14) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - 3(-x)^2 + 9(-x) = -\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 - 9x \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(\frac{1}{4}(-x)^3 - 3(-x)^2 + 9(-x)) = \frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 9x \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = \frac{1}{4}x_S^3 - 3x_S^2 + 9x_S \quad | \cdot 4$

$0 = x_S^3 - 12x_S^2 + 36x_S$ <==> $0 = x_S(x_S^2 - 12x_S + 36)$

Fall 1: $0 = x_S^2 - 12x_S + 36$

$x_{S1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$

$x_{S1} = 6$

Fall2: $x_S = 0$

$x_{S2} = 0$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (0 | 0), S_{x2} (6 | 0)

c) Ableitungen

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$

$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6$

$f'''(x) = \frac{3}{2}$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{3}{4}x_e^2 - 6x_e + 9 \quad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$0 = x_e^2 - 8x_e + 12$$

$$x_{e1/2} \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2$$

$$x_{e1} = 2$$

$$x_{e1} = 6$$

$f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 6 = -3 < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(6) = \frac{3}{2} \cdot 6 - 6 = 3 > 0$ ==> Tiefpunkt

$$y_{e1} = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8$$

$$y_{e2} = f(6) = \frac{1}{4} \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + 9 \cdot 6 = 0$$

damit

H(2 | 8) Hochpunkt, T(6 | 0) Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$0 = \frac{3}{2}x_w - 6 \quad | \cdot 2$$

$$0 = 3x_w - 12$$

$$x_w = 4$$

$f'''(4) = \frac{3}{2} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_W = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 = 4$$

damit:

W(4 | 4) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(4 | 4):

$f'(4) = \frac{3}{4} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 9 = -3$, damit gilt nach der PSF:

$-3 = \frac{y-4}{x-4}$ <==> $y - 4 = -3(x-4)$ <==> $y = -3x + 16$

t: $y = -3x + 16$

15) $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ausmultiplizieren der Gleichung ergibt:

$f(x)=-\frac{1}{5}x^3+\frac{2}{5}x^2+\frac{3}{5}x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=-\frac{1}{5}(-x)^3+\frac{2}{5}(-x)^2+\frac{3}{5}(-x)=\frac{1}{5}x^3+\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{5}x\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(-\frac{1}{5}(-x)^3+\frac{2}{5}(-x)^2+\frac{3}{5}(-x))=$

$-(\frac{1}{5}x^3+\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{5}x)=-\frac{1}{5}x^3-\frac{2}{5}x^2+\frac{3}{5}x\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s=f(0)=-\frac{1}{5}\cdot 0^3+\frac{2}{5}\cdot 0^2+\frac{3}{5}\cdot 0=0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0=-\frac{1}{5}x_S^3+\frac{2}{5}x_S^2+\frac{3}{5}x_S \quad | \cdot -5$

$x_S^3-2x_S^2-3x_S=0$

$x_S(x_S^2-2x_S-3)=0$

Fall 1: $0=x_S^2-2x_S-3$

$x_{S1/2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}=1\pm 2$

$x_{S1}=-1$

$x_{S2}=3$

Fall2: $x_S=0$

$x_{S3}=0$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (-1 | 0), S_{x2} (3 | 0), S_{x3} (0 | 0),

c) Ableitungen

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x$$

$$f'(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$f''(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{5}$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -\frac{3}{5}x_e^2 + \frac{4}{5}x_e + \frac{3}{5} \quad | \quad \cdot -5$$

$$0 = 3x_e^2 - 4x_e - 3$$

$$x_{e1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 3\cdot(-3)}}{2\cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4\cdot 13}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$$

$$x_{e1} = \frac{2-\sqrt{13}}{3}$$

$$x_{e2} = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$$

$$f''\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right) = -\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right) + \frac{4}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{13} > 0 \text{ ==> Tiefpunkt}$$

$$f''(\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right) = -\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right) + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}\sqrt{13} < 0 \text{ ==> Hochpunkt}$$

$$y_{e1} = f\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right) = -\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)^3 + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)^2 + \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right) = \frac{14}{27} + \frac{26}{135}\sqrt{13} \approx 1{,}2129$$

$$y_{e2} = f\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right) = -\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)^3 + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)^2 + \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right) = \frac{14}{27} - \frac{26}{135}\sqrt{13} \approx -0{,}1759$$

damit

$$H\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3} \mid \frac{14}{27} - \frac{26}{135}\sqrt{13}\right) \approx \text{H(1,87 | 1,21) Hochpunkt}$$

$$T\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3} \mid \frac{14}{27} - \frac{26}{135}\sqrt{13}\right) \approx \text{T(-0,54 | -0,18) Tiefpunkt}$$

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$0 = -\frac{6}{5}x_w + \frac{4}{5} \quad | \cdot -5$$

$$0 = 6x_w - 4$$

$$x_w = \frac{2}{3}$$

$$f'''\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{6}{5} \neq 0 \quad \text{==> Wendepunkt}$$

$$y_w = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{27}$$

damit:

$$W\left(\frac{2}{3} \,|\, \frac{14}{27}\right) \approx \text{W(0,67 | 0,52) Wendepunkt}$$

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in $W\left(\frac{2}{3} \,|\, \frac{14}{27}\right)$:

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{13}{15}$$, damit gilt nach der PSF:

$$\frac{13}{15} = \frac{y - \frac{14}{27}}{x - \frac{2}{3}} \iff y - \frac{14}{27} = \frac{13}{15}\cdot\left(x - \frac{2}{3}\right) \iff y = \frac{13}{15}x - \frac{26}{45} + \frac{14}{27} = \frac{13}{15}x - \frac{8}{135}$$

t: $y = \frac{13}{15}x - \frac{8}{135}$

Nährung:

$t: y = 0{,}8667x - 0{,}0593$

16) $f(x)=\frac{1}{5}x^3+x^2-\frac{1}{5}x-1$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{5}(-x)^3+(-x)^2-\frac{1}{5}(-x)-1=-\frac{1}{5}x^3+x^2+x^2+\frac{1}{5}x-\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y- Achse.

a2)

$$-f(-x)=-\left(\frac{1}{5}(-x)^3+(-x)^2-\frac{1}{5}(-x)-1\right)=-\left(-\frac{1}{5}x^3+x^2+\frac{1}{5}x-1\right)=\frac{1}{5}x^3-x^2-\frac{1}{5}x+1\neq f(x)$$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O (0|0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_S=f(0)=\frac{1}{5}\cdot 0^3+0^2-\frac{1}{5}\cdot 0-1=-1$

$S_y(0 \mid -1)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{5}x_S^3+x_S^2-\frac{1}{5}x_S-1$

Nullstelle $x_s = 1$ durch Probieren. Also gilt:

$0=x_S^3+5_S^2-x_S-5=(x_S-1)\cdot R$

Bestimmen von R (x) durch Polynomdivision:

$x_S^3+5x_S^2-x_S-5:(x_S-1)=x_S^2+6x_S+5$

$x_S^3-x_S^2$

$--------$

$6x_S^2-x_S-5$

$6x_S^2-6x_S$

$--------$

$5x_S-5$

$5x_S-5$

$--------$

0

Lösungen bestimmen von $0=(x_S-1)(x_S^2+6x_S+5)$

Fall 1: $x_S^2+6x_S+5=0$

$$x_{S1/2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{-6\pm 4}{2}=-3\pm 2$$

$x_{s1} = -5$

$x_{s2} = -1$

Fall2: $x_S -1 = 0$

$x_S = 1$

$x_{S3} = 1$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (-1 | 0), S_{x2} (-5 | 0), S_{x3} (1 | 0),

c) Ableitungen

$$f(x)=\frac{1}{5}x^3+x^2-\frac{1}{5}x-1$$

$$f'(x)=\frac{3}{5}x^2+2x-\frac{1}{5}$$

$$f''(x)=\frac{6}{5}x+2$$

$$f'''(x)=\frac{6}{5}$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0=\frac{3}{5}x_e^2+2x_e-\frac{1}{5} \quad |\cdot 5$$

$$0=3x_e^2+10x_e-1$$

$$x_{e1/2}\ \frac{-10\pm\sqrt{100+4\cdot 3}}{6}=\frac{-10\pm 4\sqrt{7}}{6}=-\frac{5}{3}\pm\frac{2}{3}\sqrt{7}$$

$$x_{e1}=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}$$

$$x_{e2}=-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}$$

$$f''\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)=\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)+2=\frac{4\sqrt{7}}{5}>0 \text{ ==> Tiefpunkt}$$

$$f''\left(-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)=\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)+2=-\frac{4\sqrt{7}}{5}<0 \text{ ==> Hochpunkt}$$

$$y_{e1}=f\left(-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)=\frac{1}{5}\left(-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)^3+\left(-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)^2-\frac{1}{5}\left(-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)-1=\frac{32}{27}-\frac{112}{135}\sqrt{7}$$

$$y_{e2}=f\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)=\frac{1}{5}\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)^3+\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)^2-\frac{1}{5}\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)-1=\frac{32}{27}+\frac{112}{135}\sqrt{7}$$

damit

$$T\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\ \Big|\ \frac{32}{27}-\frac{112}{135}\sqrt{7}\right)\approx \text{T(0,10 | -1,00) Tiefpunkt}$$

$$H\left(-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\ \Big|\ \frac{32}{27}+\frac{112}{135}\sqrt{7}\right)\approx \text{H(-3,43 | 3,38) Hochpunkt}$$

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$0 = \frac{6}{5}x_w + 2 \quad | \cdot 5$$

$$0 = 6x_w + 10$$

$$x_w = -\frac{5}{3}$$

$f'''(-\frac{5}{3}) = \frac{6}{5} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_W = f(-\frac{5}{3}) = \frac{1}{5}\left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = \frac{32}{27}$$

damit:

$W\left(-\frac{5}{3} \mid \frac{32}{27}\right) \approx$ W(-1,67 | 1,19)

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in $W\left(-\frac{5}{3} \mid \frac{32}{27}\right)$:

$f'\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{1}{5} = -\frac{28}{15}$ damit gilt nach der PSF:

$$\frac{28}{15} = \frac{y - \frac{32}{27}}{x - \left(-\frac{5}{3}\right)} \iff y - \frac{32}{27} = -\frac{28}{15} \cdot \left(x + \frac{5}{3}\right) \iff y = -\frac{28}{15}x - \frac{28}{9} + \frac{32}{27} = -\frac{28}{15}x - \frac{52}{27}$$

t: $y = -\frac{28}{15}x - \frac{52}{27}$

Näherung:

$t: y = -1{,}87x - 1{,}93$

17) $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-\frac{9}{4}(-x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(\frac{1}{4}(-x)^3-\frac{9}{4}(-x))=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x=f(x)$

Das Schaubild K_f ist punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittspunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_S=f(0)=\frac{1}{4}\cdot 0^3-\frac{9}{4}\cdot 0=0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{4}x_S^3-\frac{9}{4}x_S \quad | \cdot 4$

$0=x_S^3-9x_S \iff 0=x_S(x_S^2-9)$

Fall1: $x_S^2-9=0$

$x_S^2=9$

$x_{S1}=-\sqrt{9}=-3$

$x_{S2}=\sqrt{9}=3$

Fall2: $x_S=0$

$x_{S3}=0$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(-3 \mid 0)$, $S_{x2}(3 \mid 0)$, $S_{x3}(0 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x$

$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}$

$f''(x)=\frac{3}{2}x$

$f'''(x)=\frac{3}{2}$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{3}{4}x_e^2 - \frac{9}{4} \quad | \cdot 4$$

$$0 = 3x_e^2 - 9 \iff 0 = x_e^2 - 3 \iff x_e^2 = 3$$

$$x_{e1} = -\sqrt{3}$$

$$x_{e2} = \sqrt{3}$$

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2} \cdot (-\sqrt{3}) < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{3})^3 - \frac{9}{4} \cdot (-\sqrt{3}) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$y_{e2} = f(\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3})^3 - \frac{9}{4} \cdot \sqrt{3} = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}$$

damit:

$H(-\sqrt{3} \mid \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}) \approx H(-1{,}73 \mid 2{,}56)$ Hochpunkt,

$T(\sqrt{3} \mid -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}) \approx T(1{,}73 \mid -2{,}56)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$\frac{3}{2}x_W = 0 \quad | : \frac{3}{2}$$

$$x_W = 0$$

$$f'''(0) = \frac{3}{2} \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_W = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - \frac{9}{4} \cdot 0 = 0$$

damit:

W(0 | 0) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(0 | 0):

$f'(0) = \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}$, damit gilt nach der PSF:

$$-\frac{9}{4} = \frac{y-0}{x-0} \iff y = -\frac{9}{4}x$$

t: $y = -\frac{9}{4}x$

18) $f(x)=\frac{1}{2}x(\frac{1}{4}x-1)^2$

ausmultiplizieren der Gleichung ergibt:

$f(x)=\frac{1}{32}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{32}(-x)^3-\frac{1}{4}(-x)^2+\frac{1}{2}(-x)=-\frac{1}{32}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x=\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(\frac{1}{32}(-x)^3-\frac{1}{4}(-x)^2+\frac{1}{2}(-x))=\frac{1}{32}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_s=f(0)=\frac{1}{32}\cdot 0^3-\frac{1}{4}\cdot 0^2+\frac{1}{2}\cdot 0=0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{32}x_S^3-\frac{1}{4}x_S^2+\frac{1}{2}x_S \quad | \cdot 32$

$0=x_S^3-8x_S^2+16x_S \Longleftrightarrow 0=x_S(x_S^2-8x_S+16)$

Fall1: $0=x_S^2-8x_S+16$

$x_{S1/2}=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}=4$

$x_{S1}=4$

Fall2: $x_S=0$

$x_{S2}=0$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (0 | 0), S_{x2} (4 | 0)

c) Ableitungen

$f(x)=\frac{1}{32}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$

$f'(x)=\frac{3}{32}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$f''(x)=\frac{3}{16}x-\frac{1}{2}$

$f'''(x)=\frac{3}{16}$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{3}{32}x_e^2 - \frac{1}{2}x_e + \frac{1}{2} \quad | \cdot 32$$

$$0 = 3x_e^2 - 16x_e + 16$$

$$x_{e1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm 8}{6} = \frac{8 \pm 4}{3}$$

$$x_{e1} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$$

$$x_{e2} = 4$$

$$f''(\frac{4}{3}) = \frac{3}{16} \cdot (\frac{4}{3})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$f''(4) = \frac{3}{16} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} = 2{,}5 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(\frac{4}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}(\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} - 1)^2 = \frac{8}{27}$$

$$y_{e2} = f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4(\frac{1}{4} \cdot 4 - 1)^2 = 0$$

damit:

$H(\frac{4}{3} \mid \frac{8}{27}) \approx H(1{,}33 \mid 0{,}30)$ Hochpunkt, $T(4 \mid 0)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$\frac{3}{16}x_W - \frac{1}{2} = 0 \quad | \cdot 16$$

$$3x_W - 8 = 0$$

$$x_W = \frac{8}{3}$$

$$f'''(\frac{8}{3}) = \frac{3}{16} \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_W = f(\frac{8}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}(\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} - 1)^2 = \frac{4}{27}$$

damit:

$W(\frac{8}{3} \mid \frac{4}{27}) \approx W(2{,}67 \mid 0{,}15)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W($\frac{8}{3}$ | $\frac{4}{27}$):

$f'\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{3}{32}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$, damit gilt nach der PSF:

$-\frac{1}{6}=\frac{y-\frac{4}{27}}{x-\frac{8}{3}}$ <==> $y-\frac{4}{27}=-\frac{1}{6}\left(x-\frac{8}{3}\right)$ <==> $y=-\frac{1}{6}x+\frac{32}{54}$

t: $y=-\frac{1}{6}x+\frac{32}{54}$

19) gegeben: $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 9x - 12$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = -\frac{3}{4}(-x)^3 + 9(-x) - 12 = \frac{3}{4}x^3 - 9x - 12 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(-\frac{3}{4}(-x)^3 + 9(-x) - 12) = -\frac{3}{4}x^3 + 9x - 12 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$$y_S = f(0) = -\frac{3}{4} \cdot 0^3 + 9 \cdot 0 - 12 = -12$$

$S_y(0 \mid -12)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$$0 = -\frac{3}{4}x_S{}^3 + 9x_S - 12$$

Nullstelle $x_s = 2$ durch Probieren. Also gilt:

$$0 = -\frac{3}{4}x_S{}^3 + 9x_S - 12 \quad | \cdot (-\frac{4}{3})$$

$$0 = x_S{}^3 - 12x_S + 16 = (x_S - 2) \cdot R$$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$$(x_S{}^3 - 12x_S + 16) : (x_S - 2) = x_S^2 + 2x_S - 8$$

$$-x_S^3 + 2x_S^2$$

$$2x_S^2 - 12x_S + 16$$

$$-2x_S^2 + 4x_S$$

$$-8x_S + 16$$

$$8x_S - 16$$

0

Lösungen bestimmen von $0 = (-\frac{3}{4}x_S{}^3 + 9x_S - 12) \cdot (x_S - 2)$

Fall1: $x_S^2 + 2x_S - 8 = 0$

$$x_{S1/2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$$

$$x_{S1} = -1 - 3 = -4$$

$$x_{S2} = -1 + 3 = 2$$

Fall2: $x_S - 2 = 0$

$x_S = 2$

$x_{S3} = 2$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(-4 \mid 0)$, $S_{x2}(2 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 9x - 12$

$f'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 9$

$f''(x) = -\frac{9}{2}x$

$f'''(x) = -\frac{9}{2}$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = -\frac{9}{4}x_e{}^2 + 9 \;|\cdot -\frac{4}{9}$

$0 = x_e{}^2 - 4$

$x_e{}^2 = 4$

$x_{e1} = 2$

$x_{e1} = -2$

f ''(-2) = $-\frac{9}{2}\cdot$-2 =9 > 0 ==> Tiefpunkt

f ''(2) = $-\frac{9}{2}\cdot$2 =-9 < 0 ==> Hochpunkt

$y_{e1} = f(-2) = -\frac{3}{4}\cdot(-2)^3 + 9\cdot(-2) - 12 = -24$

$y_{e2} = f(2) = -\frac{3}{4}\cdot 2^3 + 9\cdot 2 - 12 = 0$

damit:

T(-2 |-24) Tiefpunkt, H(2 |0) Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$-\frac{9}{2}x_W = 0$

$x_W = 0$

f ''' (0) = $-\frac{9}{2} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_W = f(0) = -\frac{3}{4}\cdot 0^3 + 9\cdot 0 - 12 = -12$

damit:

W(0 |-12) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(0 |-12)

$f'(0) = -\frac{9}{4} \cdot 0^2 + 9 = 9$, damit gilt nach der PSF:

$9 = \frac{y-(-12)}{x-0}$ <==> $y + 12 = 9x$ <==> $y = 9x - 12$

t: $y = 9x - 12$

20) gegeben: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 2 = -x^3 - 6x^2 - 9x - 2 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -((-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 2) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 2 = -2$

$S_y(0 \mid -2)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = x_S{}^3 - 6x_S{}^2 + 9x_S - 2$

Nullstelle $x_s = 2$ durch Probieren. Also gilt:

$0 = x_S{}^3 - 6x_S{}^2 + 9x_S - 2 = (x_S - 2) \cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(x_S{}^3 - 6x_S{}^2 + 9x_S - 2) : (x_S - 2) = (x_S{}^2 - 4x_S + 1)$

$-x_S^3 + 2x_S^2$

$-----$

$-4x_S^2 + 9x_S - 2$

$4x_S^2 - 8x_S$

$-------$

$x_S - 2$

$-x_S + 2$

$----$

0

Lösungen bestimmen von $0 = (x_S{}^3 - 6x_S{}^2 + 9x_S - 2) \cdot (x_S - 2)$

Fall1: $x_S{}^2 - 4x_S + 1 = 0$

$x_{S1/2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3} = 2 \pm \sqrt{3}$

$x_{S1} = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}267$

$x_{S2} = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}732$

Fall2: $x_S - 2 = 0$

$x_S = 2$

$x_{S3} = 2$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (2-$\sqrt{3}$ | 0) $\approx$ S_{x1} (0,27 | 0), S_{x2} (2+ $\sqrt{3}$ | 0) $\approx$ S_{x2} (3,73| 0), S_{x3}(2 | 0)

c) Ableitungen

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = 3x_e^{\,2} - 12x_e + 9 \ | : 3$

$0 = x_e^{\,2} - 4x_e + 3$

$x_{e1/2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$

$x_{e1} = 3$

$x_{e1} = 1$

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = +6 > 0$ ==> Tiefpunkt

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0$ ==> Hochpunkt

$y_{e1} = f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 2 = -2$

$y_{e2} = f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2 = 2$

damit:

T(3 |-2) Tiefpunkt, H(1 |2) Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$6x_W - 12 = 0 \ | : 6$

$x_W - 2 = 0$

$x_W = 2$

$f'''(2) = 6 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_W = f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 2 = 0$

damit:

W(2 | 0) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(2 |0)

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$, damit gilt nach der PSF:

$-3 = \dfrac{y - 0}{x - 2}$ <==> $y = -3(x-2)$ <==> $y = -3x + 6$

t: $y = -3x + 6$

21) $f(x)=\frac{3}{4}(4x^3-3x+1)$

ausmultiplizieren der Gleichung ergibt:

$f(x)=3x^3-\frac{9}{4}x+\frac{3}{4}$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=3(-x)^3-\frac{9}{4}(-x)+\frac{3}{4}=-3x^3+\frac{9}{4}x+\frac{3}{4}\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(3(-x)^3-\frac{9}{4}(-x)+\frac{3}{4})=3x^3-\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s=f(0)=3\cdot 0^3-\frac{9}{4}\cdot 0+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

$S_y(0 \mid \frac{3}{4})$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0=3x_S^3-\frac{9}{4}x_S+\frac{3}{4} \quad |\cdot 4$

$0=12x_S^3-9x_S+3$

Nullstelle x_s = -1 durch Probieren. Also gilt:

$0=12x_S^3-9x_S+3=(x_S+1)\cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(12x_S^3-9x_S+3:(x_S+1))=12x_S^2-12x_S+3$

$12x_S^3+12x_S^2$

$-------$

$-12x_S^2-9x_S+3$

$-12x_S^2-12x_S$

$---------$

$3x_S+3$

$3x_S+3$

$----$

0

Lösungen bestimmen von $0=(12x_S^2-12x_S+3)\cdot(x_S+1)$

Fall1: $12x_S^2-12x_S+3=0$

<==> $4x_S^2-4x_S+1$

$$x_{S1/2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\frac{1}{2}$$

$$x_{S1}=\frac{1}{2}$$

Fall2: $x_S+1=0$

$x_S=-1$

$x_{S2}=-1$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (-1 | 0), S_{x2} (0,5 | 0)

c) Ableitungen

$$f(x)=3x^3-\frac{9}{4}x+\frac{3}{4}$$

$$f'(x)=9x^2-\frac{9}{4}$$

$$f''(x)=18x$$

$$f'''(x)=18$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = 9x_e^2 - \frac{9}{4} \quad | \cdot \frac{4}{9}$

$0 = 4x_e^2 - 1 \iff x_e^2 = \frac{1}{4}$

$x_{e1} = -\frac{1}{2}$

$x_{e2} = \frac{1}{2}$

$f''(-\frac{1}{2}) = 18 \cdot (-\frac{1}{2}) = -9 < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(\frac{1}{2}) = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9 > 0$ ==> Tiefpunkt

$y_{e1} = f(-\frac{1}{2}) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = 1{,}5$

$y_{e2} = f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0$

damit:

H(-0,5 | 1,5), T(0,5 | 0) Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$18x_W = 0 \quad | : 18$

$x_W = 0$

$f'''(0) = 18 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_W = f(0) = 3 \cdot 0^3 - \frac{9}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

damit:

W(0 | $\frac{3}{4}$) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(0 | $\frac{3}{4}$):

$f'(0) = 9 \cdot 0^2 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}$, damit gilt nach der PSF:

$-\frac{9}{4} = \frac{y - \frac{3}{4}}{x - 0} \iff y - \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}x \iff y = -\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$

t: $y = -\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$

22) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = \frac{1}{5}(-x)^4 - 5 = \frac{1}{5}x^4 - 5 = f(x)$

Das Schaubild K_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(\frac{1}{5}(-x)^4 - 5 = \frac{1}{5}x^4 - 5) = -\frac{1}{5}x^4 + 5 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s = f(0) = \frac{1}{5} \cdot 0^4 - 5 = -5$

S_y (0 | -5)

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = \frac{1}{5}x_S^4 - 5 \mid \cdot 5$

$0 = x_S^4 - 25$ <==> $x_S^4 = 25$

$x_{S1} = \sqrt[4]{25} = \sqrt{5}$

$x_{S2} = -\sqrt[4]{25} = -\sqrt{5}$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} ($-\sqrt{5}$ | 0) $\approx$ S_{x1} (-2,24 | 0)

S_{x2} ($\sqrt{5}$ | 0) $\approx$ S_{x2} (2,24 | 0)

c) Ableitungen

$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$

$f'(x) = \frac{4}{5}x^3$

$f''(x) = \frac{12}{5}x^2$

$f'''(x) = \frac{24}{5}x$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = \frac{4}{5}x_e^3 \quad | : \frac{4}{5}$

$x_e^3 = 0$

$x_{e1} = 0$

$f''(0) = \frac{12}{5} \cdot 0^2 = 0$ ==> keine Aussage möglich.

aber: VZW bei $f'(0)$ von - nach + ==> Tiefpunkt

$y_{e1} = f(0) = \frac{1}{5} \cdot 0^4 - 5 = -5$

damit:

T(0 | -5) Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$\frac{12}{5}x_W^2 = 0 \;|\; : \frac{12}{5}$

$x_W^2 = 0$

$x_W = 0$

$f'''(0) = \frac{24}{5} \cdot 0 = 0$ ==> keine Aussage möglich.

aber: kein VZW bei $f''(0)$ ==> kein Wendepunkt

damit:

keine Wendepunkte

f) Wendetangenten

Da es keine Wendepunkte gibt, gibt es auch keine Wendetangenten.

23) $f(x)=\frac{1}{8}x^4-x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{8}(-x)^4-(-x)=\frac{1}{8}x^4+x\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(\frac{1}{8}(-x)^4-(-x))=-\frac{1}{8}x^4-x\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_s=f(0)=\frac{1}{8}\cdot 0^4-0=0$

S_y (0 | 0)

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{8}x_S^4-x_S \mid \cdot 8$

$0=x_S^4-8x_S$ <==> $0=x_S(x_S^3-8)$

Fall 1: $0=x_S^3-8$

$x_S^3=8$

$x_{S1}=-\sqrt[3]{8}=-2$

$x_{S2}=\sqrt[3]{8}=2$

Fall2: $x_S=0$

$x_{S3}=0$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (-2 | 0), S_{x2} (2 | 0), S_{x2} (0 | 0)

c) Ableitungen

$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-1$

$f''(x)=\frac{3}{2}x^2$

$f'''(x)=3x$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{1}{2}x_e^3 - 1 \quad | \cdot 2$$

$$0 = x_e^3 - 2 \; <==> \; x_e^3 = 2$$

$$x_e = \sqrt[3]{2}$$

$$f''(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{2})^2 > 0 \; ==> \text{Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt[3]{2})^4 - (\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

damit:

$T(\sqrt[3]{2} \;|\; -\frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{1}{3}}) \approx T(1{,}26 \,|\, -0{,}95)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$\frac{3}{2}x_W^2 = 0 \quad | \; : \frac{3}{2}$$

$$x_W^2 = 0$$

$$x_W = 0$$

$f'''(0) = 3 \cdot 0 = 0$ ==> keine Aussage möglich.

aber: kein VZW bei $f''(0)$ ==> kein Wendepunkt

damit:

keine Wendepunkte

f) Wendetangenten

Da es keine Wendepunkte gibt, gibt es auch keine Wendetangenten.

24) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = -\frac{1}{8}(-x)^4 + \frac{1}{2}(-x)^3 = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(-\frac{1}{8}(-x)^4 + \frac{1}{2}(-x)^3) = \frac{1}{8}x^4 + x \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s = f(0) = -\frac{1}{8}\cdot 0^4 + \frac{1}{2}\cdot 0^3 = 0$

S_y (0 | 0)

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = -\frac{1}{8}x_S^4 + \frac{1}{2}x_S^3 \quad | \cdot -8$

$0 = x_S^4 - 4x_S^3$ <==> $0 = x_S^3(x_S - 4)$

Fall 1: $0 = x_S - 4$

$x_S = 4$

$x_{S1} = 4$

Fall2: $x_S^3 = 0$

$x_S = 0$

$x_{S2} = 0$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (0 | 0), S_{x2} (4 | 0)

c) Ableitungen

$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

$f'''(x) = 3x + 3$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -\frac{1}{2}x_e^3 + \frac{3}{2}x_e^2 \quad | \cdot -2$$

$$0 = x_e^3 - 3x_e^2 \iff x_e^2(x_e - 3)$$

Fall1: $x_e - 3 = 0$:

$x_e = 3$

$x_{e1} = 3$

Fall2: $x_e^2 = 0$

$x_{e2} = 0$

$$f''(0) = -\frac{3}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$$ ==> keine Ausage möglich

aber: kein VZW bei $f'(0)$ ==> kein Extrempunkt

$$f''(3) = -\frac{3}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 = -4{,}5 < 0$$ ==> Hochpunkt

$$y_{e1} = f(3) = -\frac{1}{8} \cdot 3^4 + \frac{1}{2} \cdot 3^3 = 3{,}375$$

damit:

H(3 | 3,375) Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$-\frac{3}{2}x_W^2 + 3x_W = 0 \quad | \cdot -\frac{2}{3}$$

$$x_W^2 - 2x_W = 0 \iff x_W(x_W - 2) = 0$$

Fall1: $x_W - 2 = 0$:

$x_{W1} = 2$

Fall2: $x_W = 0$

$x_{W2} = 0$

$$f'''(0) = 3 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 0$$ ==> Wendepunkt

$$f'''(2) = 3 \cdot 2 + 3 = 9 \neq 0$$ ==> Wendepunkt

$$y_{W1} = f(0) = -\frac{1}{8} \cdot 0^4 + \frac{1}{2} \cdot 0^3 = 0$$

$$y_{W2} = f(2) = -\frac{1}{8} \cdot 2^4 + \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 2$$

damit:

$W_1(0 | 0)$ Wendepunkt, $W_2(2 | 2)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1(0 \mid 0)$:

$f'(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^3 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 = 0$, damit gilt nach der PSF:

$0 = \frac{y-0}{x-0}$ <==> y = 0

t_1: y = 0

f2) Wendetangente in $W_1(2 \mid 2)$:

$f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 = 2$, damit gilt nach der PSF:

$2 = \frac{y-2}{x-2}$ <==> $y - 2 = 2(x-2)$ <==> $y = 2x - 2$

t_2: y = 2x-2

25) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^4-\frac{1}{2}(-x)^2=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2=f(x)$

Das Schaubild K_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(\frac{1}{4}(-x)^4-\frac{1}{2}(-x)^2)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s=f(0)=\frac{1}{4}\cdot 0^4-\frac{1}{2}\cdot 0^2=0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0=\frac{1}{4}x_S^4-\frac{1}{2}x_S^2 \quad | \cdot 4$

$0=x_S^4-2x_S^2$ <==> $0=x_S^2(x_S^2-2)$

Fall 1: $0=x_S^2-2$

$x_S^2=2$

$x_{S1}=-\sqrt{2}$

$x_{S1}=\sqrt{2}$

Fall2: $x_S=0$

$x_S=0$

$x_{S3}=0$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(-\sqrt{2} \mid 0)$, $S_{x2}(\sqrt{2} \mid 0)$, $S_{x3}(0 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$

$f'(x)=x^3-x$

$f''(x)=3x^2-1$

$f'''(x)=6x$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = x_e^3 - x_e$

$0 = x_e^3 - x_e$ <==> $x_e(x_e^2 - 1)$

Fall1: $x_e^2 = 1$:
$x_{e1} = -1$
$x_{e2} = 1$

Fall2: $x_e = 0$
$x_{e3} = 0$

$f''(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 1 = 2 > 0$ ==> Tiefpunkt

$f''(1) = 3\cdot 1^2 - 1 = 2 > 0$ ==> Tiefpunkt

$f''(0) = 3\cdot 0^2 - 1 = -1 < 0$ ==> Hochpunkt

$$y_{e1} = f(-1) = \frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 = -0{,}25$$

$$y_{e2} = f(1) = \frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 = -0{,}25$$

$$y_{e3} = f(0) = \frac{1}{4}\cdot 0^4 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = 0$$

damit:

$T_1(-1|-0{,}25)$, $T_2(1|-0{,}25)$, $H(0\,|\,0)$ Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$3x_W^2 - 1 = 0$

$3x_W^2 = 1$ <==> $x_W^2 = \frac{1}{3}$

$$x_{W1} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x_{W2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$f'''(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = 6\cdot -\sqrt{\frac{1}{3}} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$f'''(\sqrt{\frac{1}{3}}) = 6\cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_{W1} = f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = -\frac{5}{36}$$

$$y_{W2} = f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 - \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = -\frac{5}{36}$$

damit:

$W_1(-\sqrt{\frac{1}{3}}\ |\ -\frac{5}{36}) \approx W_1(-0{,}58\ |\ 0{,}14)$ Wendepunkt,

$W_2(\sqrt{\frac{1}{3}}\ |\ -\frac{5}{36})$ $W_1(0{,}58\ |\ 0{,}14)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1(-\sqrt{\frac{1}{3}} \mid -\frac{5}{36})$:

$f'\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$, damit gilt nach der PSF:

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{y--\frac{5}{36}}{x--\sqrt{\frac{1}{3}}} \Longleftrightarrow y+\frac{5}{36}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \Longleftrightarrow y=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}x+\frac{1}{12}$$

t_1: $y=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}x+\frac{1}{12}$

f2) Wendetangente in $W_2(\sqrt{\frac{1}{3}} \mid -\frac{5}{36})$:

$f'\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$, damit gilt nach der PSF:

$$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{y--\frac{5}{36}}{x-\sqrt{\frac{1}{3}}} \Longleftrightarrow y+\frac{5}{36}=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \Longleftrightarrow y=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}x+\frac{1}{12}$$

t_2: $y=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}x+\frac{1}{12}$

26) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x^2-4)$

ausmultiplizieren der Gleichung ergibt:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = -\frac{1}{2}(-x)^4 + 2(-x)^2 = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 = f(x)$

Das Schaubild K_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(-\frac{1}{2}(-x)^4 + 2(-x)^2) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 = 0$

$S_y\,(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = -\frac{1}{2}x_S^2(x_S^2 - 4) \mid \cdot -2$

$0 = x_S^2(x_S^2 - 4)$

Fall 1: $0 = x_S^2 - 4$

$x_S^2 = 4$

$x_{S1} = -2$

$x_{S2} = 2$

Fall2: $x_S^2 = 0$

$x_S = 0$

$x_{S3} = 0$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}\,(-2 \mid 0)$, $S_{x2}\,(2 \mid 0)$, $S_{x2}\,(0 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2$

$f'(x) = -2x^3 + 4x$

$f''(x) = -6x^2 + 4$

$f'''(x) = -12x$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = -2x_e^3 + 4x_e \quad | : -2$

$0 = x_e^3 - 2x_e$ <==> $0 = x_e(x_e^2 - 2)$

Fall1: $x_e^2 - 2 = 0$:

$x_e^2 = 2$

$x_{e1} = -\sqrt{2}$

$x_{e1} = \sqrt{2}$

Fall2: $x_e^2 = 0$

$x_{e3} = 0$

$f''(-\sqrt{2}) = -6 \cdot (-\sqrt{2})^2 + 4 = -8 < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(\sqrt{2}) = -6 \cdot \sqrt{2}^2 + 4 = -8 < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(0) = -6 \cdot 0^2 + 4 = 4 > 0$ ==> Tiefpunkt

$y_{e1} = f(-\sqrt{2}) = -\frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{2})^4 + 2 \cdot (-\sqrt{2})^2 = 2$

$y_{e2} = f(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^4 + 2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2$

$y_{e3} = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 = 0$

damit:

$H_1(-\sqrt{2} \mid 2) \approx H(-1{,}41 \mid 2)$ Hochpunkt, $H_2(\sqrt{2} \mid 2) \approx H(1{,}41 \mid 2)$ Hochpunkt, $T(0 \mid 0)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$-6x_W^2 + 4 = 0 \mid : -2$

$3x_W^2 - 2 = 0$ <==> $3x_W^2 = 2$ <==> $x_W^2 = \frac{2}{3}$

$x_{W1} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$x_{W2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$f'''(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = 3 \cdot -\sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$f'''(\sqrt{\frac{2}{3}}) = 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_{W1} = f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 + 2 \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{10}{9}$

$y_{W2} = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 + 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{10}{9}$

damit:

$W_1(-\sqrt{\frac{2}{3}} \mid \frac{10}{9})$ Wendepunkt ≈ $W_1(-0{,}82 \mid 1{,}11)$,

$W_2(\sqrt{\frac{2}{3}} \mid \frac{10}{9})$ Wendepunkt ≈ $W_2(0{,}82 \mid 1{,}11)$

f) Wendetangenten

f1) Wendetangente in $W_1(-\sqrt{\frac{2}{3}} \mid \frac{10}{9})$:

$f'\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -2\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 + 4\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, damit gilt nach der PSF:

$$-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{y-\frac{10}{9}}{x--\sqrt{\frac{2}{3}}} \Longleftrightarrow y-\frac{10}{9} = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(x+\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}x-\frac{2}{3}$$

t_1: $y = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}x-\frac{2}{3}$

f2) Wendetangente in $W_1(\sqrt{\frac{2}{3}} \mid \frac{10}{9})$:

$f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -2\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 + 4\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, damit gilt nach der PSF:

$$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{y-\frac{10}{9}}{x-\sqrt{\frac{2}{3}}} \Longleftrightarrow y-\frac{10}{9} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(x+\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Longleftrightarrow y = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}x-\frac{2}{3}$$

t_2: $y = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}x-\frac{2}{3}$