

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) 3P

A und B seien Mengen. Geben Sie die exakte Definition mit Hilfe der beschreibenden Form von:

$A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$

2) A und B seien Mengen. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr, welche nicht ?  
Wenn eine Aussage falsch ist, muß ein konkretes Beispiel und eine Begründung, mit konkreten Mengen A und B angegeben werden. Wenn die Aussage wahr ist, muß dies nicht gemacht werden.

- a)  $A \cap B \subset A \setminus B$                       2 P
- b)  $A \cap B \subset A \cup B$                       2 P
- c)  $A \cup B \subset A \cap B$                       2 P
- d)  $A \setminus B \subset A \cap B$                       2 P

3) a) 2P

Geben Sie ein Beispiel für eine Umformung einer Gleichung, die keine Äquivalenzumformung ist.

b) 2P

Warum ist diese Umformung keine Äquivalenzumformung (Begründung anhand der Definition !)

c) 2P

Warum ist das "Multiplizieren jeder Seite mit 0" keine Äquivalenzumformung ?  
(Begründung anhand der Definition !)

Beantworten Sie die Frage anhand eines Beispiels.

d) 2P

Warum ist die folgende Umformung keine Äquivalenzumformung ?

$x^2 = 16 \quad \longleftrightarrow \quad x = 4$                       (Begründung anhand der Definition !)

4) a) 1P

Wie ist der Begriff Gleichung definiert.

b) 1P

Geben Sie ein Beispiel einer Gleichung.

5) a) 2P

Geben Sie ein Beispiel einer allgemeingültigen Gleichung (mit Grundmenge  $G = \text{reelle Zahlen}$ ).

b) 2P

Warum ist diese Gleichung allgemeingültig ? (Begründung anhand der Definition !)

c) 2P

Geben Sie ein Beispiel einer Gleichung (mit Grundmenge  $G = \text{reelle Zahlen}$ ), die nicht allgemeingültig ist.

d) 2P

Warum ist diese Gleichung nicht allgemeingültig ? (Begründung anhand der Definition !)

6) Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

Bemerkung:

Falls keine Probe(n) gemacht wird und das Ergebnis falsch ist, gibt es für die jeweilige Aufgabe keine Punkte.

$$a) \frac{ax^2 - ay^2}{ax - ay} \quad 3 \text{ P}$$

$$b) \frac{-b + a}{b - a} \quad 3 \text{ P}$$

7)

Die Grundmenge  $G$  bei den folgenden Gleichungen ist:  $G = \mathbb{R} = \text{Menge der reellen Zahlen}$ .  
Bestimmen Sie die Definitionsmenge  $D$  und die Lösungsmenge  $L$  folgender Gleichungen:

Bemerkung:

Falls keine Probe gemacht wird und das Ergebnis falsch ist, gibt es für die jeweilige Aufgabe keine Punkte.

$$a) \frac{x}{3} - \frac{1}{7} = \frac{5x+3}{21} \quad 3 \text{ P}$$

$$b) \frac{4x+8}{2x+4} = \frac{6x+18}{3x+9} \quad 4 \text{ P}$$

$$c) \frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x} = 2 \quad 4 \text{ P}$$

$$d) \frac{1}{4x-8} - \frac{1}{12x} = \frac{1}{2x^2-4x} \quad 5 \text{ P}$$

## Lösungen:

1)

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

2)

a)  $A \cap B \subset A \setminus B$  falsch

Beispiel:  $A = \{1; 2\}$ ,  $B = \{2; 3\}$ , also:  $A \cap B = \{2\}$  und  $A \setminus B = \{1\}$

Es gilt  $2 \in A \cap B$ , aber  $2 \notin A \setminus B$ , aber

b)  $A \cap B \subset A \cup B$  wahr

Begründung:

wenn  $x \in A \cap B$ , dann ist  $x \in A \wedge x \in B$ . Also ist auch  $x \in A \vee x \in B$ .

Damit ist  $x \in A \cup B$

c)  $A \cup B \subset A \cap B$  falsch

Beispiel:  $A = \{1; 2\}$ ,  $B = \{2; 3\}$ , also:  $A \cup B = \{1; 2; 3\}$  und  $A \cap B = \{2\}$

Es gilt  $1 \in A \cup B$ , aber  $1 \notin A \cap B$

d)  $A \setminus B \subset A \cap B$  falsch

Beispiel:  $A = \{1; 2\}$ ,  $B = \{2; 3\}$ , also:  $A \setminus B = \{1\}$  und  $A \cap B = \{2\}$

Es gilt  $1 \in A \setminus B$ , aber  $1 \notin A \cap B$

3)

a)  $x^2 = 16 \iff x = 4$

b) LLG = Lösungsmenge Linke Gleichung =  $\{4; -4\}$

LRG = Lösungsmenge Rechte Gleichung =  $\{4\}$

LLS  $\neq$  LRS

c)  $x = 9 \iff x \cdot 0 = 3 \cdot 0$

LLG =  $\{9\}$

LRG =  $\mathbb{R}$  = Menge der reellen Zahlen.

LLG  $\neq$  LRS

d) siehe a)

4) a) Zwei durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbundene Terme sind eine Gleichung.

b)  $x + 1 = 12$

5) a)  $x + x = 2x$

b) Weil für jede Einsetzung von  $x$  (aus der Definitionsmenge) die Aussage wahr wird.

c)  $x + 1 = 0$

d) Nicht für jede Einsetzung von  $x$  (aus der Definitionsmenge), z.B. für  $x = 3$ , wird die Aussage wahr wird.

6)

$$a) \frac{ax^2 - ay^2}{ax - ay} = \frac{a(x^2 - y^2)}{a(x - y)} = \frac{a(x - y)(x + y)}{a(x - y)} = x + y$$

Probe:

$$x = 1, y = 2, a = 3:$$

$$\frac{3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2^2}{3 \cdot 1 - 3 \cdot 2} = 1 + 2$$

$$\frac{3 - 12}{3 - 6} = 1 + 2$$

$$3 = 3 \text{ (wahr)}$$

$$b) \frac{-b + a}{b - a} = \frac{-(b - a)}{b - a} = -1$$

Probe:

$$a = 1, b = 2$$

$$\frac{-2 + 1}{2 - 1} = -1$$

$$-1 = -1 \text{ (wahr)}$$

Bemerkung:

Die Probe müsste man für alle reelle Zahlen machen.

7)

$$a) D = R$$

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{7} = \frac{5x + 3}{21} \quad | \cdot 21$$

$$7x - 3 = 5x + 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

$$b) D = R \setminus \{-2; -3\}$$

$$\frac{4x + 8}{2x + 4} = \frac{6x + 18}{3x + 9}$$

$$\frac{4(x + 2)}{2(x + 2)} = \frac{6(x + 3)}{3(x + 3)} \quad | \cdot 6(x + 2)(x + 3)$$

$$12(x + 2)(x + 3) = 12(x + 2)(x + 3)$$

$$L = R \setminus \{-2; -3\}$$

$$c) D = R \setminus \{1; 0\}$$

$$\frac{2x}{x - 1} - \frac{1}{x} = 2 \quad | \cdot x(x - 1)$$

$$2x^2 - (x - 1) = 2x(x - 1)$$

$$2x^2 - x + 1 = 2x^2 - 2x$$

$$x = -1$$

$$L = \{-1\}$$

$$d) D = R \setminus \{0; 2\}$$

$$\frac{1}{4x - 8} - \frac{1}{12x} = \frac{1}{2x^2 - 4x}$$

$$\frac{1}{4(x - 2)} - \frac{1}{12x} = \frac{1}{2x(x - 2)} \quad | \cdot 12x(x - 2)$$

$$3x - (x - 2) = 6$$

$$3x - x + 2 = 6$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$L = \{\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

Bemerkungen zu folgenden Aufgaben:

- 1) Wer die Probe nicht macht und die Aufgabe falsch gelöst hat, bekommt 0 Punkte dafür.
- 2) Korrekte Schreibweise (Syntax) wie im Unterricht benutzen, sonst gibt es Punkteabzug!!!!

1)

Berechnen Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus: (13P)

$$\begin{array}{cccc} 6 & 2 & 4 & 22 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -5 \end{array}$$

2)

Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS an (Begründen Sie): (12P)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

3) a) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an. (12P)

b) Geben Sie 2 Elemente der Lösungsmenge an.

$$2x_1 - x_2 = 0$$

4) (13P)

Ein Bauer will für genau 100 Euro Pferde, Kühe und Hennen kaufen (kein Rückgeld). Eine Henne kostet 0,25Euro, eine Kuh 1 Euro und ein Pferd 15 Euro. Da er nur einen kleinen Bauernhof besitzt, muss die Anzahl der Pferde, Kühe und Hennen zusammen 100 ergeben. Der Bauer muss außerdem von jeder Tierart mindestens ein Tier kaufen. Benutzen Sie den Algorithmus von Gauss.

Tipp:

Es sei:

Anzahl der Hennen:  $x_1$ , Anzahl der Kühe:  $x_2$ , Anzahl der Pferde:  $x_3$

Lösungen:

1)

(13P)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	b	Op	KS	
6	2	4	22	G1	34	←
2	1	-1	1	G2	3	
3	2	-4	-5	G3	-4	
6	2	4	22	G4=G1	34	
0	-1	7	19	G5=-3G2+G1	25	←
0	-2	12	32	G6=-2G3+G1	42	
6	0	18	60	G7=2G5+G4	84	
0	-1	7	19	G8=G5	25	
0	0	-2	-6	G9=-2G5+G6	-8	←
6	0	0	6	G10=9G9+G7	12	
0	-2	0	-4	G11=2G8+7G9	-6	
0	0	-2	-6	G12=G9	-8	
1	0	0	1	G13=G10/6	2	
0	1	0	2	G14=G11/-2	3	
0	0	1	3	G15=G12/-2	4	

$$L = \{ (1; 2; 3) \}$$

2)

$$L = \{ \}$$

(3P)

$$0 \ 0 \ 0 \ 6$$

(9P)

bedeutet:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 6$$

Es gibt keine 3 reelle Zahlen, die diese Gleichung erfüllen, denn:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \neq 6$$

3)

$$a) 2x_1 - x_2 = 0 \leftrightarrow x_2 = 2x_1$$

(10P)

also:

$$L_1 = \{ (x_1; x_2) \mid x_2 = 2x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \}$$

b) wähle z.B:  $x_1=0$ :

(2P)

$$(0; 0) \in L$$

wähle z.B:  $x_1=1$ :

$$(1; 2) \in L$$

4)

Es sei:

Anzahl der Hennen:  $x_1$

Anzahl der Kühe:  $x_2$

Anzahl der Pferde:  $x_3$

Dann gilt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100 \quad (1P)$$

$$0,25 x_1 + x_2 + 15 x_3 = 100 \quad (4P)$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	b	Op	KS
1	1	1	100	G1	103
0,25	1	15	100	G2	116,25
1	1	1	100	G3=G1	103
1	4	60	400	G4=4G2	465
1	1	1	100	G5=G3	103
0	-3	-59	-300	G6=G3-G4	-362
3	0	-56	0	G7=3G6+G7	-53
0	-3	-59	-300	G8=G6	-362
1	0	-56/3	0	G9 =G7/3	-53
0	1	59/3	100	G10=G6/-3	-362

Es gilt:

$$x_1 = 56/3 \cdot x_3$$

$$x_2 = 100 - 59/3 \cdot x_3$$

damit: (4P)

$$L = \{ (x_1; x_2; x_3) \mid x_1=56/3 \cdot x_3 \wedge x_2=100-59/3 \cdot x_3 \wedge x_3 \in N_1 \wedge x_3 \geq 1 \wedge x_2 \in N_1 \wedge x_2 \geq 1 \wedge x_1 \in N_1 \wedge x_1 \geq 1 \}$$

wobei mit  $N_1$  die natürlichen Zahlen größer oder gleich 1 bezeichnet werden.

Damit  $x_1$  und  $x_2$  ganzzahlig werden, muss  $x_3$  ein Vielfaches von 3 sein.

Es bietet sich also an, es sofort mit  $x_3 = 3$  zu probieren:

$$x_1 = 0 + 56/3 \cdot 3 = 56$$

$$x_2 = 100 - 59/3 \cdot 3 = 41$$

$$x_3 = 0 + 1 \cdot 3 = 3$$

(4P)

Damit weiß man sofort:

$$(56; 41; 3) \in L$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

**AUFGABEN**1) 23P

Bemerkungen zur folgenden Aufgabe:

Wenn die Lösungsmenge aus unendlich vielen Elementen besteht, muß zusätzlich noch ein konkretes Element der Lösungsmenge angegeben werden.

Für dieses Element muß die Probe gemacht werden !

Berechnen (oder direkt ablesen) Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

a) $\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}$	b) $\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \end{array}$	c) $\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}$	d) $\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$
--	---	--	---

2) 27P

gegeben:

Geraden  $K_{f1}$  und  $K_{f2}$  mit den zugehörigen Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = -\frac{3}{4}x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{5}x - 2$$

gesucht: (zeichnerische und rechnerische Lösung !)

Der Schnittpunkt S von  $K_{f1}$  und  $K_{f2}$ Zeichnen Sie die Geraden  $K_{f1}$  und  $K_{f2}$  in ein rechtwinkliges Koordinatensystem( x-Achse:  $[-1; 4]$ , y-Achse:  $[-4; 4]$ , LE = 1 cm)



## Lösung:

1)

a)

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}$$

3P

b)

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \end{array}$$

6P

c)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}$$

7P

d)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

7P

a)  $L = \{\}$

b)

$$x_1 = 3 + 2 \cdot x_2$$

$$L = \{ (x_1; x_2) \mid x_1 = 3 + 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \}$$

wähle:  $x_2 = 1$ , dann gilt:

$$x_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

also:  $(5; 1) \in L$

c)

$$x_1 = 4 + 2 \cdot x_3$$

$$x_2 = 5 + 3 \cdot x_3$$

$$L = \{ (x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 4 + 2 \cdot x_3 \wedge x_2 = 5 + 3 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$$

wähle:  $x_3 = 1$ , dann gilt:

$$x_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6$$

$$x_2 = 5 + 3 \cdot 1 = 8$$

also:  $(6; 8; 1) \in L$

d)

$x_1$	$x_2$	b	Op	KS
1	2	3	G1	6
-1	-2	-3	G2	-6
1	2	3	G3	6
1	2	3	G4=G1	6
0	0	0	G5=G1+G2	0
0	0	0	G6=G1-G3	0
1	2	3	G7	6

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$$

$$L = \{ (x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \}$$

wähle:  $x_2 = 1$ , dann gilt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

also:  $(1; 1) \in L$

2)

$$f_1(x) = -\frac{3}{4}x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{5}x - 2$$

Der Schnittpunkt sei  $S(x_s|y_s)$ . Für diesen gilt:

$S(x_s|y_s) \in K_{f1}$  und  $S(x_s|y_s) \in K_{f2}$ . Damit ist die Punktprobe erfüllt:

$$y_s = -\frac{3}{4}x_s + 2$$

$$y_s = \frac{2}{5}x_s - 2$$

also:

$$-\frac{3}{4}x_s + 2 = \frac{2}{5}x_s - 2 \iff \frac{2}{5}x_s + \frac{3}{4}x_s = 4 \iff 7P$$

$$8x_s + 15x_s = 80 \iff 23x_s = 80 \iff x_s = \frac{80}{23} \quad 7P$$

$$y_s = -\frac{3}{4} \cdot \frac{80}{23} + 2 = -\frac{60}{23} + 2 = -\frac{14}{23}$$

und damit:

$$x_s = \frac{80}{23}$$

$$y_s = -\frac{14}{23} \quad 3P$$

also:

$$S\left(\frac{80}{23} \mid -\frac{14}{23}\right) \approx S(3,5 \mid 0,6) \quad 1P$$

Zeichnung: 9P

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben sei eine Funktion  $h$  (mit dem Schaubild  $K_h$ ). Was gibt folgendes anschaulich an ?  
Bitte mit einem Wort oder einem Satz antworten, nicht mit einer Formel!

- a)  $h'(x)$  2P  
b)  $h(x)$  2P

2) Gegeben ist die Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung 2P

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

$$g(x^2 + \pi)$$

3) Wie ist anschaulich (bitte mit einem Wort oder einem Satz antworten, nicht mit einer Formel) die Steigung einer Kurve in einem Punkt  $P(x | y)$  definiert ? 2P

4) Wie ist rein formal (mit Hilfe des Limes) die Ableitung  $h'(x)$  definiert ? 2P

5) Geben Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an: 7P

( $c, k$  sind **konstante** Werte)

- a)  $h_1(x) = g(x) + c$   
b)  $h_2(x) = k \cdot g(x)$   
c)  $h_3(x) = g(x) + h(x)$   
d)  $h_4(x) = 10 \cdot 5$   
e)  $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$   
f)  $h_6(x) = x$   
g)  $h_7(x) = k/c$

6) In welchen Punkten hat das Schaubild  $K_g$  der Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung  $g(x) = x^3$  4P

eine negative Steigung.

Zeichnerische und rechnerische Begründung!

Lösung:

1)

- a)  $h'(x)$  gibt die Steigung der Kurve  $K_h$  im Punkt mit der x-Koordinate  $x$  an.  
 b)  $h(x)$  gibt die y-Koordinate der Kurve  $K_h$  im Punkt mit der x-Koordinate  $x$  an.

2)  $g(x^2 + \pi) = (\sin(x^2 + \pi) + \pi)^2 - \sqrt{x^2 + \pi}$

3) Die Steigung der Tangente im Punkt  $P(x \mid y)$

4)  $h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$

5)

a)  $h_1'(x) = g'(x)$

b)  $h_2'(x) = k \cdot g'(x)$

c)  $h_3'(x) = g'(x) + h'(x)$

d)  $h_4'(x) = 0$

e)  $h_5'(x) = 21 \cdot x^6$

f)  $h_6'(x) = 1$

g)  $h_7'(x) = 0$

6) a)  $g'(x) = 3x^2 \geq 0$ , da  $x^2 \geq 0$

b) Alle Tangenten haben positive Steigung

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

### AUFGABEN

**Bemerkung: Mit Worten begründete, nachvollziehbare Lösungen !!!!!**

1)

a) Zeichnen Sie die Schaubilder  $K_g$  und  $K_{g'}$  der Funktionen  $g$  und  $g'$  im Intervall  $[-5, 5]$  jeweils **untereinander** in 2 verschiedene Koordinatensysteme ein (1 LE = 1 cm) 4P

$$g(x) = \frac{1}{8}x^2$$

b) Was gibt  $g'(2)$  konkret an, d.h. in welchem Steigungsdreieck kommt  $g'(2)$  konkret als Länge einer "Strecke" im Schaubild  $K_g$  vor (in Zeichnung angeben) ? 4P

c) Wo kommt  $g'(2)$  konkret als Länge einer "Strecke" im Schaubild  $K_{g'}$  vor (in Zeichnung angeben) 2P

d) Was gibt  $g(2)$  konkret an, d.h. wo kommt  $g(2)$  konkret als Wert im Schaubild  $K_g$  vor (in Zeichnung angeben) 3P

e) Geben Sie den Punkt  $P$  an, in dem die Funktion  $g$  die Steigung 0,75 hat. Begründen Sie rein rechnerisch und bestätigen Sie dies an der Zeichnung. 6P

2) Bilden Sie (rein rechnerisch, ohne geometrische Begründung) von der folgenden Funktion  $h$  mit Hilfe der Limesbildung die Ableitung: 10P

$$h(x) = -4 \cdot x^2 + 2$$

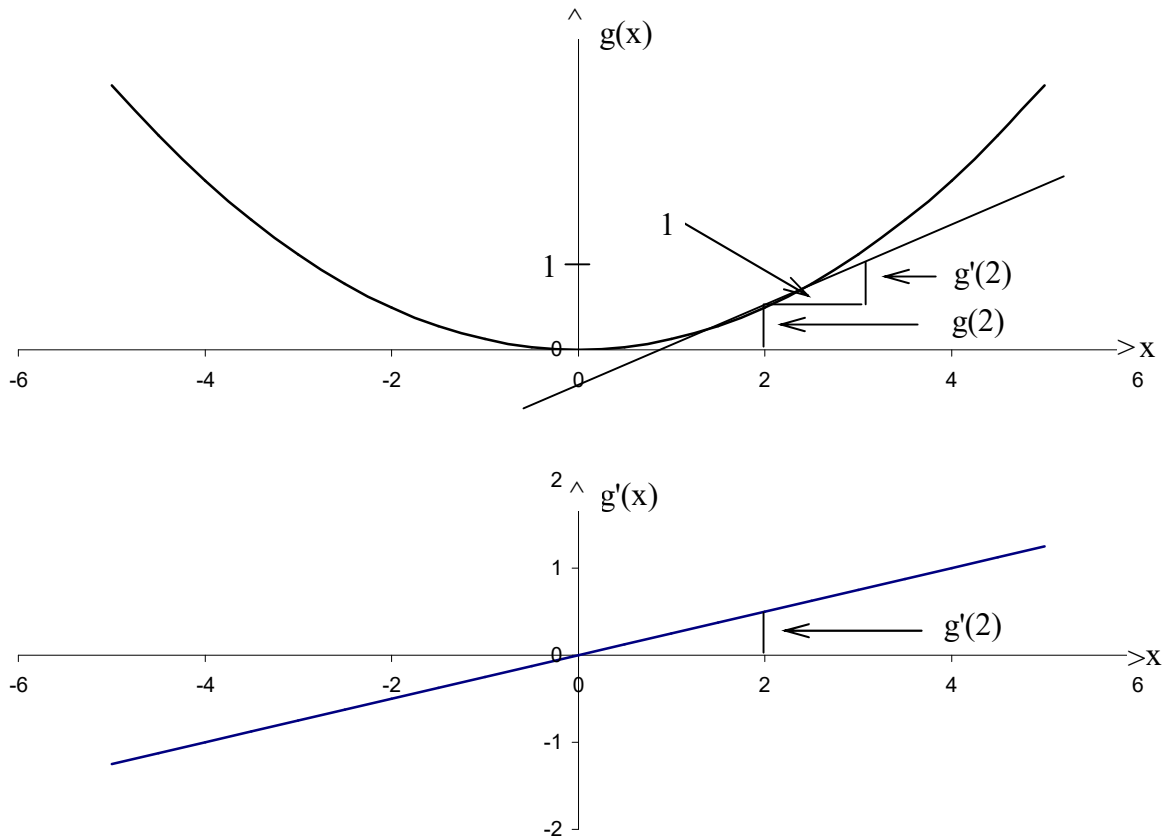
3) Bilden Sie von der obigen Funktion  $h$  die Ableitung, ohne die Limesbildung zu benutzen. Geben Sie dazu die Ableitungsregeln an, die Sie benutzen ! 3P

4)

Legen Sie von  $Q(0 | -2)$  aus die Tangenten an die obige Parabel  $K_g$  18P  
Berechnen Sie die Berührungspunkte und die Funktionsgleichungen der Tangenten nach der im Unterricht verwendeten Methode.

# Lösung

1)



b)  $g'(2)$  gibt die Steigung im Punkt mit der x-Koordinate 2 an. Das ist die Steigung der Tangente in diesem Punkt.

$g'(2)$  ist der  $\Delta y$ -Wert im Steigungsdreieck der Tangente im Punkt mit der x-Koordinate 2, wenn man  $\Delta x = 1$  wählt.

c)  $g'(2)$  gibt die zu der x-Koordinate 2 zugehörige y-Koordinate auf dem Schaubild  $K_{g'}$  an.

d)  $g(2)$  gibt die zu der x-Koordinate 2 zugehörige y-Koordinate auf dem Schaubild  $K_g$  an.

e)

$$g(x) = \frac{1}{8}x^2 ; \quad g'(x) = \frac{1}{4}x$$

Sei  $P(x_p | y_p)$  der Punkt mit der Steigung 0,75. Die Steigung im Punkt P ist einerseits

$$g'(x_p) = \frac{1}{4}x_p \quad \text{und andererseits: } g'(x_p) = 0,75 \quad \text{also:}$$

$$0,25 x_p = 0,75 \quad \Longleftrightarrow \quad x_p = 3$$

$$\text{Da } g(3) = \frac{1}{8} \cdot 3^2 = \frac{9}{8}, \text{ gilt damit: } P\left(3 \mid \frac{9}{8}\right)$$

2)

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4(x + \Delta x)^2 + 2 - (-4x^2 + 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4x^2 - 8x\Delta x - 4\Delta x^2 + 2 + 4x^2 - 2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-8x\Delta x - 4\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-8x - 4\Delta x)}{\Delta x} \quad (da \ \Delta x \neq 0) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -8x - 4\Delta x = -8x
 \end{aligned}$$

Damit :  $h'(x) = -8x$

3)

$$h'(x) = -8x$$

4)

$$\frac{y_B - (-2)}{x_B - 0} = g'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Ansatz (4P), Umformung (4P)

Es gilt aber:

$$y_B = \frac{1}{8}x_B^2 \quad \text{und} \quad g'(x_B) = \frac{1}{4}x_B$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{\frac{1}{8}x_B^2 + 2}{x_B} = \frac{1}{4}x_B \iff \frac{1}{8}x_B^2 + 2 = \frac{1}{4}x_B^2 \iff \frac{1}{8}x_B^2 = 2 \iff$$

$$x_B^2 = 16 \text{ also:}$$

$$x_{B1} = -4, \quad y_{B1} = g(-4) = 2 \quad (1P)$$

$$x_{B2} = 4, \quad y_{B2} = g(4) = 2 \quad (1P)$$

damit:

$$B_1(-4 \mid 2) \quad (1P)$$

$$B_2(4 \mid 2) \quad (1P)$$

b) Berechnung der Steigungen der Tangenten:

$$g'(-4) = \frac{1}{4} \cdot (-4) = -1 \quad (1P)$$

$$g'(4) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \quad (1P)$$

b) Berechnung der Funktionsgleichungen der Tangenten:

$$b1) \frac{y - 2}{x_B - (-4)} = -1 \iff y - 2 = -(x_B + 4) \iff y - 2 = -x_B - 4 \iff y = -x_B - 2$$

$$t_1: y = -x_B - 2 \quad (2P)$$

$$b2) \frac{y - 2}{x_B - 4} = 1 \iff y - 2 = x_B - 4 \iff y = x_B - 2$$

$$t_2: y = x_B - 2 \quad (2P)$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

Bemerkung:

Mit Worten begründete, nachvollziehbare Lösungen !!!!!

Alle Aufgaben müssen nach dem im Unterricht verwendeten Schema (einschließlich der Bezeichnungen) gemacht werden.

1) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung:

20P

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$$

Zeichnen Sie das Schaubild  $K_f$  der Funktion  $f$ , in jeweils dem Bereich, in dem "interessante" Punkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte) vorkommen, einschliesslich der Bezeichnungen der "interessanten" Punkte.

Untersuchen Sie die Schaubilder jeweils bzgl:

- a) Achsenschnittpunkte (berechnen und angeben)
- b) Ableitungen (berechnen und angeben)
- c) Extrempunkte (berechnen und angeben)
- d) Wendepunkte (berechnen und angeben)

2)

20P

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung  $O(0|0)$  und besitzt den Wendepunkt  $W(1|-2)$ . Die Wendetangente schneidet die  $x$ -Achse im Punkt  $S(3|0)$ . Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion (berechnen und angeben).

3) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung:

10P

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$$

- a) Berechnen Sie  $f(2)$
- b) Begründen Sie mathematisch, warum  $K_f$  punktsymmetrisch bzgl.  $O(0|0)$  ist.
- c) Berechnen Sie die tatsächliche Fläche zwischen  $K_f$  und der  $x$ -Achse.
- d) Welche Wert hat die bilanzierte Fläche zwischen  $K_f$  und der  $x$ -Achse. Begründen (nicht rechnen) Sie!



Lösungen:

1) gegeben:  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$

a) Achsenschnittpunkte

a1) Schnittpunkte  $S_y(0 | y_s)$  mit der y-Achse:  $S_y(0 | y_s) \in K_f$

$$y_s = \frac{1}{2} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$S_y(0 | 0)$$

a2) Schnittpunkte  $S_x(x_s | 0)$  mit der x-Achse:  $S_x(x_s | 0) \in K_f$

$$0 = \frac{1}{2}x_s^3 - 3x_s^2 \mid \cdot 2$$

$$0 = x_s^3 - 6x_s^2 \iff 0 = x_s^2(x_s - 6)$$

$$\text{Fall1: } 0 = x_s - 6$$

$$x_s = 6$$

$$x_{s1} = 6$$

$$\text{Fall2: } x_s^2 = 0$$

$$x_s = 0$$

$$x_{s2} = 0$$

damit Nullstellen von f:

$$S_{x1}(6 | 0), S_{x2}(0 | 0)$$

b) Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 3x - 6$$

$$f'''(x) = 3$$

c) Extrempunkte

Extrempunkte  $E(x_e | y_e) : f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{3}{2}x_e^2 - 6x_e \mid \cdot \frac{2}{3}$$

$$0 = x_e^2 - 4x_e \iff 0 = x_e(x_e - 4)$$

$$\text{Fall1: } x_e - 4 = 0$$

$$x_e = 4$$

$$x_{e1} = 4$$

$$\text{Fall2: } x_e = 0$$

$$x_{e2} = 0$$

$$f''(4) = 3 \cdot 4 - 6 = 6 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(0) = 3 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$y_{e1} = f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 = -16$$

$$y_{e2} = f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

damit:

T(4 | -16) Tiefpunkt, H(0 | 0) Hochpunkt

d) Wendepunkte

Wendepunkte  $W(x_w|y_w)$ :  $f''(x_w) = 0$

$$0 = 3x_w - 6$$

$$x_w = 2$$

$$f'''(2) = 3 \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_w = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -8$$

damit:

$W(2 | -8)$  Wendepunkt

2)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

a)  $O(0 | 0) \in K_f$

$$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$

$$d = 0$$

b)  $d = 0$  eingesetzt in  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ergibt:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

c)  $W(1 | -2) \in K_f$

$$-2 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1$$

$$-2 = a + b + c \quad (G1)$$

d) Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt  $S(3 | 0)$

Steigung  $m$  der Wendetangente (durch  $W(1 | -2)$  und  $S(3 | 0)$ )

$$m = \frac{-2 - 0}{1 - 3} = 1 \quad (\text{Steigungsdreieck})$$

andererseits:

$$1 = m = f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c$$

$$3a + 2b + c = 1 \quad (G2)$$

e)  $W(1 | -2)$  ist Wendepunkt

$$f''(1) = 0$$

$$6a \cdot 1 + 2b = 0$$

$$6a + 2b = 0$$

$$3a + b = 0 \quad (G3)$$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus

(G1), (G2) und (G3):

$$a = -3, \quad b = 9, \quad c = -8$$

f) Ergebnis:

$$f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 8x$$

3)

$$\text{a) } f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 = 0$$

$$\text{b) } -f(-x) = -\left(-\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)\right) = -\frac{1}{2} \cdot x^3 + 2x = f(x)$$

Da  $K_f$  punktsymmetrisch ist und laut a)  $f(2) = 0$  ist, gilt auch:

$$f(-2) = -f(-(-2)) = -f(2) = -0 = 0 \text{ und auch } f(0) = 0$$

$$\text{c) } I = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2} \cdot x^3 + 2x\right) dx = \left[-\frac{x^4}{8} + x^2\right]_{-2}^0 = -\frac{0^4}{8} + 0^2 - \left(-\frac{(-2)^4}{8} + (-2)^2\right) = -2$$

Da  $K_f$  punktsymmetrisch ist, gilt:

$$A = 2 \cdot |I| = 4$$

d) Die bilanzierte Fläche ist 0, da  $K_f$  punktsymmetrisch bzgl.  $O(0 | 0)$  ist und damit der Teil unter der Kurve auf der negativen x-Achse deckungsgleich ist mit dem Teil unter der Kurve auf der positiven x-Achse.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Formelsammlung, Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

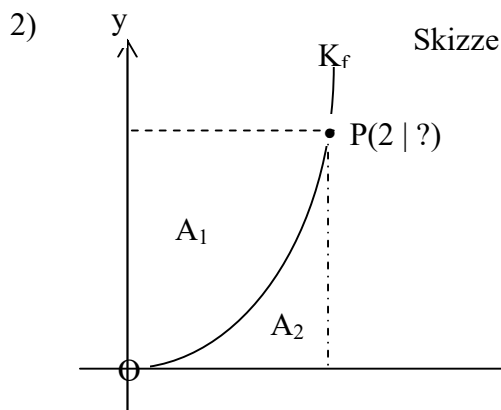
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\set{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

**AUFGABEN**

1) Geben Sie eine konkrete Funktionsgleichung einer Funktion  $f$  und konkrete Werte  $a$  und  $b$  an, so daß gilt:

Die bilanzierte Fläche zwischen der  $x$ -Achse und der Kurve  $K_f$  und den Begrenzungsgeraden  $x = a$  und  $x = b$  ist 0.

Die tatsächliche Fläche zwischen der  $x$ -Achse und der Kurve  $K_f$  und den Begrenzungsgeraden  $x = a$  und  $x = b$  ist ungleich 0.



$K_f$  ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^2$

Die Fläche  $A_1$  wird durch  $K_f$ , die  $y$ -Achse und die waagrechte Gerade, die durch  $P$  geht, begrenzt. Die Fläche  $A_2$  wird durch  $K_f$ , die  $x$ -Achse und die senkrechte Gerade, die durch  $P$  geht, begrenzt.

a) Begründen Sie anschaulich, warum  $A_1 > A_2$  ist.

b) Um das wie vielfache ist  $A_1$  größer als  $A_2$  ?

c) Um das wie vielfache ist  $A_1$  größer als  $A_2$  , wenn  $P(a | ?) \in K_f$  ein beliebiger Punkt ist ( $a > 0$ ) ?

3) Gegeben ist die folgende Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$$

Bestätigen oder widerlegen Sie die folgende Vermutung:

"Der  $x$ -Wert des Wendepunkts ist das arithmetische Mittel (Mittelwert) der  $x$ -Werte der Extrempunkte"

Lösungen

1)

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 0$$

$$I_1 = \int_{-2}^0 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 = \frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = -4$$

$$I_2 = \int_0^2 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

Also:

$$A = |I_1| + |I_2| = |-4| + |4| = 8$$

2)

a) Sei  $A_R$  die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da  $K_f$  unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt:  $A_1 > A_R/2 > A_2$

Damit gilt dann:

$$A_1 > A_2$$

b)

$$A_2 = \int_0^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = 2 \cdot f(2) - A_2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16/3}{8/3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung  $A_1$ ):

$$A_1 = \int_0^2 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 (f(2) - x^2) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

c)

$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{3} a^3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung  $A_1$ ):

$$A_1 = \int_0^a (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^a (f(a) - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

3)

$$\text{gegeben: } f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$$

gesucht:

$$\text{gilt: } x_W = \frac{x_{e1} + x_{e2}}{2} ?$$

a) Ableitungen

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$f''(x) = -2x + 4$$

$$f'''(x) = -2$$

b) Extrempunkte

Extrempunkte  $E(x_e|y_e)$ :  $f'(x_e) = 0$

$$0 = -x_e^2 + 4x_e - 3$$

$$x_{e1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = 2 \pm 1$$

$$x_{e1} = 1$$

$$x_{e2} = 3$$

$$f''(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

T(1 | ?) Tiefpunkt, H(3 | ?) Hochpunkt

c) Wendepunkte

Wendepunkte  $W(x_w|y_w)$ :  $f''(x_w) = 0$

$$-2x_w + 4 = 0$$

$$x_w = 2$$

$$f'''(2) = -2 \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

damit:

$$W(2 | -\frac{2}{3}) \approx W(2 | -0,67) \text{ Wendepunkt}$$

d)

$$\frac{x_{e1} + x_{e2}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 = x_w$$

Damit wurde die Vermutung für diesen Fall bestätigt !

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkung:

Taschenrechner dürfen nicht verwendet werden!!!

## AUFGABEN

1) Lösen Sie die Gleichung  $r^x = s$  (wobei  $r > 0$ ,  $r \neq 1$ ,  $s > 0$ ) auf nach:

- a)  $x$  1P  
b)  $r$  1P

2) Berechnen Sie:

- a)  $\ln e^7$  1P  
b)  $\ln 1$  1P  
c)  $\ln e$  1P

3) Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

- a)  $\log_{10}(a \cdot a)$  2P  
b)  $\ln(x - y)$  2P  
c)  $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$  2P  
d)  $\log_a 1$  1P  
e)  $\log_a a$  1P  
f)  $\log_a a^x$  2P  
g)  $\log_a ((a^n)^m)$  3P  
h)  $\log_a \frac{a^n}{a^m}$  3P

Lösungen:

1)

a)  $x = \log_r s$

b)  $r = \sqrt[x]{s} = s^{1/x}$

2)

a)  $\ln e^7 = 7$

b)  $\ln 1 = 0$

c)  $\ln e = 1$

3)

a)  $\log_{10}(a \cdot a) = \log_{10} a^2 = 2 \log_{10} a$

b)  $\ln(x - y)$  "keine Umformung möglich"

c)  $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 \ln e = -2$

d)  $\log_a 1 = 0$

e)  $\log_a a = 1$

f)  $\log_a a^x = x$

g)  $\log_a ((a^n)^m) = \log_a (a^{nm}) = nm \cdot \log_a a = nm$

h)  $\log_a \frac{a^n}{a^m} = \log_a a^{n-m} = (n-m) \log_a a = n-m$