

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

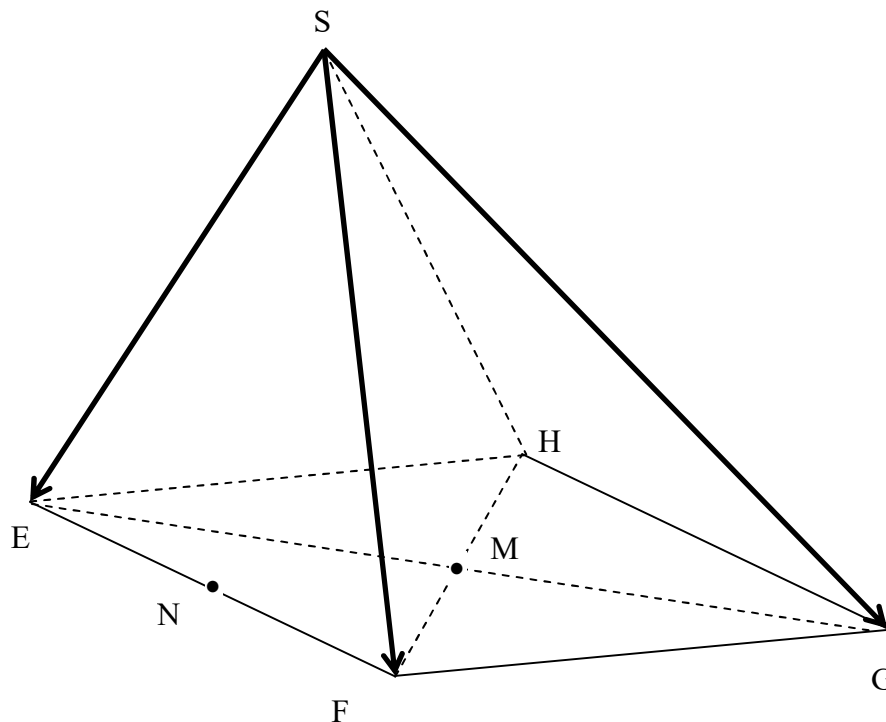
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Stellen Sie die Vektoren  $\overrightarrow{SN}$ ,  $\overrightarrow{SH}$ ,  $\overrightarrow{SM}$  der Pyramide (mit einer rechteckigen Grundfläche) als Linearkombination der Vektoren  $\overrightarrow{SE}$ ,  $\overrightarrow{SF}$ ,  $\overrightarrow{SG}$  dar.

Bemerkung:

N ist die Mitte der Strecke  $\overline{EF}$  und M ist die Mitte der Grundfläche (Rechteck) (15 P)



2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: (14P)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

3) a)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung: (21P)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Sind die 3 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig ?}$$

Begründen Sie (mathematisch mit Hilfe von Aufgabenteil a) oder durch Probieren!

Bemerkungen:

Bei linearen Gleichungssystemen **muss** der Gaußsche Algorithmus benutzt werden !

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

## Lösungen

1)

$$a) \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SF}$$

$$b) \overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{SE} + (-\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}$$

$$c) \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} (-\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG}$$

2)

1. Lösung

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Lösung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \quad | -x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x \\ 6x \\ 8x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 4x = 0 \wedge 6x = 0 \wedge 8x = 0 \leftrightarrow x = 0 \wedge x = 0 \wedge x = 0$$

$$L = \{0\}$$

2. Lösung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x \\ -3x \\ -4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x \\ 6x \\ 8x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -3x \\ -4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x + 4x - 4 \\ -3x + 6x + 16 \\ -4x + 8x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4 \\ -3x + 16 \\ -4x + 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x - 4 \\ 3x + 16 \\ 4x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4 \\ -3x + 16 \\ -4x + 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2x - 4 = -2x - 4 \wedge 3x + 16 = -3x + 16 \wedge 4x + 3 = -4x + 3$$

$$\leftrightarrow 4x = 0 \wedge 6x = 0 \wedge 8x = 0 \leftrightarrow x = 0$$

$$L = \{0\}$$

3) a)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_3 \\ 0 \\ 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \wedge$$

$$-x_1 + x_2 = 0 \wedge$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0$$

$$-1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0$$

(6P)

oder in Matrizenform:

(9P)

$x_1$	$x_2$		b	Op	KS
1	3	4	0	G1	8
-1	1	0	0	G2	0
2	2	4	0	G3	8
1	3	4	0	G4=G1	8
0	4	4	0	G5=G1+G2	8
0	-4	-4	0	G6=-2G1+G3	-8
-4	0	-4	0	G7=-4G4+3G5	-8
0	4	4	0	G8=G5	8
0	0	0	0	G9=G5+G6	0
-4	0	-4	0	Nullzeile	
0	4	4	0	weglassen	
1	0	1	0		
0	1	1	0		

1 P

2 P

2 P

2 P

2 P

$$L = \{ (x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = -x_3 \wedge x_2 = -x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$$

(2P)

b)

(4P)

Da  $(-1;-1;1) \in L$ . folgt:

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Gleichung außer der Lösung  $(0;0;0)$  noch eine weitere Lösung hat, sind die Vektoren nicht linear unabhängig.

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) 45P  
a)

Berechnen Sie auf 3 verschiedene Arten den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die 3 Punkte geht:

$P_1(0 \mid 4 \mid 0)$ ,  $P_2(4 \mid 4 \mid 0)$ ,  $P_3(4 \mid 4 \mid 4)$

Bemerkung:

Ausführliche, leicht nachvollziehbare Darstellung (wie im Unterricht).

Alle Winkel über das Skalarprodukt berechnen (nicht über die Winkelsumme im Dreieck).

b) 5P

Berechnen Sie die Fläche unabhängig von a), indem Sie das Dreieck in ein dreidimensionales Koordinatensystem einzeichnen und begründen wie groß die Winkel und die Seiten dieses Dreiecks sind und dann begründen, wie groß der Flächeninhalt sein muß.

## 1. Lösung

$$\alpha = \angle P_2 P_1 P_3$$

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-4 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-4 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{16} \cdot 2} = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

also:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{P_1 P_2}| \cdot |\overrightarrow{P_1 P_3}| \cdot \sin 45^\circ = 0,5 \cdot 16\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} / 2 = 8$$

## 2. Lösung

$$\beta = \angle P_1 P_2 P_3$$

$$\overrightarrow{P_2 P_1} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-4 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_2 P_3} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 4-4 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{16}} = \frac{0}{16} = 0$$

$$\beta = 90^\circ$$

also:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{P_2 P_1}| \cdot |\overrightarrow{P_2 P_3}| \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

### 3. Lösung

$$\gamma = \angle P_1 P_3 P_2$$

$$\overrightarrow{P_3 P_1} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-4 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_3 P_2} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 4-4 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + -4 \cdot -4}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{16}} =$$

$$\frac{16}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{16}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{-4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + -4 \cdot -4}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{16}} = \frac{16}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{16}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma = 45^\circ$$

also:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{P_3 P_1}| \cdot |\overrightarrow{P_3 P_2}| \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 8$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEDLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist eine Pyramide, deren Spitze sich im Ursprung  $O(0|0|0)$  und deren Eckpunkte sich auf den Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems befinden.

Für die Länge der Seitenkanten gilt:

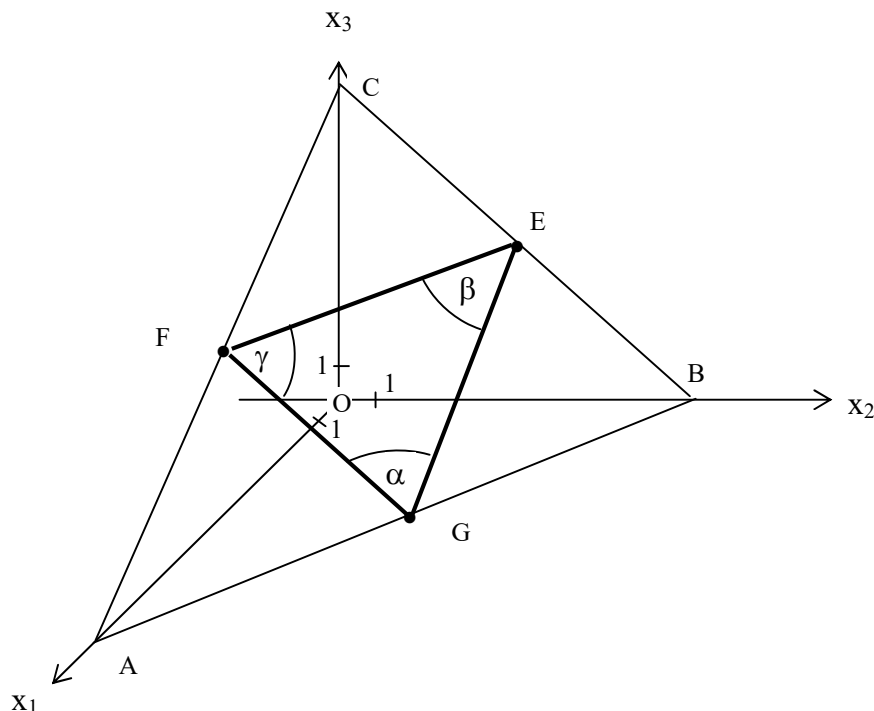
$$\left| \overrightarrow{OA} \right| = 8, \quad \left| \overrightarrow{OB} \right| = 4, \quad \left| \overrightarrow{OC} \right| = 2$$

Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke BC.

Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke AC.

Der Punkt G ist der Mittelpunkt der Strecke AB.

Skizze:





- a) Geben Sie die Punkte A, B, C mit ihren Koordinaten an. (3P)
- b) Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte E, F, G (mit ihren Koordinaten) (15P)
- c) Bestimmen Sie rechnerisch die Winkel im Dreieck  $\triangle EFG$ . (30P)  
Nehmen Sie die Punkte E, F, G wie folgt an:  
 $E(0 \mid 4 \mid 2)$ ,  $F(8 \mid 0 \mid 2)$ ,  $G(8 \mid 4 \mid 0)$
- d) Probe machen (Winkelsumme !). (2P)

Bemerkungen:

- 1) Alle Berechnungen in der Aufgabe (Winkel) sind ausschließlich mit Hilfe der Vektorrechnung durchzuführen.
- 2) Zahlen auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

Lösungen:

a) A(8 | 0 | 0), B(0 | 4 | 0), C(0 | 0 | 2)

b)

$$\text{b1) } \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+0 \\ 4+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies E(0 | 2 | 1)$$

$$\text{b2) } \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies F(4 | 0 | 1)$$

$$\text{b3) } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+4 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies G(4 | 2 | 0)$$

c)

c1)

9P

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 0-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 4-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{EG}|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{8 \cdot 8 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{8^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{64}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{68}} = \frac{8}{\sqrt{85}}$$

$$\approx 0,87$$

$$\text{also: } \beta \approx 29,81^\circ$$

c2)

9P

$$\vec{GE} = -\vec{EG} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{GF} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{GE} \cdot \vec{GF}}{|\vec{GE}| \cdot |\vec{GF}|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-8 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 2}{\sqrt{(-8)^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{68} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{85}}$$

$$\approx 0,11$$

$$\text{also: } \alpha \approx 83,77^\circ$$

c3)

9P

$$\vec{FE} = -\vec{EF} = -\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{FG} = -\vec{GF} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{FE} \cdot \vec{FG}}{|\vec{FE}| \cdot |\vec{FG}|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-8 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{20}} = 0,4$$

$$\text{also: } \gamma \approx 66,42^\circ$$

d) Probe (Winkelsumme):

3P

$$\beta + \alpha + \gamma \approx 29,81^\circ + 83,77^\circ + 66,42^\circ \approx 180^\circ \quad (\text{wahr})$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

**AUFGABEN**

1)

25P

a) Berechnen Sie den (die) Schnittpunkt(e) der zwei folgenden Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Welche besondere Lage haben die 2 Geraden zu einander?

2)

25P

Gegeben ist die Gerade g:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Gerade h geht durch  $R(2 \mid -3 \mid 3)$ , ist senkrecht zu g und trifft g im Fußpunkt F.  
Bestimmen Sie rechnerisch den Fußpunkt F.

Lösungen:

1) 1. Lösung:

Der Richtungsvektor von g ist parallel zu h, weil gilt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also sind g und h echt parallel oder identisch.

Prüfe, ob z.B. der Aufpunkt A(-6 | -4 | 4) von g auf h liegt, d.h. gibt es ein u mit

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-6 = -3 + 6u \Leftrightarrow u = -0,5$$

$$-4 = -5 - 2u \Leftrightarrow u = -0,5$$

$$4 = 5 + 2u \Leftrightarrow u = -0,5$$

Ergebnis: A(-6 | -4 | 4)  $\in$  h, also sind die Geraden identisch: g = h

2. Lösung:

Der Schnittpunkt sei S(x<sub>1S</sub> | x<sub>2S</sub> | x<sub>3S</sub>). Dann gibt es ein t<sub>s</sub> und r<sub>s</sub> mit:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-6 + 3t_s = -3 + 6r_s$$

$$-4 - t_s = -5 - 2r_s$$

$$4 + t_s = 5 + 2r_s$$

$$3t_s - 6r_s = 3$$

$$-t_s + 2r_s = -1$$

$$t_s - 2r_s = 1$$

t <sub>s</sub>	r <sub>s</sub>	b	Op	KS
3	-6	3	G1	0
-1	2	-1	G2	0
1	-2	1	G3	0
3	-6	3	G4=G1	0
0	0	0	G5=G1+3G2	0
0	0	0	G6=G1-3G3	0

also:

$$t_s = 2r_s + 1$$

$$L = \{ (t_s, r_s) \mid t_s = 2r_s + 1 \wedge r_s \in \mathbb{R} \}$$

Die Lösungsmenge ist unendlich groß.

Ergebnis: Die Geraden schneiden sich in unendlich vielen Punkten, d.h:

$$\mathbf{g} = \mathbf{h}$$

2)

Da  $F(\mathbf{x}_{1F} \mid \mathbf{x}_{2F} \mid \mathbf{x}_{3F}) \in \mathbf{g}$ , gibt es ein  $r_F$  mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + r_F \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 3r_F \\ -4 + 5r_F \\ -3 + 4r_F \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

$$\xrightarrow{FR} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} 2 - (-5 + 3r_F) \\ -3 - (-4 + 5r_F) \\ 3 - (-3 + 4r_F) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} 7 - 3r_F \\ 1 - 5r_F \\ 6 - 4r_F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

also:

$$3(7 - 3r_F) + 5(1 - 5r_F) + 4(6 - 4r_F) = 0 \iff$$

$$21 - 9r_F + 5 - 25r_F + 24 - 16r_F = 0 \iff$$

$$50 - 50r_F = 0 \iff$$

$$r_F = 1$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ also } F(-2 \mid 1 \mid 1)$$

*Name, Vorname:*Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) 3P  
Für welche Winkel  $x$  zwischen  $-2\pi$  und  $3\pi$  gilt:

$$\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Bem:

$$\sin(-60^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

2) 4P  
Für welche Winkel  $x$  zwischen  $-2\pi$  und  $3\pi$  gilt:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bem:

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) 6P  
a) Sie verschieben die Kurve  $K_f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^3$  um 2 LE nach rechts.  
Wie heißt die Funktionsgleichung der verschobenen Kurve?  
Nur Funktionsterm angeben. Nicht vereinfachen!

b) Sie verschieben die Kurve  $K_g$  mit der Funktionsgleichung  $g(x) = x^2 + x^4$  um 3 LE nach links.  
Wie heißt die Funktionsgleichung der verschobenen Kurve?  
Nur Funktionsterm angeben. Nicht vereinfachen!

4) 9P  
Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an:

a)  $\sin(x) = 1,5$

b)  $\cos(x) = 0$

c)  $\sin(x) = x$

5)

8P

Leiten Sie ab ( $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge e \in \mathbb{R}$  sind Konstanten):

a)  $f(x) = a \cdot \sin(bx+c) + e$

b)  $g(x) = a \cdot \cos(bx+c) + e$

6)

8P

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral von ( $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge e \in \mathbb{R}$  sind Konstanten):

a)  $\int (a \cdot \sin(bx + c) + e) dx$

b)  $\int (a \cdot \cos(bx + c) + e) dx$

7)

4P

Geben Sie an (ohne Begründung):

a)  $\int_{-1}^1 \sin(x) dx$

b)  $\int_0^{\pi} \cos(x) dx$

8)

11P

Die folgenden Funktionen entstehen aus der Sinusfunktion  $f(x) = \sin(x)$  durch Dehnen bzw. Stauchen in y-Richtung, Dehnen bzw. Stauchen und Verschieben in x-Richtung.

Um wie viel muß die gedehnte (gestauchte) Sinusfunktion  $f(x) = \sin(x)$  minimal nach links bzw. nach rechts verschoben werden ?

Konkret: Bestimmen Sie die positiven Werte  $x_{\min L}$  und  $x_{\min R}$  der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = -10 \sin\left(\frac{1}{10}(x - 29\pi)\right)$$

$$f_2(x) = 11 \sin\left(\frac{1}{3}(x + 25\pi)\right) + 6$$

$$f_3(x) = 2 \sin\left(-\frac{x}{4} + \frac{19}{4}\pi\right) - 7$$



Lösungen:

1)

$$x_1 = -60^\circ, x_2 = -180^\circ + 60^\circ = -120^\circ, x_3 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ, x_4 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

2)

$$x_1 = 45^\circ, x_2 = -360^\circ + 45^\circ = -315^\circ, x_3 = -45^\circ, x_4 = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$$

$$x_5 = 360^\circ + 45^\circ = 405^\circ$$

3)

11P

a)  $h(x) = (x-2)^3$

b)  $v(x) = (x+3)^2 + (x+3)^4$

4)

12P

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an:

a)  $L = \emptyset$

b)  $L = \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)  $L = \{0\}$

5)

Leiten Sie ab:

a)  $f'(x) = ab \cdot \cos(bx+c)$

b)  $g'(x) = -ab \cdot \sin(bx+c)$

6)

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral von:

a)  $\int (a \cdot \sin(bx+c) + e) dx = -\frac{a}{b} \cdot \cos(bx+c) + ex$

b)  $\int (a \cdot \cos(bx+c) + e) dx = \frac{a}{b} \cdot \sin(bx+c) + ex$

7)

Geben Sie an (ohne Begründung):

a)  $\int_{-1}^1 \sin(x) dx = 0$

b)  $\int_0^\pi \cos(x) dx = 0$

8)

$$\text{a) } f_1(x) = -10 \sin\left(\frac{1}{10}(x - 29\pi)\right) ;$$

$$A = 10 ; \text{ p} = \frac{2\pi}{1/10} = 20\pi ; \mathbf{x_{minL}} = 11\pi \mathbf{x_{minR}} = 9\pi ; y_0 = 0$$

$$\text{b) } f_2(x) = 11 \sin\left(\frac{1}{3}(x + 25\pi) + 6\right)$$

$$A = 3 ; \text{ p} = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi ; \mathbf{x_{minL}} = \pi \mathbf{x_{minR}} = 5\pi ; y_0 = 6$$

$$\text{c) } f_3(x) = 2 \sin\left(-\frac{x}{4} + \frac{19}{4}\pi\right) - 7 = 2 \cdot -\sin\left(-\left[-\frac{x}{4} + \frac{19}{4}\pi\right]\right) - 7 = -2 \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{19}{4}\pi\right) - 7 =$$
$$-2 \sin\left(\frac{1}{4}(x - 19\pi)\right) - 7$$

$$A = 2 ; \text{ p} = \frac{2\pi}{1/4} = 8\pi ; \mathbf{x_{minL}} = 5\pi ; \mathbf{x_{minR}} = 3\pi ; y_0 = -7$$