1 ÜBUNGSAUFGABEN MESK 2BKI1

Zeichnen Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen, in jeweils dem Bereich, in dem interessante Punkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte) vorkommen. Untersuchen Sie die Schaubilder jeweils bzgl:

a) Symmetrie
b) Achsenschnittpunkte
c) Ableitungen
d) Extrempunkte
e) Wendepunkte und Wendetangenten

1) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2$

3) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$

4) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

5) $f(x)=x^3+2x^2-\frac{11}{4}x+\frac{3}{4}$

6) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$

7) $f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

8) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5$

9) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

10) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x$

11) $f(x) = 3x^3 - x - 2$

12) $f(x) = x^3 - 7$

13) $f(x) = \frac{1}{48}x^3 - x$

14) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$

15) $f(x) = \frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

16) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + x^2 - \frac{1}{5}x - 1$

17) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$

18) $f(x) = \frac{1}{2}x(\frac{1}{4}x - 1)^2$

19) $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 9x - 12$

20) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

21) $f(x)=\frac{3}{4}(4x^3-3x+1)$

22) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$

23) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x$

24) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$

25) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

26) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x^2 - 4)$

27) $f(x) = (x^2 - 1)(x-2)^2$

28) $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2$

29) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 3$

30) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2$

31) $f(x) = \frac{1}{40}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 2$

32) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x$

33) $f(x) = \frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{16}x^3$

34) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{9}{2}x^2$

35) $f(x) = -\frac{3}{5}x^2(x-2)(x+1)$

Lösungen:

1) gegeben: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = -\frac{1}{3}\cdot(-x)^3 + 2\cdot(-x)^2 - 3\cdot(-x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(-\frac{1}{3}\cdot(-x)^3 + 2\cdot(-x)^2 - 3\cdot(-x)) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = f(0) = -\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 2\cdot 0^2 - 3\cdot 0 = 0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = -\frac{1}{3}x_S^3 + 2x_S^2 - 3x_S \quad | \cdot (-3)$

$0 = x_S^3 - 6x_S^2 + 9x_S \iff 0 = x_S(x_S^2 - 6x_S + 9)$

Fall1: $x_S^2 - 6x_S + 9 = 0$

$x_{S1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

$x_{S1} = 3$

Fall2: $x_S = 0$

$x_{S2} = 0$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(3 \mid 0)$, $S_{x2}(0 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$

$f''(x) = -2x + 4$

$f'''(x) = -2$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -x_e^2 + 4x_e - 3$$

$$x_{e1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = 2 \pm -1$$

$$x_{e1} = 1$$

$$x_{e2} = 3$$

$f''(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2 > 0$ ==> Tiefpunkt

$f''(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0$ ==> Hochpunkt

$$y_{e1} = f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -\frac{4}{3}$$

$$y_{e2} = f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$$

damit:

$T(1\,|-\frac{4}{3}) \approx T(1\,|\,-1{,}33)$ Tiefpunkt, $H(3\,|0)$ Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$-2x_W + 4 = 0$$

$$x_W = 2$$

$f'''(2) = -2 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_W = f(2) = -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

damit:

$W(2\,|-\frac{2}{3}) \approx W(2\,|\,-0{,}67)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in $W(2\,|-\frac{2}{3})$

$f'(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$, damit gilt nach der PSF:

$$1 = \frac{y - (-\frac{2}{3})}{x - 2} \iff y + \frac{2}{3} = x - 2 \iff y = x - \frac{8}{3}$$

t: $y = x - \frac{8}{3}$

2) gegeben: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{3}\cdot(-x)^3-\frac{2}{3}\cdot(-x)^2-\frac{5}{3}\cdot(-x)+2=-\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x+2\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(\frac{1}{3}\cdot(-x)^3-\frac{2}{3}\cdot(-x)^2-\frac{5}{3}\cdot(-x)+2)=\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x-2\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_S=f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3-\frac{2}{3}\cdot 0^2-\frac{5}{3}\cdot 0+2=2$

$S_y(0 \mid 2)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{3}x_S^3-\frac{2}{3}x_S^2-\frac{5}{3}x_S+2 \quad |\cdot 3$

$0=x_S^3-2x_S^2-5x_S+6$

Nullstelle $x_s = -2$ durch Probieren. Also gilt:

$0=x_S^3-2x_S^2-5x_S+6=(x_S+2)\cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(x_S^3-2x_S^2-5x_S+6):(x_S+2)=x_S^2-4x_S+3$

$x_S^3+2x_S^2$

$-----$

$-4x_S^2-5x_S+6$

$-4x_S^2-8x_S$

$-------$

$3x_S+6$

$3x_S+6$

$----$

0

Lösungen bestimmen von $0=(x_S^2-4x_S+3)\cdot(x_S+2)$

Fall1: $x_S^2-4x_S+3=0$

$x_{S1/2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}=2\pm1$

$x_{S1}=2-1=1$

$x_{S2}=2+1=3$

Fall2: $x_S + 2 = 0$

$x_S = -2$

$x_{S3} = -2$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(1 \mid 0)$, $S_{x2}(3 \mid 0)$, $S_{x3}(-2 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2$

$f'(x)=x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

$f''(x)=2x-\frac{4}{3}$

$f'''(x)=2$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e)=0$

$0=x_e^2-\frac{4}{3}x_e-\frac{5}{3}$

$0=3x_e^2-4x_e-5$

$x_{e1/2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3\cdot(-5)}}{2\cdot3}=\frac{4\pm\sqrt{4\cdot19}}{6}=\frac{4\pm2\sqrt{19}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{19}}{3}$

$x_{e1}=\frac{2-\sqrt{19}}{3}\approx-0{,}79$

$x_{e2}=\frac{2+\sqrt{19}}{3}\approx2{,}12$

$f''(\frac{2-\sqrt{19}}{3})=2\cdot\frac{2-\sqrt{19}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4-2\sqrt{19}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{-2\sqrt{19}}{3}<0$ ==> Hochpunkt

$f''(\frac{2+\sqrt{19}}{3})=2\cdot\frac{2+\sqrt{19}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4+2\sqrt{19}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{19}}{3}>0$ ==> Tiefpunkt

$y_{e1}=f(\frac{2-\sqrt{19}}{3})=\frac{1}{3}\cdot(\frac{2-\sqrt{19}}{3})^3-\frac{2}{3}\cdot(\frac{2-\sqrt{19}}{3})^2-\frac{5}{3}\cdot(\frac{2-\sqrt{19}}{3})+2=\frac{38\sqrt{19}+56}{81}\approx2{,}74$

$y_{e2}=f(\frac{2+\sqrt{19}}{3})=\frac{1}{3}\cdot(\frac{2+\sqrt{19}}{3})^3-\frac{2}{3}\cdot(\frac{2+\sqrt{19}}{3})^2-\frac{5}{3}\cdot(\frac{2+\sqrt{19}}{3})+2=\frac{56-38\sqrt{19}}{81}\approx-1{,}35$

damit:

$H(\frac{2-\sqrt{19}}{3}|\frac{38\sqrt{19}+56}{81})\approx H(-0{,}79\,|\,2{,}74)$ Hochpunkt,

$T(\frac{2+\sqrt{19}}{3}|\frac{56-38\sqrt{19}}{81})\approx T(\,2{,}12\,|\,-1{,}35)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$2x_W - \frac{4}{3} = 0$$

$$x_W = \frac{2}{3}$$

$f'''(\frac{2}{3}) = 6 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_W = f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^3 - \frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{3})^2 - \frac{5}{3} \cdot (\frac{2}{3}) + 2 = \frac{56}{81} \approx 0{,}69$$

damit:

$W(\frac{2}{3} \mid \frac{56}{81}) \approx W(0{,}67 \mid 0{,}69)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in $W(\frac{2}{3} \mid \frac{56}{81})$:

$f'(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^2 - \frac{4}{3} \cdot (\frac{2}{3}) - \frac{5}{3} = \frac{4}{9} - \frac{8}{9} - \frac{5}{3} = \frac{4-8-15}{9} = -\frac{19}{9}$, damit gilt nach der PSF:

$$-\frac{19}{9} = \frac{y - \frac{56}{81}}{x - \frac{2}{3}} \iff y - \frac{56}{81} = -\frac{19}{9}(x - \frac{2}{3}) \iff y = -\frac{19}{9}x + \frac{173}{81}$$

t: $y = -\frac{19}{9}x + \frac{173}{81}$

Näherung:

t: y = - 2,11 x + 2,14

3) gegeben: $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = -(-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + 1 = x^3 - 2 \cdot x^2 + 1 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(-(-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + 1) = -x^3 + 2 \cdot x^2 - 1 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_s = f(0) = -0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$

$S_y(0 \mid 1)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = -x_S{}^3 - 2x_S{}^2 + 1$

Nullstelle $x_s = -1$ durch Probieren. Also gilt:

$0 = -x_S^3 - 2x_S^2 + 1 = (x_S + 1) \cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(-x_S^3 - 2x_S^2 + 1) : (x_S + 1) = -x_S^2 - x_S + 1$

$-x_S^3 - x_S^2$

$-----$

$-x_S^2 + 1$

$-x_S^2 - x_S$

$-----$

$x_S + 1$

$x_S + 1$

$---$

0

Lösungen bestimmen von $0 = (-x_S{}^2 - x_S + 1) \cdot (x_S + 1)$

Fall1: $-x_S^2 - x_S + 1 = 0$

$$x_{S1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2}$$

$$x_{S1} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62$$

$$x_{S2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62$$

Fall2: $x_S + 1 = 0$

$x_S = -1$

$x_{S3} = -1$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(-1 \mid 0)$, $S_{x2}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \mid 0\right) \approx S_{x2}(-1{,}62 \mid 0)$, $S_{x3}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \mid 0\right) \approx S_{x2}(0{,}62 \mid 0)$

c) Ableitungen:

$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$

$f'(x) = -3x^2 - 4x$

$f''(x) = -6x - 4$

$f'''(x) = -6$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = -3x_e{}^2 - 4x_e$

$0 = x_e \cdot (-3x_e - 4)$

Fall1: $x_e = 0$:

$x_{e1} = 0$

Fall2: $-3x_e - 4 = 0$

$x_{e2} = -\frac{4}{3}$

$f''(0) = -6 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(-\frac{4}{3}) = -6 \cdot (-\frac{4}{3}) - 4 = 4 > 0$ ==> Tiefpunkt

$y_{e1} = f(0) = -0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$

$y_{e2} = f(-\frac{4}{3}) = -(-\frac{4}{3})^3 - 2 \cdot (-\frac{4}{3})^2 + 1 = -\frac{5}{27}$

damit:

H(0 | 1) Hochpunkt, $T(-\frac{4}{3} | -\frac{5}{27}) \approx T(-1{,}33 \mid -0{,}19)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$-6x_w - 4 = 0 \Longleftrightarrow x_w = -\frac{2}{3}$

$f'''(-\frac{2}{3}) = -6 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_W = f(-\frac{2}{3}) = -(-\frac{2}{3})^3 - 2 \cdot (-\frac{2}{3})^2 + 1 = \frac{11}{27}$

damit:

$W(-\frac{2}{3} | \frac{11}{27}) \approx W(-0{,}67 \mid 0{,}41)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W($-\frac{2}{3}$ | $\frac{11}{27}$):

$f'(1) = -3 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - 4 \cdot (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$, damit gilt nach der PSF:

$\frac{4}{3} = \frac{y - \frac{11}{27}}{x - (-\frac{2}{3})}$ <==> $\frac{4}{3} = \frac{y - \frac{11}{27}}{x + \frac{2}{3}}$ <==> $y - \frac{11}{27} = \frac{4}{3} \cdot (x + \frac{2}{3})$ <==> $y = \frac{4}{3}x + \frac{35}{27}$

t: $y = \frac{4}{3}x + \frac{35}{27}$

Näherung:

t: y = 1,33 x + 1,30

4) gegeben: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^3 + \frac{9}{4}(-x)^2 - 6(-x) + \frac{9}{2} = \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 6x + \frac{9}{2} \neq f(x)$

Das Schaubild ist nicht achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse

a2) $-f(-x) = -\left(-\frac{1}{4}(-x)^3 + \frac{9}{4}(-x)^2 - 6(-x) + \frac{9}{2}\right) = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 6x + \frac{9}{2}\right) =$

$-\frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 6x - \frac{9}{2} \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch.

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0^3 + \frac{9}{4} \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$

$S_y(0 \mid \frac{9}{2})$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = -\frac{1}{4}x_S^3 + \frac{9}{4}x_S^2 - 6x_S + \frac{9}{2} \mid \cdot (-4)$

$0 = x_S^3 - 9x_S^2 + 24x_S - 18$

Nullstelle $x_s = 3$ durch Probieren. Also gilt:

$0 = x_S^3 - 9x_S^2 + 24x_S - 18 = (x_S - 3) \cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(x_S^3 - 9x_S^2 + 24x_S - 18) : (x_S - 3) = x_S^2 - 6x_S + 6$

$x_S^3 - 3x_S^2$

$-6x_S^2 + 24x_S - 18$

$-6x_S^2 + 18x_S$

$6x_S - 18$

$6x_S - 18$

0

Lösungen bestimmen von $x_S^3 - 9x_S^2 + 24x_S - 18 = (x_S - 3) \cdot (x_S^2 - 6x_S + 6)$

Fall1: $x_S^2 - 6x_S + 6 = 0$

Fall2: $x_S - 3 = 0$
$x_S = 3$
$x_{S3} = 3$

$$x_{S1/2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

$x_{S1} = 3 + \sqrt{3} \approx 4{,}73$

$x_{S2} = 3 - \sqrt{3} \approx 1{,}62$

damit Nullstellen von f:
S_{x1} (3 | 0), S_{x2} ($3 + \sqrt{3}$ | 0), S_{x3}($3 - \sqrt{3}$ | 0)

c) Ableitungen

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{2}$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte E(x_e | y_e): $f'(x_e) = 0$

$$0 = -\frac{3}{4}x_e^{\ 2} + \frac{9}{2}x_e - 6 \ \ | \cdot -\frac{4}{3}$$

$$0 = x_e^{\ 2} - 6x_e + 8$$

$$x_{e1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$x_{e1} = 4$

$x_{e2} = 2$

$f''(2) = -\frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{9}{2} = 1{,}5 > 0$ ==> Tiefpunkt

$f''(4) = -\frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{9}{2} = -1{,}5 < 0$ ==> Hochpunkt

$$y_{e1} = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^3 + \frac{9}{4} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + \frac{9}{2} = -0{,}5$$

$$y_{e2} = f(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^3 + \frac{9}{4} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + \frac{9}{2} = 0{,}5$$

damit:
T(2 | -0,5) Hochpunkt, H(4 | 0,5) Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$0 = -\frac{3}{2}x_w + \frac{9}{2}$$

$$x_W = 3$$

$$f'''(3) = -\frac{3}{2} \neq 0$$ ==> Wendepunkt

$$y_W = f(3) = -\frac{1}{4}\cdot 3^3 + \frac{9}{4}\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + \frac{9}{2} = 0$$

damit:

W(3 | 0) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(3 | 0):

$f'(3) = -\frac{3}{4}\cdot 3^2 + \frac{9}{2}\cdot 3 - 6 = \frac{3}{4}$, damit gilt nach der PSF:

$$\frac{3}{4} = \frac{y-0}{x-3} \iff y = \frac{3}{4}\cdot(x-3) \iff y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

t: $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$

5) gegeben: $f(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{4}$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 - \frac{11}{4} \cdot (-x) + \frac{3}{4} = -x^3 + 2x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{3}{4} \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -((-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 - \frac{11}{4} \cdot (-x) + \frac{3}{4}) = x^3 - 2x^2 - \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - \frac{11}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

$S_y(0 \mid \frac{3}{4})$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = x_S^3 + 2x_S^2 - \frac{11}{4}x_S + \frac{3}{4} \mid \cdot 4$

$0 = 4x_S^3 + 8x_S^2 - 11x_S + 3$

Nullstelle $x_s = -3$ durch Probieren. Also gilt:

$0 = 4x_S^3 + 8x_S^2 - 11x_S + 3 = (x_S + 3) \cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(4x_S^3 + 8x_S^2 - 11x_S + 3) : (x_S + 3) = 4x_S^2 - 4x_S + 1$

$4x_S^3 + 12x_S^2$

$------$

$-4x_S^2 - 11x_S + 3$

$-4x_S^2 - 12x_S$

$---------$

$x_S + 3$

$x_S + 3$

$----$

0

Lösungen bestimmen von $0 = (4x_S^2 - 4x_S + 1) \cdot (x_S + 3)$

Fall1: $4x_S^2 - 4x_S + 1 = 0$

$x_{S1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$

$x_{S1} = \frac{1}{2}$

Fall2: $x_S + 3 = 0$

$x_S = -3$

$x_{S2} = -3$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (0,5 | 0), S_{x2} (-3 | 0)

c) Ableitungen:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - \frac{11}{4}$$

$$f''(x) = 6x + 4$$

$$f'''(x) = 6$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = 3{x_e}^2 + 4x_e - \frac{11}{4}$$

$$0 = 12{x_e}^2 + 16x_e - 11$$

$$x_{e1/2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-11)}}{2 \cdot 12} = \frac{-16 \pm 28}{24} = \frac{-4 \pm 7}{6}$$

$$x_{e1} = \frac{-11}{6} \approx 1{,}83$$

$$x_{e1} = \frac{1}{2}$$

$$f''(-\frac{11}{6}) = 6 \cdot (-\frac{11}{6}) + 4 = -7 < 0 \text{==> Hochpunkt}$$

$$f''(\frac{1}{2}) = 6 \cdot (\frac{1}{2}) + 4 = 7 > 0 \text{==> Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(\frac{-11}{6}) = (\frac{-11}{6})^3 + 2 \cdot (\frac{-11}{6})^2 - \frac{11}{4} \cdot (\frac{-11}{6}) + \frac{3}{4} = \frac{343}{54} \approx 6{,}35$$

$$y_{e2} = f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 + 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 - \frac{11}{4} \cdot (\frac{1}{2}) + \frac{3}{4} = 0$$

damit:

$H(-\frac{11}{6} \mid \frac{343}{54}) \approx H(-1{,}83 \mid 6{,}35)$ Hochpunkt, $T(0{,}5 \mid 0)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$6x_w + 4 = 0 \Longleftrightarrow x_w = -\frac{2}{3}$

$f'''(-\frac{2}{3}) = 6 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_W = (-\frac{2}{3})^3 + 2 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - \frac{11}{4} \cdot (-\frac{2}{3}) + \frac{3}{4} = \frac{343}{108} \approx 3{,}18$$

damit:

$W(-\frac{2}{3} \mid \frac{343}{108}) \approx W(-0{,}67 \mid 3{,}18)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W($-\frac{2}{3}$ | $\frac{11}{27}$):

$f'(-\frac{2}{3}) = 3\cdot(-\frac{2}{3})^2 + 4\cdot(-\frac{2}{3}) - \frac{11}{4} = -\frac{49}{12}$, damit gilt nach der PSF:

$$-\frac{49}{12} = \frac{y-\frac{343}{108}}{x+\frac{2}{3}} \iff y-\frac{343}{108} = -\frac{49}{12}\cdot(x+\frac{2}{3}) \iff y = -\frac{49}{12}x-\frac{49}{108}$$

t: $y = -\frac{49}{12}x - \frac{49}{108}$

Näherung:

t: y = - 4,08 x - 0,45

6) gegeben: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^3 - 3(-x)^2 = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -\left(\frac{1}{2}(-x)^3 - 3(-x)^2\right) = -\left(-\frac{1}{2}x^3 - 3x^2\right) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch.

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = \frac{1}{2} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = \frac{1}{2}x_S^3 - 3x_S^2 \mid \cdot 2$

$0 = x_S^3 - 6x_S^2$ <==> $0 = x_S^2(x_S - 6)$

Fall1: $0 = x_S - 6$

$x_s = 6$

$x_{s1} = 6$

Fall2: $x_S^2 = 0$

$x_S = 0$

$x_{S2} = 0$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} $(6 \mid 0)$, S_{x2} $(0 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$f''(x) = 3x - 6$

$f'''(x) = 3$

d) Extrempunkte

Extrempunkte E($x_e \mid y_e$) : $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{3}{2}x_e{}^2 - 6x \;\mid \cdot\frac{2}{3}$$

$0 = x_e{}^2 - 4x_e$ <==> $0 = x_e(x_e - 4)$

Fall1: $x_e - 4 = 0$ Fall2: $x_e = 0$

$x_e = 4$ $x_{e2} = 0$

$x_{e1} = 4$

f "(4) = 3· 4 - 6 = 6 > 0 ==> Tiefpunkt

f "(0) = 3· 0 - 6 = -6 < 0 ==> Hochpunkt

$$y_{e1} = f(4) = \frac{1}{2}\cdot 4^3 - 3\cdot 4^2 = -16$$

$$y_{e2} = f(0) = \frac{1}{2}\cdot 0^3 - 3\cdot 0^2 = 0$$

damit:

T(4 | -16) Tiefpunkt, H(0 | 0) Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte W(x_w|y_w): f "(x_w) = 0

$0 = 3x_w - 6$

$x_W = 2$

$f'''(2) = 3 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_W = f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 = -8$$

damit:

W(2 | -8) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(2 | -8):

$f'(2) = \frac{3}{2}\cdot 2^2 - 6\cdot 2 = -6$, damit gilt nach der PSF:

$-6 = \frac{y-(-8)}{x-2}$ <==> $y + 8 = -6\cdot(x-2)$ <==> $y = -6x + 4$

t: y = -6x + 4

7) gegeben: $f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = (-x)^3 - \frac{4}{3}\cdot(-x)^2 + \frac{1}{3}\cdot(-x) = -x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -((-x)^3 - \frac{4}{3}\cdot(-x)^2 + \frac{1}{3}\cdot(-x)) = x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = f(0) = 0^3 - \frac{4}{3}\cdot 0^2 + \frac{1}{3}\cdot 0 = 0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = x_S^3 - \frac{4}{3}x_S^2 + \frac{1}{3}x_S \quad |\cdot 3$

$0 = 3x_S^3 - 4x_S^2 + x_S$ <==> $0 = x_S(3x_S^2 - 4x_S + 1)$

Fall1: $0 = 3x_S^2 - 4x_S + 1$

$x_{S1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{2 \pm 1}{3}$

$x_{S1} = \frac{1}{3}$

$x_{S2} = 1$

Fall2: $x_S = 0$

$x_{s3} = 0$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} ($\frac{1}{3}$ | 0), S_{x2} (1 | 0), S_{x3} (0 | 0)

c) Ableitungen

$f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{3}$

$f''(x) = 6x - \frac{8}{3}$

$f'''(x) = 6$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = 3x_e^2 - \frac{8}{3}x_e + \frac{1}{3} \quad | \cdot 3$$

$$0 = 9x_e^2 - 8x_e + 1$$

$$x_{e1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{18} = \frac{8 \pm \sqrt{4 \cdot 7}}{18} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{18} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{9}$$

$$x_{e1} = \frac{4 - \sqrt{7}}{9} \approx 0{,}15$$

$$x_{e2} = \frac{4 + \sqrt{7}}{9} \approx 0{,}74$$

$$f''(\frac{4 - \sqrt{7}}{9}) = 6 \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{9} - \frac{8}{3} = 2 \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{3} - \frac{8}{3} = \frac{-2\sqrt{7}}{3} < 0 \text{ ==> Hochpunkt}$$

$$f''(\frac{4 + \sqrt{7}}{9}) = 6 \cdot \frac{4 + \sqrt{7}}{9} - \frac{8}{3} = 2 \cdot \frac{4 + \sqrt{7}}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3} > 0 \text{ ==> Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(\frac{4 - \sqrt{7}}{9}) = (\frac{4 - \sqrt{7}}{9})^3 - \frac{4}{3} \cdot (\frac{4 - \sqrt{7}}{9})^2 + \frac{1}{3} \cdot (\frac{4 - \sqrt{7}}{9}) = \frac{5\sqrt{7}}{243} - \frac{20}{729} \approx 0{,}03$$

$$y_{e2} = f(\frac{4 + \sqrt{7}}{9}) = (\frac{4 + \sqrt{7}}{9})^3 - \frac{4}{3} \cdot (\frac{4 + \sqrt{7}}{9})^2 + \frac{1}{3} \cdot (\frac{4 + \sqrt{7}}{9}) = -\frac{5\sqrt{7}}{243} - \frac{20}{729} \approx -0{,}08$$

damit:

$T(\frac{4 - \sqrt{7}}{9} \;|\frac{5\sqrt{7}}{243} - \frac{20}{729}) \approx T(0{,}15 \,|\, 0{,}03)$ Tiefpunkt,

$H(\frac{4 + \sqrt{7}}{9} \;|-\frac{5\sqrt{7}}{243} - \frac{20}{729}) \approx H(0{,}74 \,|\, -0{,}08)$ Hochpunkt,

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$6x_W - \frac{8}{3} = 0$$

$$x_W = \frac{4}{9}$$

$$f'''(\frac{4}{9}) = 6 \neq 0 \text{ ==> Wendepunkt}$$

$$f(\frac{4}{9}) = (\frac{4}{9})^3 - \frac{4}{3} \cdot (\frac{4}{9})^2 + \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{9}) = -\frac{20}{729} \approx -0{,}03$$

damit:

$W(\frac{4}{9} \;|-\frac{20}{729}) \approx W(0{,}44 \,|\, -0{,}03)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W$(\frac{4}{9} \mid -\frac{20}{729})$

$f'(\frac{4}{9}) = 3 \cdot (\frac{4}{9})^2 - \frac{8}{3} \cdot (\frac{4}{9}) + \frac{1}{3} = \frac{16}{27} - \frac{32}{27} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{27}$, damit gilt nach der PSF:

$-\frac{7}{27} = \frac{y-(-\frac{20}{729})}{x-\frac{4}{9}}$ <==> $y + \frac{20}{729} = -\frac{7}{27}(x - \frac{4}{9})$ <==> $y + \frac{20}{729} = -\frac{7}{27}x + \frac{28}{243}$

<==> $y = -\frac{7}{27}x + \frac{64}{729}$

t: $y = -\frac{7}{27}x + \frac{64}{729}$

Näherung:

t: y = - 0,26 x + 0,09

8) gegeben: $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{4}\cdot(-x)^3-\frac{3}{4}\cdot(-x)^2+5=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(\frac{1}{4}\cdot(-x)^3-\frac{3}{4}\cdot(-x)^2+5)=\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-5\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_S=\frac{1}{4}\cdot 0^3-\frac{3}{4}\cdot 0^2+5=5$

$y_s = f(0) = -0^3-2\cdot 0^2+1=1$

$S_y(0 \mid 5)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{4}x_S^3-\frac{3}{4}x_S^2+5 \mid \cdot 4$

$0=x_S^3-3x_S^2+20$

Nullstelle x_s = -2 durch Probieren. Also gilt:

$0=x_S^3-3x_S^2+20=(x_S+2)\cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(x_S^3-3x_S^2+20):(x_S+2)=x_S^2-5x_S+10$

$x_S^3+2x_S^2$

$-5x_S^2+20$

$-5x_S^2-10x_S$

$10x_S+20$

$10x_S+20$

0

Lösungen bestimmen von $0=(x_S^2-5x_S+10)\cdot(x_S+2)$

Fall1: $x_S^2-5x_S+10=0$

$x_{S1/2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{-15}}{2}$

keine Lösung

Fall2: $x_S + 2 = 0$

x_S = - 2

x_{S1} = -2

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (-2 | 0)

c) Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{2}$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0=\frac{3}{4}x_e^2-\frac{3}{2}x_e \quad |\cdot 4$$

$$0=3x_e^2-6x_e \quad \Longleftrightarrow \quad 0=x_e(3x_e-6)$$

Fall1: $x_e = 0$

$x_{e1} = 0$

Fall2: $3x_e-6=0$

$x_{e2} = 2$

$$f''(0)=\frac{3}{2}\cdot 0-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}<0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$f''(2)=\frac{3}{2}\cdot 2-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}>0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$y_{e1}=f(0)=\frac{1}{4}\cdot 0^3-\frac{3}{4}\cdot 0^2+5=5$$

$$y_{e2}=f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-\frac{3}{4}\cdot 2^2+5=4$$

damit:

H(0 | 5) Hochpunkt, T(2 | 4) Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$0=\frac{3}{2}x_W-\frac{3}{2} \quad |\cdot 2$$

$$0=3x_W-3$$

$x_w = 1$

$$f'''(1)=\frac{2}{3}\neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_W=\frac{1}{4}\cdot 1^3-\frac{3}{4}\cdot 1^2+5=4{,}5$$

damit:

W(1 | 4,5) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(1 | 4,5):

$f'(1)=\frac{3}{4}\cdot 1^2-\frac{3}{2}\cdot 1=-\frac{3}{4}$, damit gilt nach der PSF:

$-\frac{3}{4}=\frac{y-4{,}5}{x-1}$ <==> $y-4{,}5=-\frac{3}{4}(x-1)$ <==> $y=-\frac{3}{4}x+\frac{21}{4}$

t: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{21}{4}$

9) gegeben: $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = (-x)^3 + 7\cdot(-x)^2 + 7\cdot(-x) - 15 = -x^3 + 7x^2 - 7x - 15 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -((-x)^3 + 7\cdot(-x)^2 + 7\cdot(-x) - 15) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = 0^3 + 7\cdot 0^2 + 7\cdot 0 - 15 = -15$

$S_y(0 \mid -15)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = x_S^3 + 7x_S^2 + 7x_S - 15$

Nullstelle $x_s = 1$ durch Probieren. Also gilt:

$0 = x_S^3 + 7x_S^2 + 7x_S - 15 = (x_S - 1)\cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(x_S^3 + 7x_S^2 + 7x_S - 15) : (x_S - 1) = x_S^2 + 8x_S + 15$

$(x_S^3 - x_S^2$

$-----$

$8x_S^2 + 7x_S - 15$

$8x_S^2 - 8x_S$

$------$

$15x_S - 15$

$15x_S - 15$

$------$

0

Lösungen bestimmen von $0 = (x_S^2 + 8x_S + 15)\cdot(x_S - 1)$

Fall1: $x_S^2 + 8x_S + 15 = 0$

$$x_{S1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2} = -4 \pm 1$$

$x_{S1} = -5$

$x_{S2} = -3$

Fall2: $x_S + 2 = 0$

$x_S = -2$

$x_{S3} = -2$

damit Nullstellen von f:

S_{x1} (-5 | 0), S_{x2} (-3 | 0), S_{x3}(1 | 0)

c) Ableitungen

$f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

$f'(x) = 3x^2 + 14x + 7$

$f''(x) = 6x + 14$

$f'''(x) = 6$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$0 = 3x_e^2 + 14x_e + 7$

$$x_{e1/2} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{2 \cdot 3} = \frac{-14 \pm \sqrt{112}}{6} = \frac{-14 \pm \sqrt{16 \cdot 7}}{6} = \frac{-14 \pm 4\sqrt{7}}{6} = \frac{-7 \pm 2\sqrt{7}}{3}$$

$$x_{e1} = \frac{-7 - 2\sqrt{7}}{3} \approx -4{,}10$$

$$x_{e2} = \frac{-7 + 2\sqrt{7}}{3} \approx -0{,}57$$

$f''(\frac{-7-2\sqrt{7}}{3}) = 6 \cdot (\frac{-7-2\sqrt{7}}{3}) + 14 = -14 - 4\sqrt{7} + 14 = -4\sqrt{7} < 0$ ==> Hochpunkt

$f''(\frac{-7+2\sqrt{7}}{3}) = 6 \cdot (\frac{-7+2\sqrt{7}}{3}) + 14 = -14 + 4\sqrt{7} + 14 = 4\sqrt{7} > 0$ ==> Tiefpunkt

$$y_{e1} = f(\frac{-7-2\sqrt{7}}{3}) = (\frac{-7-2\sqrt{7}}{3})^3 + 7 \cdot (\frac{-7-2\sqrt{7}}{3})^2 + 7 \cdot (\frac{-7-2\sqrt{7}}{3}) - 15 = \frac{112\sqrt{7} - 160}{27} \approx 5{,}05$$

$$y_{e1} = f(\frac{-7+2\sqrt{7}}{3}) = (\frac{-7+2\sqrt{7}}{3})^3 + 7 \cdot (\frac{-7+2\sqrt{7}}{3})^2 + 7 \cdot (\frac{-7+2\sqrt{7}}{3}) - 15 = \frac{-112\sqrt{7} - 160}{27} \approx -16{,}90$$

damit:

$H(\frac{-7-2\sqrt{7}}{3} | \frac{112\sqrt{7}-160}{27}) \approx H(-4{,}10 | 5{,}05)$ Hochpunkt,

$T(\frac{-7+2\sqrt{7}}{3} | \frac{-112\sqrt{7}-160}{27}) \approx T(-0{,}57 | -16{,}90)$ Tiefpunkt,

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$0 = 6x_W + 14$

$$x_W = -\frac{14}{6}$$

$f'''(\frac{-14}{6}) = 6 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_W = f(\frac{-14}{6}) = (\frac{-14}{6})^3 + 7 \cdot (\frac{-14}{6})^2 + 7 \cdot (\frac{-14}{6}) - 15 = -\frac{160}{27} \approx -5{,}93$$

damit:

$W(-\frac{14}{6} | -\frac{160}{27}) \approx W(-2{,}33 | -5{,}93)$ Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W$(-\frac{14}{6}\mid-\frac{160}{27})$:

$f'(-\frac{14}{6}) = 3\cdot(-\frac{14}{6})^2 + 14(-\frac{14}{6}) + 7 = -\frac{28}{3}$, damit gilt nach der PSF:

$$-\frac{28}{3} = \frac{y-(-\frac{160}{27})}{x-(-\frac{14}{6})} \iff y+\frac{160}{27} = -\frac{28}{3}(x+\frac{14}{6}) \iff y+\frac{160}{27} = -\frac{28}{3}x-\frac{196}{9}$$

$\iff y = -\frac{28}{3}x - \frac{748}{27}$

t: $y = -\frac{28}{3}x - \frac{748}{27}$

Näherung:

t: y = - 9,33 x – 27,70

10) gegeben: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = -\frac{1}{3}(-x)^3 + 2(-x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(-\frac{1}{3}\cdot(-x)^3 + 2\cdot(-x)) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x = f(x)$

Das Schaubild K_f ist punktsymmetrisch.

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = -\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 2\cdot 0 = 0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = -\frac{1}{3}x_S^3 + 2x_S \quad | \cdot (-3)$

$0 = x_S^3 - 6x_S$ <==> $0 = x_S(x_S^2 - 6)$

Fall1: $x_S^2 - 6 = 0$

$x_S^2 - 6 = 0$

$x_S^2 = 6$

$x_{S1} = \sqrt{6}$

$x_{S2} = -\sqrt{6}$

Fall2: $x_S = 0$

$x_S = 0$

$x_{S2} = 0$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(\sqrt{6} \mid 0)$, $S_{x2}(-\sqrt{6} \mid 0)$, $S_{x3}(0 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x$

$f'(x) = -x^2 + 2$

$f''(x) = -2x$

$f'''(x) = -2$

d) Extrempunkte
Extrempunkte E($x_e \mid y_e$) : $f'(x_e) = 0$

$0 = -x_e^2 + 2$

$x_e^2 = 2$

$x_{e1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

$x_{e2} = -\sqrt{2} \approx -1{,}41$

$f''(\sqrt{2}) = -2 \cdot \sqrt{2} < 0$ ==> Hochpunkt

$f''((-\sqrt{2})) = -2 \cdot (-\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} > 0$ ==> Tiefpunkt

$y_{e1} = f(\sqrt{2}) = -\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2})^3 + 2 \cdot (\sqrt{2}) = -\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1{,}89$

$y_{e1} = f(-\sqrt{2}) = -\frac{1}{3} \cdot (-\sqrt{2})^3 + 2 \cdot (-\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \approx -1{,}89$

damit:

H($\sqrt{2} \mid \frac{4\sqrt{2}}{3}$) $\approx$ H(1,41 | 1,89) Hochpunkt,

T($-\sqrt{2} \mid -\frac{4\sqrt{2}}{3}$) $\approx$ T(-1,41 | -1,89) Tiefpunkt

e) Wendepunkte
Wendepunkte W(x_w|y_w): f "(x_w) = 0

$0 = -2x_W$

$x_W = 0$

$f'''(0) = -2 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_W = -\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0 = 0$

damit:
W(0 | 0) Wendepunkt

f) Wendetangenten
Gleichung der Wendetangente in W(0 | 0):

$f'(0) = -0^2 + 2 = 2$, damit gilt nach der PSF:

$2 = \frac{y-0}{x-0}$ <==> $y = 2x$

t: $y = 2x$

11) gegeben: f(x) = 3x ^{3} - x - 2

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = 3(-x)^3 - (-x) - 2 = -3x^3 + x - 2 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -(3(-x)^3 - (-x) - 2) = 3x^3 - x + 2 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittspunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = f(0) = 3 \cdot 0^3 - 0 - 2 = -2$

$S_y(0 \mid -2)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = 3x_S^3 - x_s - 2$

Nullstelle $x_s = 1$ durch Probieren. Also gilt:

$0 = 3x_S^3 - x_S - 2 = (x_S - 1) \cdot R$

Bestimmen von R(x) durch Polynomdivision:

$(3x_S^3 - x_S - 2) : (x_S - 1) = 3x_S^2 + 3x_S + 2$

$3x_S^3 - 3x_S^2$

$------$

$3x_S^2 - x_s - 2$

$3x_S^2 - 3x_S$

$---------$

$2x_S - 2$

$2x_S - 2$

$-----$

0

Lösungen bestimmen von $0 = (3x_S^2 + 3x_S + 2) \cdot (x_S - 1) = 0$

Fall1: $3x_S^2 + 3x_S + 2 = 0$

keine Lösung

Fall2: $x_S - 1 = 0$

$x_S = 1$

$x_{S1} = 1$

damit Nullstellen von f:

$S_x\ (1 \mid 0)$

c) Ableitung

$f(x) = 3x^3 - x - 2$

$f'(x) = 9x^2 - 1$

$f''(x) = 18x$

$f'''(x) = 18$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = 9x_e^{\,2} - 1$$

$$9x_e^2 = 1$$

$$x_e^2 = \frac{1}{9}$$

$$x_{e1} = \frac{1}{3}$$

$$x_{e2} = -\frac{1}{3}$$

$f''(\frac{1}{3}) = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6 > 0$ ==> Tiefpunkt

$f''(-\frac{1}{3}) = 18 \cdot (-\frac{1}{3}) = -6 < 0$ ==> Hochpunkt

$$y_{e1} = f(\frac{1}{3}) = 3 \cdot (\frac{1}{3})^3 - \frac{1}{3} - 2 = -\frac{20}{9}$$

$$y_{e2} = f(-\frac{1}{3}) = 3 \cdot (-\frac{1}{3})^3 - (-\frac{1}{3}) - 2 = -\frac{16}{9}$$

damit:

$T(\frac{1}{3} \mid -\frac{20}{9}) \approx T(0{,}33 \mid -2{,}22)$ Tiefpunkt,

$H(-\frac{1}{3} \mid -\frac{16}{9}) \approx H(-0{,}33 \mid -1{,}77)$ Hochpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$0 = 18x_w$$

$$x_W = 0$$

$f'''(0) = 18 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$$y_W = f(0) = 3 \cdot 0^3 - 0 - 2 = -2$$

damit:

W(0 | -2) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(0 | -2):

$f'(0) = 9 \cdot 0^2 - 1 = -1$, damit gilt nach der PSF:

$$-1 = \frac{y-(-2)}{x-0} \iff y+2 = -x \iff y = -x-2$$

t: y = -x - 2

12) gegeben: $f(x) = x^3 - 7$

a) Symmetrie

a1) $f(-x) = (-x)^3 - 7 = -x^3 - 7 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x) = -((-x)^3 - 7) = x^3 + 7 \neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittspunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s) \in K_f$

$y_S = f(0) = 0^3 - 7 = -7$

$S_y(0 \mid -7)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0) \in K_f$

$0 = x_S^3 - 7$

$x_S^3 = 7$

$x_S = \sqrt[3]{7} \approx 1{,}91$

$S_x(\sqrt[3]{7} \mid 0)$

c) Ableitung

$f(x) = x^3 - 7$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

d) Extrempunkte

Extrempunkte E($x_e \mid y_e$) : $f'(x_e) = 0$

$0 = 3x_e{}^2$

$x_e^2 = 0$

$x_e = 0$

$f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$, also keine Aussage möglich (*).

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$0 = 6x_w$

$x_W = 0$

$f'''(0) = 6 \neq 0$ ==> Wendepunkt

$y_W = f(0) = 0^3 - 7 = -7$

damit:

W(0 | -7) Wendepunkt, siehe oben (*). Damit also Aussage möglich.

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(0 | -7):

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, damit gilt nach der PSF:

$0 = \frac{y-7}{x-0}$ <==> $y - 7 = 0$ <==> $y = 7$

t: $y = 7$

13) $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

a) Symmetrie

a1) $f(-x)=\frac{1}{48}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{48}x^3+x\neq f(x)$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

a2) $-f(-x)=-(\frac{1}{48}(-x)^3-(-x))=\frac{1}{48}x^3-x=f(x)$

Das Schaubild K_f ist punktsymmetrisch bzgl. O(0 | 0).

b) Achsenschnittspunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 \mid y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 \mid y_s)\in K_f$

$y_S=f(0)=\frac{1}{48}\cdot 0^3-0=0$

$S_y(0 \mid 0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s \mid 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s \mid 0)\in K_f$

$0=\frac{1}{48}x_S^3-x_S \quad |\cdot 48$

$0=x_S^3-48x_S$ <==> $0=x_S(x_S^2-48)$

Fall1: $x_S^2-48=0$

$x_S^2=48$

$x_{S1}=-\sqrt{48}$

$x_{S2}=\sqrt{48}$

Fall2: $x_S=0$

$x_{S1}=0$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(-\sqrt{48} \mid 0)\approx S_{x1}(-6{,}93 \mid 0)$, $S_{x2}(\sqrt{48} \mid 0)\approx S_{x2}(6{,}93 \mid 0)$, $S_{x3}(0 \mid 0)$

c) Ableitungen

$f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

$f'(x)=\frac{1}{16}x^2-1$

$f''(x)=\frac{1}{8}x$

$f'''(x)=\frac{1}{8}$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{1}{16}x_e^2 - 1 \mid \cdot 16$$

$$0 = x_e^2 - 16 \iff x_e^2 = 16$$

$x_{e1} = -4$

$x_{e2} = 4$

$$f''(-4) = \frac{1}{8}\cdot(-4) = -\frac{1}{2} < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$f''(4) = \frac{1}{8}\cdot 4 = \frac{1}{2} > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(-4) = \frac{1}{48}\cdot(-4)^3 - (-4) = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$$

$$y_{e2} = f(4) = \frac{1}{48}\cdot(4)^3 - 4 = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$$

damit:

$H(-4 \mid \frac{8}{3}) \approx H(-4 \mid 2{,}67)$ Hochpunkt,

$T(4 \mid -\frac{8}{3}) \approx T(4 \mid -2{,}67)$ Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$\frac{1}{8}x_W = 0 \mid : \frac{1}{8}$$

$$x_W = 0$$

$$f'''(0) = \frac{1}{8} \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_W = f(0) = \frac{1}{48}\cdot 0^3 - 0 = 0$$

damit:

W(0 | 0) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(0 | 0):

$f'(0) = \frac{1}{16}\cdot 0^2 - 1 = -1$, damit gilt nach der PSF:

$$-1 = \frac{y-0}{x-0} \iff y = -x$$

t: $y = -x$