

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

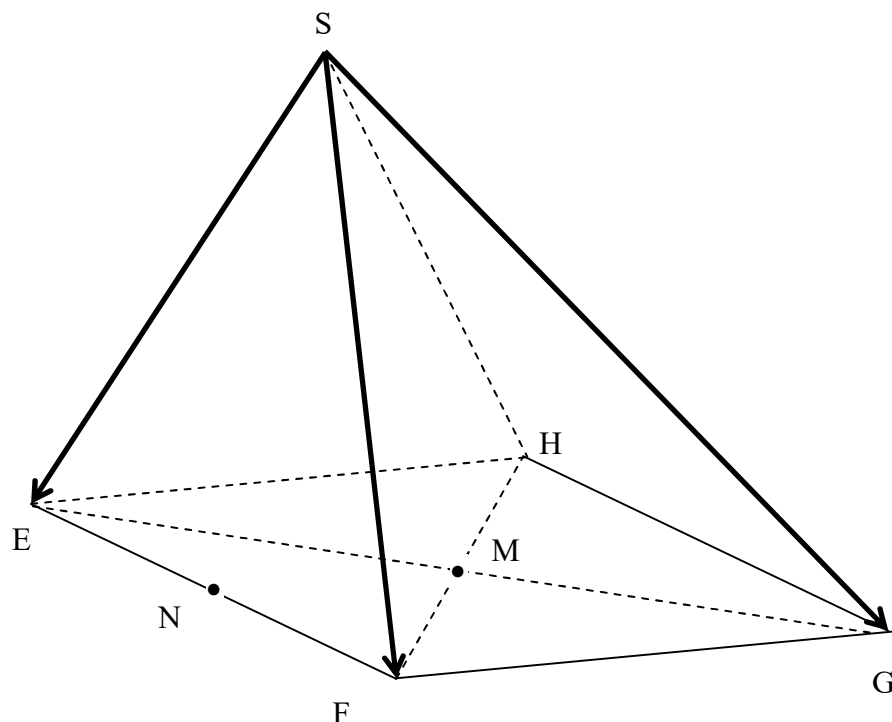
Bei linearen Gleichungssystemen **muss** der Gaussche Algorithmus benutzt werden !

1) Stellen Sie die Vektoren \overrightarrow{SN} , \overrightarrow{SH} , \overrightarrow{SM} der Pyramide (mit einer rechteckigen Grundfläche) als Linearkombination der Vektoren

\overrightarrow{SE} , \overrightarrow{SF} , \overrightarrow{SG} dar.

Bemerkung:

N ist die Mitte der Strecke \overline{EF} und M ist die Mitte der Grundfläche (Rechteck) (15 P)



2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung:

(15 P)

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

3) a) Begründen Sie mathematisch, ob man den Vektor $\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination

folgender folgenden Vektoren darstellen kann:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (8P)$$

b) (5P)

Zeigen Sie, dass man \vec{f} durch Linearkombination von \vec{d} und \vec{e} darstellen kann.

c) Zeigen Sie, dass man \vec{g} nicht durch Linearkombination von \vec{d} und \vec{e} darstellen kann. (5P)

d) Begründen Sie anschaulich mit dem Ergebnis von b) und c) die Lösung von a) (2P)

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

Lösungen:

$$1) a) \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SF}$$

$$b) \overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{SE} + (-\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}$$

$$c) \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} (-\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG}$$

2)

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \iff 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \iff x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \iff 3x = 6 \wedge 4x = 8 \wedge 5x = 10 \iff$$

$$x = 2 \wedge x = 2 \wedge x = 2, \text{ also } L = \{2\}$$

3) a)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 2 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot x_3 \\ 3 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1 \wedge 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1 \wedge 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2 \iff$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1$$

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1$$

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2$$

oder in Matritzenform:

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	2	3	1	G1	7
2	1	3	1	G2	6
1	1	2	2	G3	7
1	2	3	1	G4=G1	7
0	-3	-3	-1	G5=-2G1+G2	-7
0	-1	-1	1	G6=-G1+G3	-1
3	0	3	1	G7=3G4+2G5	7
0	-3	-3	-1	G8=G5	-7
0	0	0	-4	G9=G5-3G6	-4

$$L = \{ \}$$

b)

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{d} + \vec{e}$$

c)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 2 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 1 \wedge 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 1 \wedge 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 2 \iff$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 1$$

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 1$$

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 2$$

oder in Matritzenform:

x_1	x_2	b	Op	KS
1	2	1	G1	4
2	1	1	G2	4
1	1	2	G3	4
1	2	1	G4=G1	4
0	-3	-1	G5=-2G1+G2	-4
0	-1	1	G6=-G1+G3	0
3	0	1	G7=3G4+2G5	4
0	-3	-1	G8=G5	-4
0	0	-4	G9=G5-3G6	-4

$$L = \{ \}$$

d)

Da man \vec{f} durch Linearkombination von \vec{d} und \vec{e} darstellen kann, liegen \vec{f} , \vec{d} und \vec{e} in einer Ebene.

Da \vec{g} nicht durch Linearkombination von \vec{d} und \vec{e} darstellbar ist, liegt \vec{g} nicht in der Ebene von \vec{f} , \vec{d} und \vec{e} und kann deshalb nicht durch eine Linearkombination dieser Vektoren dargestellt werden.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

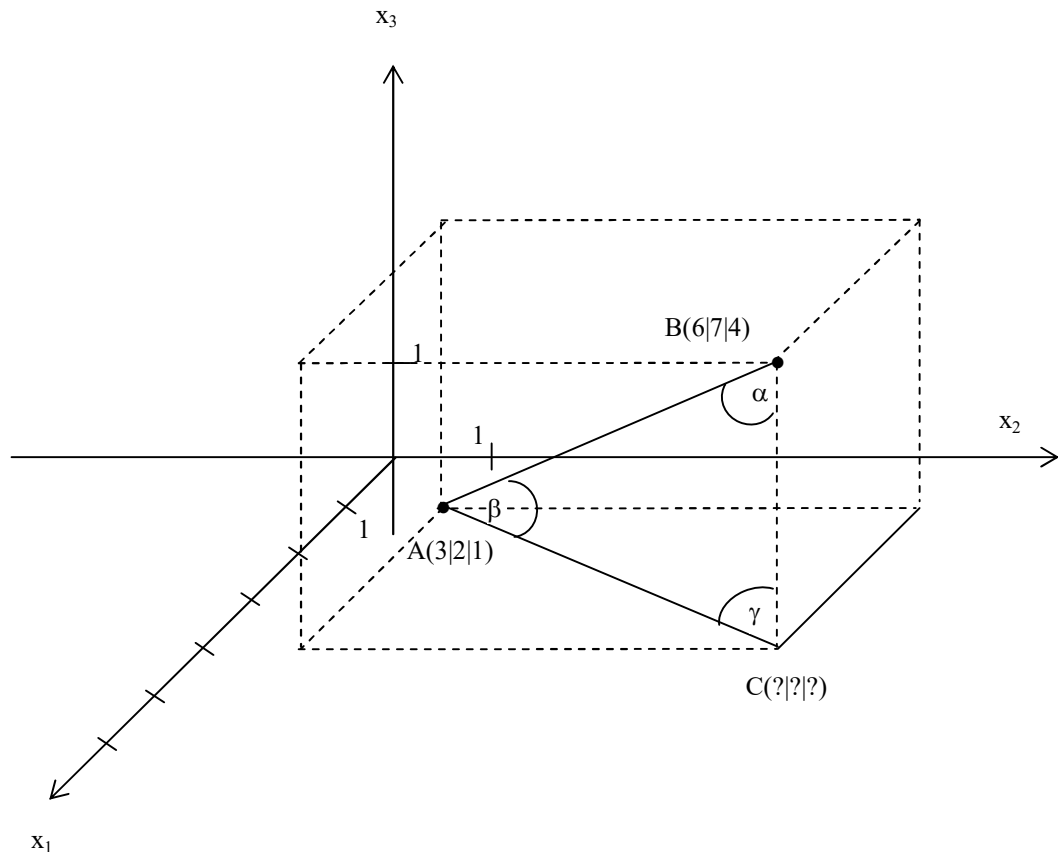
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben, falls möglich.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkungen:

- 1) Alle Berechnungen in der Aufgabe (Winkel, Längen, usw) sind ausschließlich sind mit Hilfe der Vektorrechnung durchzuführen.
- 2) Zahlen auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

AUFGABEN

- 1) Gegeben ist ein Quader, dessen Seiten parallel zu den entsprechenden Koordinatenachsen sind und der durch die Ecken $A(3|2|1)$ und $B(6|7|4)$ geht (siehe Skizze unten).



a) Zeichnen (keine Skizze !!) Sie den Quader in ein rechtwinkliges, dreidimensionales Koordinatensystem ein.

x_2 -Achse und x_3 -Achse: $1LE = 1 \text{ cm}$,

x_1 -Achse mit Schrägbildwinkel 45° und $1LE = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$

b) Geben Sie den Punkt C mit seinen Koordinaten an. Begründen Sie.

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke $e = \overline{AC}$

d) Berechnen Sie die Länge der Strecke $d = \overline{AB}$

e) Berechnen Sie die Winkel α, β, γ im Dreieck ABC.
Probe machen (Winkelsumme !).

Lösungen:

a) Zeichnung

5P

b)

5P

Die x_1 -Koordinate von B und C ist gleich groß.

Die x_2 -Koordinate von B und C ist gleich groß.

Die x_3 -Koordinate von A und C ist gleich groß, da A und C in einer Ebene liegen, die parallel zur x_1 - x_2 -Ebene ist.

Also: C(6 | 7 | 1)

$$c) |e| = |\overline{AC}| = \sqrt{(6-3)^2 + (7-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

5P

$$d) |d| = |\overline{AB}| = \sqrt{(6-3)^2 + (7-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

5P

e)

e1)

9P

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 7-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 7-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2 + 0^2}} = \frac{34}{\sqrt{43} \cdot \sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{43}}$$

$$\approx 0,8892$$

$$\text{also: } \beta \approx 27,23^\circ$$

e2)

9P

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 7-7 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-3 \cdot 0 + -5 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3)}{\sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{43} \cdot 3} = \frac{3}{\sqrt{43}}$$

$$\approx 0,4575$$

$$\text{also: } \alpha \approx 62,77^\circ$$

e3)

9P

$$\vec{CA} = -\vec{AC} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CB} = -\vec{BC} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-3 \cdot 0 + -5 \cdot 0 + 0 \cdot 3}{\sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2}} = 0$$

$$\text{also: } \gamma = 90^\circ$$

e4) Probe (Winkelsumme):

3P

$$\beta + \alpha + \gamma \approx 27,23^\circ + 62,77^\circ + 90^\circ \approx 180^\circ \quad (\text{wahr})$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist eine Pyramide, deren Spitze sich im Ursprung $O(0|0|0)$ und deren Eckpunkte sich auf den Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems befinden.

Für die Länge der Seitenkanten gilt:

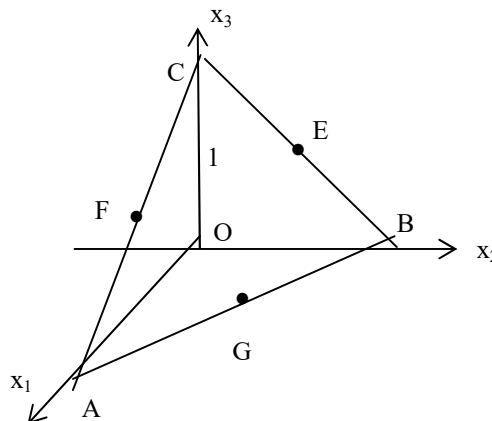
$$\left| \overrightarrow{OA} \right| = 3, \quad \left| \overrightarrow{OB} \right| = 2, \quad \left| \overrightarrow{OC} \right| = 1$$

Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke BC.

Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke AC.

Der Punkt G ist der Mittelpunkt der Strecke AB.

Skizze:



Bemerkungen:

1) Alle Berechnungen in der Aufgabe (Winkel) sind ausschließlich mit Hilfe der Vektorrechnung durchzuführen.

2) Zahlen auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Winkel im Dreieck $\triangle EFG$.

b) Probe machen (Winkelsumme!).

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben, falls möglich.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkung:

Unter "rechnerische Lösung" wird das im Unterricht verwendete Schema (nicht probieren !) verstanden.

AUFGABEN

1) Gegeben ist die Gerade g durch die folgende Parameterform:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Spurpunkte mit der x_1 - x_2 -Ebene.
- b) Begründen Sie das Ergebnis auch "anschaulich"

2) Gegeben ist die Gerade h durch die folgende Parameterform:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Spurpunkte mit der x_1 - x_3 -Ebene.
- b) Begründen Sie das Ergebnis auch "anschaulich"

3) Geben Sie die Menge aller Vektoren an, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ stehen.

4) Geben Sie die Menge der Schnittpunkte der folgenden Geraden an:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Lösungen;

1) a)

Der Spurpunkt sei $S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | 0)$. Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{12} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_{1S} &= 3 + 2 \cdot r_s \\ x_{2S} &= 4 - r_s \\ 0 &= -2 \end{aligned}$$

Für die Lösungsmenge L dieses Gleichungssystems gilt:

$$L = \emptyset$$

Also gibt es keinen Spurpunkt.

b) Die x_3 -Koordinate aller Punkte der Geraden g hat den Wert -2. Damit kann sie die x_1 - x_2 -Ebene nicht schneiden, da alle Punkte x_1 - x_2 -Ebene die x_3 -Koordinate 0 haben.

2) a)

Der Spurpunkt sei $S_{13} (x_{1S} | 0 | x_{3S})$. Da der Spurpunkt auf der Geraden g liegt ($S_{13} \in g$), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein r_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ 0 \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_{1S} &= -5 + 3 \cdot r_s \\ 0 &= 0 \\ x_{3S} &= 2 + r_s \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r_s \in \mathbb{R}$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen.

b) Die x_2 -Koordinate aller Punkte der Geraden h hat den Wert 0. Damit liegt sie in der x_1 - x_3 -Ebene. Deshalb schneidet sie diese in unendlich vielen Punkten.

3)

Für einen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, der senkrecht auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ steht, gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a + 2b + 3c = 0 \iff a = -2b - 3c$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a = -2b - 3c \wedge b \in R \wedge c \in R \right\}$$

4) Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} \mid x_{2S} \mid x_{3S})$. Dann gibt es ein r_s und t_s mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

also:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$-2 - 3r_s = -8 + 9t_s$	G1
$3 + 4r_s = 11 - 12t_s$	G2
$1 + 2r_s = 5 - 6t_s$	G3
$9t_s + 3r_s = 6$	G4
$-12t_s - 4r_s = -8$	G5
$-6t_s - 2r_s = -4$	G6
$9 \quad 3 \quad 6$	G4 Matrix-
$-12 \quad -4 \quad -8$	G5 schreib-
$-6 \quad -2 \quad -4$	G6 weise
$9 \quad 3 \quad -6$	G7=G4
$0 \quad 0 \quad 0$	G8=12*G4+9*G5
$0 \quad 0 \quad 0$	G9=2*G4+3*G6
$9 \quad 3 \quad -6$	G10=G7

$$9t_s + 3r_s = -6 \mid : 3$$

$$3t_s + r_s = -2$$

$$r_s = -2 - 9t_s$$

Es gibt unendlich viele Lösungen, also sind die Geraden identisch.