x^2+2$$

$$f'(x)=\frac{1}{10}x^3-\frac{6}{5}x$$

$$f''(x)=\frac{3}{10}x^2-\frac{6}{5}$$

$$f'''(x)=\frac{6}{10}x$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0=\frac{1}{10}x_e^3-\frac{6}{5}x_e \quad |\cdot 10$$

$$0=x_e^3-12x_e$$

$$0=x_e(x_e^2-12)$$

Fall1: $x_e^2-12=0$

$$x_e^2=12$$

$$x_{e1}=\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}$$

$$x_{e2}=-\sqrt{12}=-\sqrt{4\cdot 2}=-2\sqrt{2}$$

$$y_{e1}=f(\sqrt{12})=\frac{1}{40}\cdot\sqrt{12}^4-\frac{3}{5}\cdot\sqrt{12}^2+2=-1{,}6$$

$$y_{e2}=f(-\sqrt{12})=\frac{1}{40}\cdot\left(-\sqrt{12}\right)^4-\frac{3}{5}\cdot\left(-\sqrt{12}\right)^2+2=-1{,}6$$

$$y_{e3}=f(0)=\frac{1}{40}\cdot 0^4-\frac{3}{5}\cdot 0^2+2=2$$

$$f''(\sqrt{12})=\frac{3}{10}\cdot\sqrt{12}^2-\frac{6}{5}>0 \text{==>Tiefpunkt}$$

$$f''(-\sqrt{12})=\frac{3}{10}\cdot\left(-\sqrt{12}\right)^2-\frac{6}{5}>0 \text{==>Tiefpunkt}$$

$$f''(0)=\frac{3}{10}\cdot 0^2-\frac{6}{5}=-\frac{6}{5}<0 \text{ ==>Hochpunkt}$$

Fall2: $x_e^2=0$

$$x_e=0$$

$$x_{e3}=0$$

damit:

$T_1(\sqrt{12}\ |\ -1{,}6) \approx T_1(3{,}46\ |\ -1{,}6)$, Tiefpunkt, $T_2\ (-\sqrt{12}\ |\ -1{,}6) \approx T_2(-3{,}46\ |\ -1{,}6)$Tiefpunkt, H(0 | 2) Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$\frac{3}{10}x_W^2 - \frac{6}{5} = 0 \ \ | \cdot \frac{10}{3}$$

$$x_W^2 - 4 = 0$$

$$x_W^2 = 4$$

$$x_{W1} = 2$$

$$x_{W2} = -2$$

$$f'''(2) = \frac{6}{10} \cdot 2 \quad \neq 0 \Longrightarrow \text{Wendepunkt}$$

$$f'''(-2) = \frac{6}{10} \cdot (-2) \quad \neq 0 \Longrightarrow \text{Wendepunkt}$$

$$y_{W1} = f(2) = \frac{1}{40} \cdot 2^4 - \frac{3}{5} \cdot 2^2 + 2 = 0$$

$$y_{W2} = f(-2) = \frac{1}{40} \cdot (-2)^4 - \frac{3}{5} \cdot (-2)^2 + 2 = 0$$

damit:

$W_1(2 \mid 0)$ Wendepunkt, $W_2(-2 \mid 0)$ Wendepunkt.

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1(2 \mid 0)$:

$f'(2) = \frac{1}{10} \cdot 2^3 - \frac{6}{5} \cdot 2 \quad = -\frac{8}{5}$, damit gilt nach der PSF:

$$-\frac{8}{5} = \frac{y-0}{x-2} \Longleftrightarrow -\frac{8}{5}(x-2) = y \Longleftrightarrow y = -\frac{8}{5}x + \frac{16}{5}$$

$t_1$: $y = -\frac{8}{5}x + \frac{16}{5}$

f2) Wendetangente in $W_2(2 \mid 0)$:

$$f'(-2) = \frac{1}{10} \cdot (-2)^3 - \frac{6}{5} \cdot (-2) \quad = \frac{8}{5}$$

$\frac{8}{5} = \frac{y-0}{x-(-2)} \Longleftrightarrow \frac{8}{5}(x+2) = y \Longleftrightarrow y = \frac{8}{5}x + \frac{16}{5}$, damit gilt nach der PSF:

$t_2$: $y = \frac{8}{5}x + \frac{16}{5}$

32) $f(x)=\frac{1}{3}x^4-x^3+x^2-\frac{1}{3}x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^4-(-x)^3+(-x)^2-\frac{1}{3}(-x)=\frac{1}{3}x^4+x^3+x^2+\frac{1}{3}x\neq f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(\frac{1}{3}(-x)^4-(-x)^3+(-x)^2-\frac{1}{3}(-x))=-\frac{1}{3}x^4-x^3-x^2-\frac{1}{3}x\neq f(x))$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_s=f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^4-0^3+0^2-\frac{1}{3}\cdot 0=0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{3}x_S^4-x_S^3+x_S^2-\frac{1}{3}x_S \quad | \cdot 3$

$0=x_S^4-3x_S^3+3x_S^2-x_S$ <==> $0=x_S(x_S^3-3x_S^2+3x_S-1)$

Fall1: $x_S^3-3x_S^2+3x_S-1$

Fall2: $x_S=0$

$x_{S3}=0$

Nullstelle $x_S=1$ durch Probieren. Also gilt:

$0=x_S^3-3x_S^2+3x_S-1=(x_S-1)\cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(x_S^3-3x_S^2+3x_S-1):(x_S-1)=x_S^2-2x_S+1$

$x_S^3-x_S^2$

$-----$

$-2x_S^2+3x_S-1$

$-2x_S^2+2x_S$

$---------$

$x_S-1$

$x_S-1$

$----$

$0$

Lösungen bestimmen von $0=(x_S-1)\cdot(x_S^2-2x_S+1)$

Fall1.1: $(x_S^2-2x_S+1)$

$$x_{S1/2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{2}{2}=1$$

$x_{S1}=1$

Fall1.2: $x_s - 1 = 0$

$x_{S2} = 1$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}$ (1 | 0), $S_{x2}$ (0 | 0)

c) Ableitungen

$$f(x)=\frac{1}{3}x^4-x^3+x^2-\frac{1}{3}x$$

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^3-3x^2+2x-\frac{1}{3}$$

$$f''(x)=4x^2-6x+2$$

$$f'''(x)=8x-6$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0=\frac{4}{3}x_e^3-3x_e^2+2x_e-\frac{1}{3}\quad|\cdot 3$$

$0=4x_e^3-9x_e^2+6x_e-1$ <==>

Nullstelle $x_e = 1$ durch Probieren. Also gilt:

$$0=4x_e^3-9x_e^2+6x_e-1=(x_e-1)\cdot R$$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$$(4x_e^3-9x_e^2+6x_e-1):(x_e-1)=4x_e^2-5x_e+1$$

$4x_e^3-4x_e^2$

$-----$

$-5x_e^2+6x_e-1$

$-5x_e^2+5x_e$

$--------$

$x_e-1$

$x_e-1$

$---$

$0$

Lösungen bestimmen von $0 = (4x_e^2 - 5x_e + 1) \cdot (x_e - 1)$

Fall1: $4x_e^2 - 5x_e + 1 = 0$

$$x_{e1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$x_{e1} = \frac{1}{4}$$

$$x_{e2} = 1$$

Fall2: $x_e - 1 = 0$

$x_{e3} = 1$

$$f''\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 2 = \frac{3}{4} > 0$$ ==> Tiefpunkt

$f''(1) = 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = 0$ ==> keine Aussage möglich

aber: kein VZW bei $f'(1)$ ==> kein Extrempunkt

$$y_{e1} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{256}$$

damit:

$T(\frac{1}{4} \mid -\frac{9}{256})$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$4x_W^2 - 6x_W + 2 = 0 \mid :2$$

$$2x_W^2 - 3x_W + 1 = 0$$

$$x_{W1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x_{W1} = \frac{1}{2}$$

$$x_{e2} = 1$$

$$f'''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 6 = -2 \neq 0$$ ==> Wendepunkt

$f'''(1) = 8 \cdot 1 - 6 = 2 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_{W1} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{48}$$

$$y_{W2} = f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^4 - 1^3 + 1^2 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

damit:

$W_1(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{48}) \approx W_1(0{,}50 \mid -0{,}02)$ Wendepunkt, $W_2(1 \mid 0)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1(\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{48})$:

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, damit gilt nach der PSF:

$\frac{1}{12} = \frac{y - -\frac{1}{48}}{x - \frac{1}{2}}$ <==> $y + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ <==> $y = \frac{1}{12}x - \frac{1}{16}$

$t_1$: $y = \frac{1}{12}x - \frac{1}{16}$

f2) Wendetangente in $W_2(0 \mid 0)$:

$f'(1) = \frac{4}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - \frac{1}{3} = 0$, damit gilt nach der PSF:

$0 = \frac{y - 0}{x - 1}$ <==> $y = 0(x - 1)$ <==> y = 0

$t_2$: y = 0

33) $f(x)=\frac{3}{16}x^4+\frac{1}{16}x^3$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{3}{16}(-x)^4+\frac{1}{16}(-x)^3=\frac{3}{16}x^4-\frac{1}{16}x^3\neq f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(\frac{3}{16}(-x)^4+\frac{1}{16}(-x)^3)=-\frac{3}{16}x^4+\frac{1}{16}x^3\neq f(x))$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_s=f(0)=\frac{3}{16}\cdot 0^4+\frac{1}{16}\cdot 0^3=0$

$S_y$ (0 | 0)

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{3}{16}x_S^4+\frac{1}{16}x_S^3 \mid \cdot 16$

$0=3x_S^4+x_S^3 \iff 0=x_S^3(3x_S+1)$

Fall 1: $0=3x_S+1$

$3x_S=-1$

$x_{S1}=-\frac{1}{3}$

Fall2: $x_S^3=0$

$x_S=0$

$x_{S2}=0$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}\ (-\frac{1}{3} \mid 0)$, $S_{x2}$ (0 | 0)

c) Ableitungen

$f(x)=\frac{3}{16}x^4+\frac{1}{16}x^3$

$f'(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{3}{16}x^2$

$f''(x)=\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{8}x$

$f'''(x)=\frac{9}{2}x+\frac{3}{8}$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = \frac{3}{4}x_e^3 + \frac{3}{16}x_e^2 \quad | \cdot \frac{16}{3}$

$0 = 4x_e^3 + x_e^2 \Longleftarrow\!\!=\!\!> 0 = 3x_e(6x_e+1) = x_e^2(4x_e+1)$

Fall1: $4x_e + 1 = 0$:

$4x_e = -1$

$x_{e1} = -\frac{1}{4}$

Fall2: $3x_e = 0$

$x_{e2} = 0$

$f''\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{64} > 0$ ==> Tiefpunkt

$f''(0) = \frac{9}{4}\cdot 0^2 + \frac{3}{8}\cdot 0 =$ ==> keine Aussage möglich. Deswegen Untersuchung auf VZW z.B.

an den Stellen $\frac{1}{10}$ und $-\frac{1}{10}$ ergibt:

$f'(\frac{1}{10}) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{3}{4000} + \frac{3}{1600} > 0$

$f'(-\frac{1}{10}) = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{16}\left(-\frac{1}{10}\right)^2 = -\frac{3}{4000} + \frac{3}{1600} > 0$

also kein VZW bei f '(0) ==> kein Extrempunkt

$y_{e1} = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{1}{16}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{4096}$

damit:

$T(-\frac{1}{4}|-\frac{1}{4096})$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$0 = \frac{9}{4}x_e^2 + \frac{3}{8}x_e \quad | \cdot 8$

$0 = 18x_e^2 + 3x_e \Longleftarrow\!\!=\!\!> 0 = 3x_e(6x_e+1)$

Fall1: $6x_e + 1 = 0$:

$6x_e = -1$

$x_{e1} = -\frac{1}{6}$

Fall2: $3x_e = 0$

$x_{e2} = 0$

$f'''(0) = \frac{9}{2}\cdot 0 + \frac{3}{8} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$f'''\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{9}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{3}{8} = \cdot -\frac{3}{4} + \frac{3}{8} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_{W1} = f(0) = \frac{3}{16} \cdot 0^4 + \frac{1}{16} \cdot 0^3 = 0$$
$$y_{W2} = f(-\frac{1}{6}) = \frac{3}{16} \cdot (-\frac{1}{6})^4 + \frac{1}{16} \cdot (-\frac{1}{6})^3 = -\frac{1}{6912}$$

damit:
$W_1(0 \mid 0)$ Wendepunkt
$W_2(-\frac{1}{6} \mid -\frac{1}{6912})$ Wendepunkt

f) Wendetangenten
f1) Wendetangente in W(0 | 0):
$f'(0) = \frac{3}{4} \cdot 0^3 + \frac{3}{16} \cdot 0^2 = 0$, damit gilt nach der PSF:
$0 = \frac{y-0}{x-0}$ <==> y = 0
$t_1$: y = 0

f2) Wendetangente in $W(-\frac{1}{6} \mid -\frac{1}{6912})$:
$$f'(-\frac{1}{6}) = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{3}{16} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{216} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{36} = -\frac{3}{864} + \frac{3}{576} = \frac{1}{576}$$

Damit gilt nach der PSF:
$$\frac{1}{576} = \frac{y - \left(-\frac{1}{6912}\right)}{x - \left(-\frac{1}{6}\right)} \iff \frac{1}{576} = \frac{y + \frac{1}{6912}}{x + \frac{1}{6}} \iff y + \frac{1}{6912} = \frac{1}{576} \cdot (x + \frac{1}{6}) \iff$$
$$y = \frac{1}{576}x + \frac{1}{3456} - \frac{1}{6912} \iff y = \frac{1}{576}x + \frac{1}{6912}$$
$t_2$: $y = \frac{1}{576}x + \frac{1}{6912}$

34) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{9}{2}x^2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = -\frac{1}{8}(-x)^4 + \frac{9}{2}(-x)^2 = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{9}{2}x^2 = f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(-\frac{1}{8}(-x)^4 + \frac{9}{2}(-x)^2) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \neq f(x))$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s = f(0) = -\frac{1}{8} \cdot 0^4 + \frac{9}{2} \cdot 0^2 = 0$

$S_y$ (0 | 0)

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = -\frac{1}{8}x_S^4 + \frac{9}{2}x_S^2 \quad | \cdot -8$

$0 = x_S^4 - 36x_S^2$ <==> $0 = x_S^2(x_S^2 - 36)$

Fall 1: $0 = x_S^2 - 2$

$x_S^2 - 36$

$x_S^2 = 36$

$x_{S1} = -6$

$x_{S2} = 6$

Fall2: $x_S^2 = 0$

$x_S = 0$

$x_{S3} = 0$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}$ (-6 | 0), $S_{x2}$ (6 | 0), $S_{x3}$ (0| 0)

c) Ableitungen

$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{9}{2}x^2$

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 9x$

$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 9$

$f'''(x) = -3x$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = -\frac{1}{2}x_e^3 + 9x_e \quad | \cdot -2$

$0 = x_e^3 - 18x_e$ <==> $x_e(x_e^2 - 18)$

Fall1: $x_e^2 - 18 = 0$:

$x_e^2 = 18$

$x_{e1} = -\sqrt{18} = -\sqrt{9 \cdot 2} = -3\sqrt{2}$

$x_{e2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

Fall2: $x_e = 0$

$x_{e3} = 0$

$f''(-\sqrt{18}) = -\frac{3}{2} \cdot (-\sqrt{18})^2 + 9 = -18 < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2} \cdot (\sqrt{18})^2 + 9 = -18 < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(0) = -\frac{3}{2} \cdot 0^2 + 9 = 9 > 0$ ==> Tiefpunkt

$y_{e1} = (-\sqrt{18}) = -\frac{1}{8} \cdot (-\sqrt{18})^4 + \frac{9}{2} \cdot (-\sqrt{18})^2 = 40{,}5$

$y_{e2} = (\sqrt{18}) = -\frac{1}{8} \cdot (\sqrt{18})^4 + \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{18})^2 = 40{,}5$

$y_{e3} = (0) = -\frac{1}{8} \cdot 0^4 + \frac{9}{2} \cdot 0^2 = 0$

damit:

$H_1(-3\sqrt{2} \mid 40{,}5) \approx H_1(-4{,}24 \mid 40{,}5)$ Hochpunkt,

$H_2(3\sqrt{2} \mid 40{,}5)$ $H_1(4{,}24 \mid 40{,}5)$ Hochpunkt

$T(0 \mid 0)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$-\frac{3}{2}x_W^2 + 9 = 0 \quad | \cdot -\frac{2}{3}$

$x_W^2 - 6 = 0$ <==> $x_W^2 = 6$

$x_{W1} = -\sqrt{6}$

$x_{W2} = \sqrt{6}$

$f'''(-\sqrt{6}) = -3 \cdot (-\sqrt{6}) \neq 0$ ==> Wendepunkt

$f'''(\sqrt{6}) = -3 \cdot \sqrt{6} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_{W1} = f\left(-\sqrt{6}\right) = -\frac{1}{8} \cdot (-\sqrt{6})^4 + \frac{9}{2} \cdot (-\sqrt{6})^2 = 22{,}5$

$y_{W2} = f\left(\sqrt{6}\right) = -\frac{1}{8} \cdot (\sqrt{6})^4 + \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{6})^2 = 22{,}5$

damit:

$W_1(-\sqrt{6} \mid 22{,}5) \approx W_1(-2{,}45 \mid 22{,}5)$ Wendepunkt,

$W_2(\sqrt{6} \mid 22{,}5) \approx W_2(2{,}45 \mid 22{,}5)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1(-\sqrt{6} \mid 22{,}5)$:

$f'(-\sqrt{6}) = -\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{6})^3 + 9\cdot(-\sqrt{6}) = -6\sqrt{6}$ , damit gilt nach der PSF:

$-6\sqrt{6} = \frac{y-22{,}5}{x-(-\sqrt{6})}$ <==> $y - 22{,}5 = -6\sqrt{6}(x-\sqrt{6})$ <==> $y = -6\sqrt{6}x + 1{,}5\sqrt{3}$

$t_1$: $y = -6\sqrt{6}x + 1{,}5\sqrt{3}$

f2) Wendetangente in $W_2(\sqrt{6} \mid 22{,}5)$:

$f'(\sqrt{6}) = -\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{6})^3 + 9\cdot(\sqrt{6}) = 6\sqrt{6}$ , damit gilt nach der PSF:

$6\sqrt{6} = \frac{y-22{,}5}{x-\sqrt{6}}$ <==> $y - 22{,}5 = 6\sqrt{6}(x-\sqrt{6})$ <==> $y = 6\sqrt{6}x - 1{,}5\sqrt{3}$

$t_2$: $y = 6\sqrt{6}x - 1{,}5\sqrt{3}$

35) $f(x) = -\frac{3}{5}x^2(x-2)(x+1)$

ausmultiplizieren der Gleichung ergibt:

$f(x) = -\frac{3}{5}x^4 + \frac{3}{5}x^3 + \frac{6}{5}x^2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = -\frac{3}{5}(-x)^4 + \frac{3}{5}(-x)^3 + \frac{6}{5}(-x)^2 = -\frac{3}{5}x^4 - \frac{3}{5}x^3 + \frac{6}{5}x^2 \neq f(x)$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(-\frac{3}{5}(-x)^4 + \frac{3}{5}(-x)^3 + \frac{6}{5}(-x)^2) = \frac{3}{5}x^4 + \frac{3}{5}x^3 - \frac{6}{5}x^2 \neq f(x))$

Das Schaubild $K_f$ ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s = f(0) = -\frac{3}{5} \cdot 0^2(0-2)(0+1) = 0$

$S_y\ (0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = -\frac{3}{5}x_S^2(x_S - 2)(x_S + 1)$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}\ (0 \mid 0)$, $S_{x2}\ (2 \mid 0)$, $S_{x3}\ (-1 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x) = -\frac{3}{5}x^4 + \frac{3}{5}x^3 + \frac{6}{5}x^2$

$f'(x) = -\frac{12}{5}x^3 + \frac{9}{5}x^2 + \frac{12}{5}x$

$f''(x) = -\frac{36}{5}x^2 + \frac{18}{5}x + \frac{12}{5}$

$f'''(x) = -\frac{72}{5}x + \frac{18}{5}$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -\frac{12}{5}x_e^3 + \frac{9}{5}x_e^2 + \frac{12}{5}x_e \quad | \cdot -\frac{3}{5}$$

$$0 = 4x_e^3 - 3x_e^2 - 4x_e \quad \text{<==>} \quad 0 = x_e(4x_e^2 - 3x_e - 4)$$

Fall1: $4x_e^2 - 3x_e - 4 = 0$:

$$x_{e1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-4)}}{2 \cdot 4} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{8}$$

$$x_{e1} = \frac{3 - \sqrt{73}}{8}$$

$$x_{e2} = \frac{3 + \sqrt{73}}{8}$$

Fall2: $x_e = 0$

$x_{e3} = 0$

$$f''\left(\frac{3-\sqrt{73}}{8}\right) = -\frac{36}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{73}}{8}\right)^2 + \frac{19}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{73}}{8}\right) + \frac{12}{5} = \frac{9\sqrt{73}-219}{40} \approx -3{,}55 < 0$$

==> Hochpunkt

$$f''\left(\frac{3+\sqrt{73}}{8}\right) = -\frac{36}{5} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{73}}{8}\right)^2 + \frac{19}{5} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{73}}{8}\right) + \frac{12}{5} = \frac{-9\sqrt{73}-219}{40} \approx -7{,}40 < 0$$

==> Hochpunkt

$$y_{e1} = f\left(\frac{3-\sqrt{73}}{8}\right) = -\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{73}}{8}\right)^4 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{73}}{8}\right)^3 + \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{73}}{8}\right)^2 = \frac{2481-219\sqrt{73}}{2560}$$

$$y_{e2} = f\left(\frac{3+\sqrt{73}}{8}\right) = -\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{73}}{8}\right)^4 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{73}}{8}\right)^3 + \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{73}}{8}\right)^2 = \frac{2481+219\sqrt{73}}{2560}$$

damit:

$H_1\left(\frac{3-\sqrt{73}}{8} \middle| \frac{2481-219\sqrt{73}}{2560}\right) \approx H_1(-0{,}69 \mid 0{,}24)$ Hochpunkt,

$H_2\left(\frac{3+\sqrt{73}}{8} \middle| \frac{2481+219\sqrt{73}}{2560}\right) \approx H_2(1{,}44 \mid 1{,}70)$ Hochpunkt

$T(0 \mid 0)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$-\frac{36}{5}x_W^2 + \frac{18}{5}x_W + \frac{12}{5} = 0 \quad | \cdot -\frac{5}{6}$$

$$6x_W^2 - 3x_W - 2 = 0$$

$$x_{W1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{12}$$

$$x_{W1} = \frac{3-\sqrt{57}}{12}$$

$$x_{W2} = \frac{3+\sqrt{57}}{12}$$

$$f'''\left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right) = -\frac{72}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right) + \frac{18}{5} = \frac{6\sqrt{57}}{5} \neq 0 \quad \text{==> Wendepunkt}$$

$$f'''\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right) = -\frac{72}{5} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right) + \frac{18}{5} = -\frac{6\sqrt{57}}{5} \neq 0 \quad \text{==> Wendepunkt}$$

$$y_{W1} = f\left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right) = -\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right)^4 + \frac{3}{5}\left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right)^3 + \frac{6}{5}\left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right)^2 = \frac{53}{96} - \frac{9\sqrt{57}}{160}$$

$$y_{W2} = f\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right) = -\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right)^4 + \frac{3}{5}\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right)^3 + \frac{6}{5}\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right)^2 = \frac{53}{96} + \frac{9\sqrt{57}}{160}$$

damit:

$W_1(\frac{3-\sqrt{57}}{12} \mid \frac{53}{96} - \frac{9\sqrt{57}}{160}) \approx W_1(-0{,}38 \mid 0{,}13)$ Wendepunkt,

$W_2(\frac{3+\sqrt{57}}{12} \mid \frac{53}{96} + \frac{9\sqrt{57}}{160}) \approx W_2(0{,}88 \mid 0{,}98)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1(\frac{3-\sqrt{57}}{12} \mid \frac{53}{96} - \frac{9\sqrt{57}}{160})$:

$$f'\left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right) = -\frac{12}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right)^3 + \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right)^2 + \frac{12}{5} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right) = \frac{81-19\sqrt{57}}{120},$$

damit gilt nach der PSF:

$$\frac{81-19\sqrt{57}}{120} = \frac{y - \left(\frac{53}{96} - \frac{9\sqrt{57}}{160}\right)}{x - \left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right)} \iff y - \left(\frac{53}{96} - \frac{9\sqrt{57}}{160}\right) = \frac{81-19\sqrt{57}}{120}\left(x - \left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}\right)\right)$$

$$\iff y = \left(\frac{27}{40} - \frac{19\sqrt{57}}{120}\right)x + \frac{19\sqrt{57}}{480} - \frac{59}{160}$$

$t_1$: $y = \left(\frac{27}{40} - \frac{19\sqrt{57}}{120}\right)x + \frac{19\sqrt{57}}{480} - \frac{59}{160}$

f2) Wendetangente in $W_2(\frac{3+\sqrt{57}}{12} \mid \frac{53}{96}+\frac{9\sqrt{57}}{160})$:

$$f'\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right)=-\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right)^3+\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right)^2+\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right)=\frac{81+19\sqrt{57}}{120},$$

damit gilt nach der PSF:

$$\frac{81+19\sqrt{57}}{120}=\frac{y-\left(\frac{53}{96}+\frac{9\sqrt{57}}{160}\right)}{x-\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right)} \Longleftrightarrow y-\left(\frac{53}{96}+\frac{9\sqrt{57}}{160}\right)=\frac{81+19\sqrt{57}}{120}\left(x-\left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow y=\left(\frac{27}{40}+\frac{19\sqrt{57}}{120}\right)x-\frac{19\sqrt{57}}{480}-\frac{59}{160}$$

$t_2$: $y=\left(\frac{27}{40}+\frac{19\sqrt{57}}{120}\right)x-\frac{19\sqrt{57}}{480}-\frac{59}{160}$