

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist ein Quader, dessen Seitenlängen sich wie folgt verhalten:

Breite : Länge : Höhe =  $1 : 2 : 3$  (siehe Skizze unten).

Ein Eckpunkt des Quaders befindet sich im Ursprung  $O(0|0|0)$ , ein anderer Eckpunkt A auf der positiven  $x_1$ -Achse, ein anderer Eckpunkt B auf der positiven  $x_2$ -Achse, ein anderer Eckpunkt C auf der positiven  $x_3$ -Achse.

a) Zeichnen (keine Skizze !!) Sie den Quader in ein rechtwinkliges, dreidimensionales Koordinatensystem ein.

$x_2$ -Achse und  $x_3$ -Achse:  $1LE = 2\text{ cm}$ ;  $x_1$ -Achse mit Schrägbildwinkel  $45^\circ$  und  $1LE = \sqrt{2}\text{ cm}$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Winkel (bitte alle dazu notwendigen Informationen in die Zeichnung eintragen, damit die Rechnung beim Korrigieren nachvollziehbar wird) zwischen der Raumdiagonale, die durch den Eckpunkt C des Quaders geht und der Projektion dieser Raumdiagonalen in die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene.

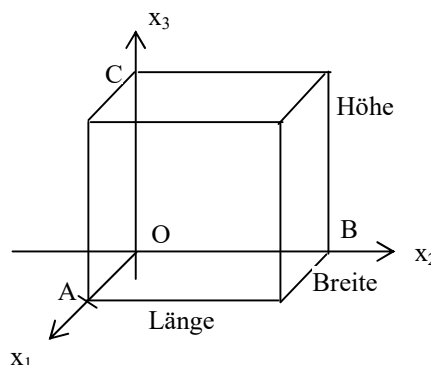
c) Die Mitte der Raumdiagonale, die durch den Ursprung O und dem dem Ursprung gegenüberliegenden Eckpunkt D des Quaders liegt, wird mit M bezeichnet.

Wie läßt sich  $\vec{OM}$  als Linearkombination von  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  und  $\vec{OC}$  darstellen ?

d) Wie heißt die Gleichung der Geraden, die durch diese Raumdiagonale in c) festgelegt wird.

e) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Schnittpunkt zweier Raumdiagonalen

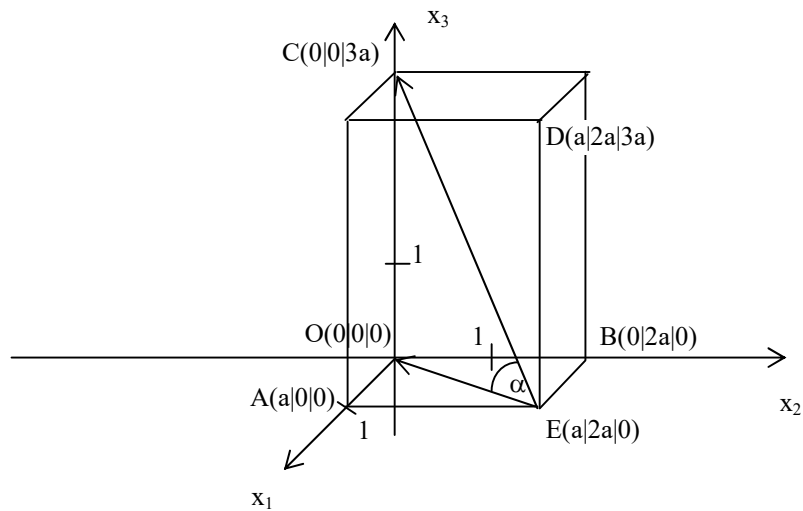
Skizze:



Lösungen:

1)

a) allgemeiner Nachweis für einen **beliebigen** Quader mit den oben gegebenen **Seitenverhältnissen**:



b)

$$\vec{EO} = \begin{pmatrix} 0-a \\ 0-2a \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{EC} = \begin{pmatrix} 0-a \\ 0-2a \\ 3a-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 3a \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{EO} \cdot \vec{EC}}{|\vec{EO}| \cdot |\vec{EC}|} = \frac{a^2 + 4a^2}{\sqrt{5a^2} \cdot \sqrt{14a^2}} = \frac{5a^2}{\sqrt{70}a^2} = \frac{5}{\sqrt{70}}$$

$$\alpha \approx 53,30^\circ$$

=====

c)

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

=====

d)

$$\vec{X} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

=====

e)

allgemeiner Nachweis für einen **beliebigen** Quader mit:

A(a|0|0), B(0|b|0), C(0|0|c)

(d1):  $\vec{X} = t \cdot \vec{OD}$  (d2):  $\vec{X} = \vec{OE} + r \cdot \vec{EC}$

$$\vec{X} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0-a \\ 0-b \\ c-0 \end{pmatrix}, \text{ also: } \vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$$

Für den Schnittpunkt S(x<sub>s1</sub>|x<sub>s2</sub>|x<sub>s3</sub>) gibt es ein t<sub>s</sub> und ein r<sub>s</sub> mit:

$$t_s \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} t_s \cdot a &= a - r_s \cdot a \\ t_s \cdot b &= b - r_s \cdot b \\ t_s \cdot c &= r_s \cdot c \end{aligned}$$

$t_s \cdot a = a - r_s \cdot a$	G11
$t_s \cdot b = b - r_s \cdot b$	G12
$t_s \cdot c = r_s \cdot c$	G13
$t_s = 1 - r_s$	G21=G11/a
$t_s = 1 - r_s$	G22=G12/b
$t_s = r_s$	G23=G13/c
$t_s = 1 - r_s$	G31=G22
$t_s = r_s$	G32=G23
$r_s = 1 - r_s$	t <sub>s</sub> in G31
$r_s = 1/2$	
$t_s = 1/2$	

Für den Schnittpunkt S(x<sub>s1</sub>|x<sub>s2</sub>|x<sub>s3</sub>) gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \\ x_{s3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt:

$$S\left(\frac{a}{2} \mid \frac{b}{2} \mid \frac{c}{2}\right)$$

=====

# KLAUSUR 1 Mathematik 2 2BK11 Nachtermin 1 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben sind die 3 Punkte

$$A(0 \mid 0 \mid 0)$$

$$B(-\sqrt{\frac{3}{2}} \mid \sqrt{\frac{3}{2}} \mid 1)$$

$$C(-\sqrt{6} \mid \sqrt{6} \mid 0)$$

a) Bestimmen Sie die Gleichungen (in Parameterform) der 3 Geraden

$g = (AB)$ ,  $h = (BC)$ ,  $i = (AC)$ .

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung alle Schnittpunkte der Geraden  $g$  mit der Geraden  $i$ .

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts (nicht mit dem Kosinussatz) die 3 Winkel in dem Dreieck  $ABC$

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$ .

Lösungen:

a)

$$\begin{aligned} \text{g: } \vec{X} &= t \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{h: } \vec{X} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} + \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{i: } \vec{X} &= t \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

Für den Schnittpunkt  $S(x_{s1}|x_{s2}|x_{s3})$  gibt es ein  $t_s$  und ein  $r_s$  mit:

$$t_s \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = r_s \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot t_s &= -\sqrt{6} \cdot r_s \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot t_s &= \sqrt{6} \cdot r_s \\ t_s &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow t_s = 0 \quad r_s = 0$$

Für den Schnittpunkt  $S(x_{s1}|x_{s2}|x_{s3})$  gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \\ x_{s3} \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt:

$S(0|0|0)$

=====

c)

c1)

$\alpha = \pi \text{ BAC}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-\sqrt{1,5} \cdot -\sqrt{6} + \sqrt{1,5} \cdot \sqrt{6} + 1 \cdot 0}{\sqrt{1,5+1,5+1} \cdot \sqrt{6+6}} = \frac{6}{2 \cdot \sqrt{12}} = \frac{6}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot 3}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

c2)

$\beta = \pi \text{ BAC}$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} + \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|} = \frac{(-\sqrt{6} + \sqrt{1,5}) \cdot \sqrt{1,5} + (\sqrt{6} - \sqrt{1,5}) \cdot -\sqrt{1,5} + -1 \cdot -1}{\sqrt{(-\sqrt{6} + \sqrt{1,5})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{1,5})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\sqrt{1,5}^2 + (\sqrt{1,5})^2 + (-1)^2}} =$$

$$\frac{-3 + 1,5 - 3 + 1,5 + 1}{\sqrt{6 + 1,5 - 6 + 6 + 1,5 - 6 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1,5 + 1,5 + 1}} = \frac{-2}{4} = -0,5$$

$$\beta = 120^\circ$$

c3)

$\gamma = \pi \text{ BAC}$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 30^\circ$$

d)

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \text{ , damit:}$$

$$A \approx 1,732 \text{ FE}$$

# KLAUSUR 1 Mathematik 2 2BK11 Nachtermin 2 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorna me muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist die Gerade durch die folgenden 2 Punkte:

A (1 | 2 | 3)

B (11 | -18 | -17)

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung (in Parameterform) der Geraden  $g = (AB)$

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt Q (19 | -34 | -33) auf der Geraden g liegt.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die von A die Entfernung 120 LE (Längeneinheiten) haben und auf der Geraden g liegen.

d) Durch die Punkte A und Q ist die Strecke  $\overline{AQ}$  gegeben.

Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte  $T_1$  und  $T_2$ , so dass die Strecke  $\overline{AQ}$  in 3 gleiche Teile geteilt wird.

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Gerade h, die senkrecht auf g steht und durch den Punkt R(5 | 1 | 6) geht.

f) Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand des Punktes R(5 | 1 | 6) von der Geraden g.

g) Bestimmen Sie rechnerisch einen Punkt C, so dass die Gerade  $i = (BC)$  durch den Ursprung  $O(0|0|0)$  geht und  $B \neq C$  und  $C \neq O(0|0|0)$  ist.

Lösungen:

a)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11-1 \\ -18-2 \\ -17-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

b)

Sei  $Q \in g$ , dann existiert ein  $t_s$  mit:

$$\begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_s \\ 2-20t_s \\ 3-20t_s \end{pmatrix} \Leftrightarrow (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \Leftrightarrow t_s=1,8$$

$\Rightarrow Q \in g$

c) Gesucht:  $t_x$  mit

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = 120$$

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = \left| \begin{pmatrix} 10t_x \\ -20t_x \\ -20t_x \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(10t_x)^2 + (-20t_x)^2 + (-20t_x)^2} = \sqrt{900t_x^2} = 30\sqrt{t_x^2}$$

$$30\sqrt{t_x^2} = 120 \Leftrightarrow \sqrt{t_x^2} = 4 \Leftrightarrow |t_x| = 4 \Leftrightarrow t_{x1} = 4, t_{x2} = -4$$

also:

$$\vec{OP}_1 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -78 \\ -77 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_2 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 82 \\ 83 \end{pmatrix}, \quad \text{also } P_1(41 | -78 | -77), P_2(-39 | 82 | 83)$$

d)

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 19-1 \\ -34-2 \\ -33-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AT}_2 = \vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AT}_1 = \vec{OA} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

also:

$$T_1(7 | -10 | -9) \quad T_2(13 | -22 | -21)$$

e)

$F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F})$  sei der Punkt, der auf  $g$  und  $h$  liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_F \\ 2-20t_F \\ 3-20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1F} & = & 1+10t_F \\ x_{2F} & = & 2-20t_F \\ x_{3F} & = & 3-20t_F \end{matrix}$$

Es gilt außerdem:



$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{FR} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 - x_{1F} \\ 1 - x_{2F} \\ 6 - x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 - (1 + 10t_F) \\ 1 - (2 - 20t_F) \\ 6 - (3 - 20t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 - 10t_F \\ -1 + 20t_F \\ 3 + 20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 - 10t_F \\ -1 + 20t_F \\ 3 + 20t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot (4 - 10t_F) + (-20) \cdot (-1 + 20t_F) + (-20) \cdot (3 + 20t_F) = 0 \Leftrightarrow 40 - 100t_F + 20 - 400t_F - 60 - 400t_F = 0 \Leftrightarrow -900t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = 0$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{also: } F(1 | 2 | 3)$$

Dann gilt:

$$\overrightarrow{FR} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 1 - 2 \\ 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und damit:}$$

$$\text{h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

f)

$$|\overrightarrow{FR}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$

g)

1. Lösung:

O ist ein Aufpunkt und  $\overrightarrow{OB}$  ein Richtungsvektor dieser Geraden i. Also gilt:

$$\text{i: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 - 0 \\ -18 - 0 \\ -17 - 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix}$$

wähle z.B: t = 2, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{1C} \\ x_{2C} \\ x_{3C} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -36 \\ -34 \end{pmatrix} \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

## 2. Lösung (nicht so elegant):

Sei  $C(x_{1C} | x_{2C} | x_{3C}) \in i$ , dann ist  $B$  ein Aufpunkt und  $\overrightarrow{BC}$  ein Richtungsvektor dieser Geraden  $i$ . Also gilt:

$$i: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} - (-18) \\ x_{3C} - (-17) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix}$$

Da  $0 \in i$ , existiert ein  $t_s$  mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 0 &= 11 + t_s \cdot x_{1C} - 11 t_s \\ 0 &= -18 + t_s \cdot x_{2C} + 18 t_s \\ 0 &= -17 + t_s \cdot x_{3C} + 17 t_s \end{aligned} \iff$$

$$x_{1C} = (-11 + 11 t_s) / t_s$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 t_s) / t_s$$

$$x_{3C} = (17 - 17 t_s) / t_s$$

wähle z.B:  $t_s = -1$ , dann gilt:

$$x_{1C} = (-11 + 11 \cdot (-1)) / (-1) = 22$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 \cdot (-1)) / (-1) = -36 \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

$$x_{3C} = (17 - 17 \cdot (-1)) / (-1) = -34$$

## 2. Lösung von f)

Für alle Punkte  $P(x_1 | x_2 | x_3)$ , die sich frei auf der Gerade  $g$  bewegen und diese durchlaufen, gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t \\ 2-20t \\ 3-20t \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} x_1 &= 1+10t \\ x_2 &= 2-20t \\ x_3 &= 3-20t \end{aligned}$$

also:

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+10t) - 5 \\ (2-20t) - 1 \\ (3-20t) - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t - 4 \\ -20t + 1 \\ -20t - 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{RP}| &= \sqrt{(10t - 4)^2 + (-20t + 1)^2 + (-20t - 3)^2} = \\ &= \sqrt{100t^2 - 80t + 16 + 400t^2 - 40t + 1 + 400t^2 + 120t + 9} = \\ &= \sqrt{26 + 900t^2} \end{aligned}$$

Wann wird dieser Wert minimal ?

Für  $t = 0$  !

also:

$$|\overrightarrow{RF}| = \sqrt{26}$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

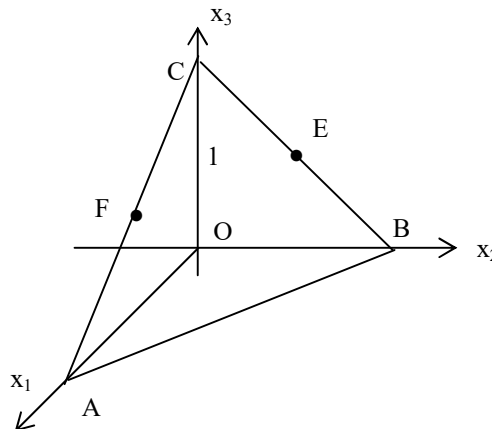
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist eine Pyramide, deren Spitze sich im Ursprung  $O(0|0|0)$  und deren Eckpunkte sich auf den Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems befinden. Jede von der Spitze  $O(0|0|0)$  ausgehende Seitenkante der Pyramide hat die Länge 1 LE. Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke BC. Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke AC.

Skizze:



- a) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden  $g_1 = (BF)$
- b) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden  $g_2 = (AE)$
- c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , indem Sie ein entsprechendes Gleichungssystem aufstellen.
- d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$
- e) Bestimmen Sie die Länge der Strecke  $h = OS$ .
- f) Beweisen Sie (mit Hilfe des Skalarprodukts), dass  $h$  senkrecht zu der durch die Punkte A,B,C definierten Grundfläche ist.
- g) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung:

- a)  $A(1 \mid 0 \mid 0)$ ;  $B(0 \mid 1 \mid 0)$ ;  $C(0 \mid 0 \mid 1)$

a1) Berechnung von E:

$$\vec{OE} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \text{ also } E(0 \mid 0,5 \mid 0,5)$$

a2) Berechnung von F:

$$\vec{OF} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \text{ also } F(0,5 \mid 0 \mid 0,5)$$

Berechnung von g<sub>1</sub>

$$g_1: \vec{X} = \vec{OB} + r \cdot \vec{BF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5-0 \\ 0-1 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

b)

$$g_2: \vec{X} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0,5-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

c)

Für den Schnittpunkt S(x<sub>1S</sub>|x<sub>2S</sub>|x<sub>3S</sub>) gibt es ein t<sub>s</sub> und ein r<sub>s</sub> mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 0,5 \cdot r_s = 1 - t_s \\ 1 - r_s = 0,5 \cdot t_s \\ 0,5 \cdot r_s = 0,5 \cdot t_s \end{matrix} \Leftrightarrow t_s = 2/3 \quad r_s = 2/3$$

Für den Schnittpunkt S(x<sub>s1</sub>|x<sub>s2</sub>|x<sub>s3</sub>) gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt:

$$S\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{3} \mid \frac{1}{3}\right)$$

=====

d) Länge jeder Seite a des Dreiecks ΔABC: a = √2

Damit ist der Flächeninhalt: A =  $\frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e)

$$h = |\vec{OS}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

f)

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{OS} \cdot \vec{AE} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

$$g) V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{6}$$

## KLAUSUR 2 Mathematik 2 2BK11 Nachtermin 2 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

### AUFGABEN

1) a) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden  $g_1 = (UV)$  durch die Punkte  $U(3\sqrt{2} \mid \sqrt{6} \mid 2\sqrt{3})$  und  $V(9\sqrt{2} \mid -\sqrt{6} \mid -2\sqrt{3})$

b) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden  $g_2$ , die durch den Punkt

$B(3\sqrt{2} \mid 3\sqrt{6} \mid 0)$  und dem Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

festgelegt ist.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , indem Sie ein entsprechendes Gleichungssystem aufstellen.

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle SPQ$  das durch die folgenden Punkte festgelegt ist:

$S(3\sqrt{2} \mid \sqrt{6} \mid 2\sqrt{3})$ ,  $P(5\sqrt{2} \mid \frac{\sqrt{6}}{3} \mid \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ,  $Q(3\sqrt{2} \mid \frac{7\sqrt{6}}{3} \mid \frac{2\sqrt{3}}{3})$

e) Zeigen Sie rechnerisch, daß die Geraden  $g_1$ ,  $g_2$  und  $g_3 = (OS)$  jeweils senkrecht zueinander stehen.

f) Gegeben ist der Punkt  $A(6\sqrt{2} \mid 0 \mid 0)$ . Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte  $T_1$  und  $T_2$ , so dass die Strecke  $\overline{AS}$  in 3 gleiche Teile geteilt wird.

g) Gegeben ist der Punkt  $B(3\sqrt{2} \mid 3\sqrt{6} \mid 0)$ . Bestimmen Sie rechnerisch den Punkt  $T_3$ , der die Strecke  $\overline{AB}$  in 2 gleiche Teile geteilt wird.

h) Bestimmen Sie rechnerisch den Punkt  $M$  auf der Strecke  $\overline{OT_3}$ , so daß sich die Länge der Strecke  $\overline{T_3M}$  zur Länge der Strecke  $\overline{OT_3}$  wie  $1 : 3$  verhält.

i) Gegeben ist der Punkt  $W(\frac{9}{2}\sqrt{2} \mid \frac{3\sqrt{6}}{2} \mid 0)$ .

Bestimmen Sie den Abstand von  $S$  zur Geraden  $g_4 = (BW)$

Lösungen:

a)

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} - \sqrt{6} \\ -2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

b)

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} + s_s \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} + r_s \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \cdot r_s$$

$$3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} \cdot s_s = \sqrt{6} - 2\sqrt{6} \cdot r_s$$

$$2\sqrt{3} \cdot s_s = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cdot r_s$$

$$\Leftrightarrow s_s = 1, r_s = 0 \quad \text{also: } S(3\sqrt{2} \mid \sqrt{6} \mid 2\sqrt{3})$$

d)

$$\vec{SP} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\frac{2}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad |\vec{SP}| = \sqrt{4 \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot 6 + \frac{16}{9} \cdot 3} = 4$$

$$\vec{SQ} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ \frac{7\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad |\vec{SQ}| = \sqrt{\frac{16}{9} \cdot 6 + \frac{16}{9} \cdot 3 + \frac{16}{9} \cdot 3} = 4$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ \frac{7\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{PQ}| = \sqrt{4 \cdot 2 + 6 \cdot 4} = 4\sqrt{2}$$

e)

$$g_3: \vec{x} = t \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} = 18 \cdot 2 - 2 \cdot 6 - 8 \cdot 3 = 0, \text{ also } g_3 \perp g_1$$

$$\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = -2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 0, \text{ also } g_3 \perp g_2$$

$$\begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = 4 \cdot 6 - 8 \cdot 3 = 0, \text{ also } g_1 \perp g_2$$

f)

$$\vec{AS} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ \sqrt{6} - 0 \\ 2\sqrt{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{OT}_1 = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \text{ also: } T_1(5\sqrt{2} \mid \frac{\sqrt{6}}{3} \mid \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

$$\vec{OT}_2 = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \text{ also: } T_2(4\sqrt{2} \mid \frac{2\sqrt{6}}{3} \mid \frac{4\sqrt{3}}{3})$$

g)

$$\vec{OT}_3 = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also: } T_3(\frac{9}{2}\sqrt{2} \mid \frac{3\sqrt{6}}{2} \mid 0)$$



h)

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{9}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also: } M(3\sqrt{2} \mid \sqrt{6} \mid 0)$$

i)

$$g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ 0 - 3\sqrt{6} \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F(x_{1F} \mid x_{2F} \mid x_{3F}) \neq B$  sei der Punkt (der sogenannte Fußpunkt), der auf  $g_4$  liegt und für den gilt:

$\vec{SF} \perp \vec{BF}$ . Da  $F \in g_4$ , gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t_s \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also:}$$

$$x_{1F} = 3\sqrt{2}$$

$$x_{2F} = 3\sqrt{6} - t_s \cdot 3\sqrt{6}$$

$$x_{3F} = 0$$

Da gilt  $\vec{SF} \perp \vec{BF}$ :

$$\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} - 3\sqrt{6}t_s - \sqrt{6} \\ 0 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} - 3\sqrt{6}t_s - 3\sqrt{6} \\ 0 - 0 \end{pmatrix}, \text{ also:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6}t_s \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sqrt{6}t_s \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2\sqrt{6} - 3\sqrt{6}t_s) \cdot (-3\sqrt{6}t_s) = 0 \Leftrightarrow (-36t_s + 54t_s^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t_{s1} = 0, t_{s2} = \frac{2}{3}$$

$t_{s1} = 0$  keine Lösung, da sonst:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ keine Lösung, da sonst } B \neq B$$

$t_{s1} = 2/3$ :

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also: } F(3\sqrt{2} \mid \sqrt{6} \mid 0)$$

Damit:

$$|\overrightarrow{FS}|=|\begin{pmatrix} 3\sqrt{2}-3\sqrt{2} \\ \sqrt{6}-\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3}-0 \end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$$

## KLAUSUR 2    Mathematik 2    2BK11    7.2.2003    Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname: Abschlussklausur 2001

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Lösungen:

1)

$$a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 12-3 \\ 11-2 \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} 10-12 \\ 13-11 \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also: } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ also: } \vec{AB} \perp \vec{BC}$$

$$b) |\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{162}, |\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 10-3 \\ 13-2 \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also } |\vec{AC}| = \sqrt{170}$$

c) Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene parallel zur  $x_1$ - $x_3$ -Ebene im Abstand 8.

$$d) \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ also: } D(1 | 4 | 8)$$

2) A'(3|2|0), B'(12|11|0), C'(10|13|0), D'(1|4|0)

3) a)

$$d_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10-3 \\ 13-2 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$d_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10-3 \\ 13-2 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Für den Schnittpunkt S( $x_{1g}$ | $x_{2g}$ | $x_{3g}$ ) gibt es ein  $t_g$  und ein  $r_g$  mit:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r_g \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix} + t_g \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 3 + 7 \cdot r_g = 10 + 7t_g \\ 2 + 11r_g = 13 + 11t_g \\ 8 - 8r_g = 8 + 8t_g \end{array} \Leftrightarrow t_g = -1/2 \quad r_g = 1/2$$

Für den Schnittpunkt S( $x_{1g}$ | $x_{2g}$ | $x_{3g}$ ) gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x_{1g} \\ x_{2g} \\ x_{3g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 7,5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt:  
S(6,5 | 7,5 | 4)

b)

$$\vec{C'A} = \begin{pmatrix} 10-3 \\ 13-2 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{A'C} = \begin{pmatrix} 10-3 \\ 13-2 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ also:}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{C'A} \cdot \vec{A'C}}{|\vec{C'A}| \cdot |\vec{A'C}|} = \frac{7 \cdot 7 + 11 \cdot 11 + 8 \cdot -8}{\sqrt{49 + 121 + 64} \cdot \sqrt{49 + 121 + 64}} = \frac{106}{234} = \frac{53}{117}$$

also

$$\alpha \approx 63,064^\circ$$

4)

$$V_Q = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cdot |\vec{AA'}| = \sqrt{162} \cdot \sqrt{8} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3-3 \\ 2-2 \\ 0-8 \end{pmatrix} \right| = 36 \cdot 8 = 288 \text{ VE}$$

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cdot (12-8) = 48 \text{ VE}$$

also:

$$V_G = V_Q + V_P = 288 \text{ VE} + 48 \text{ VE} = 336 \text{ VE}$$

5)

$$(SC): \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 7,5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10-6,5 \\ 13-7,5 \\ 8-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 7,5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3,5 \\ 5,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Für den Schnittpunkt  $T(x_{1g}|x_{2g}|0)$  gibt es ein  $t_g$  mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1g} \\ x_{2g} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 7,5 \\ 12 \end{pmatrix} + t_g \cdot \begin{pmatrix} 3,5 \\ 5,5 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_{1g} = 6,5 + 3,5 t_g \\ x_{2g} = 7,5 + 5,5 t_g \\ x_{3g} = 12 - 4 t_g \end{array} \Leftrightarrow t_g = 3$$

also:  $x_{1g} = 17, x_{2g} = 24$

also:

T(17 | 24 | 0)

=====

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Eine Parabel 4. Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

$P(4 | 0)$  liegt auf dieser Parabel. Die Parabel schließt mit der x-Achse und den Geraden  $x = 0$  und  $x = 4$  eine Fläche von 6,4 FE ein.

Wie heisst die Funktionsgleichung dieser Parabel 4. Grades ?

Lösungen:

1)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

a)  $O(0|0) \in K_f$ :

$$f(0) = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$$

$$e = 0$$

b)  $O(0|0)$  ist WP:

$$f''(0) = 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c$$

$$c = 0$$

c)  $O(0|0)$  hat waagrechte Tangente:

$$f'(0) = 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d$$

$$d = 0$$

also:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

d)  $P(4 | 0) \in K_f$ :

$$f(4) = a \cdot 4^4 + b \cdot 4^3 = 0$$

$$b = -4a$$

also:

$$f(x) = ax^4 + -4ax^3$$

e)

$$\int_0^4 (ax^4 - 4ax^3) dx = \left[ a \frac{x^5}{5} - ax^4 \right]_0^4 = \frac{a \cdot 4^5}{5} - a \cdot 4^4 = 6,4 \quad | \cdot 5$$

$$a \cdot 4^5 - 5a \cdot 4^4 = 32$$

$$a(4^5 - 5 \cdot 4^4) = 32$$

$$a = -1/8$$

also:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist folgendes Zahlenrätsel:

$$\begin{array}{r} x_1 \quad x_1 \quad x_2 \\ + \quad x_3 \quad x_4 \quad x_2 \\ \hline 1 \quad 1 \\ \hline x_2 \quad x_3 \quad x_1 \end{array}$$

Für die Lösung muss gelten:

gleiche Variable - gleiche Ziffern und verschiedene Variablen - verschiedene Ziffern

- a) Bestimmen Sie mittels eines LGS und dem Gaußverfahren die Lösungsmenge.
- b) Geben Sie eine Lösung des obigen Zahlenrätsels an.
- c) Warum stimmen die Lösungsmenge, die man mit dem Gaußverfahren erhält, mit der Lösungsmenge für das Zahlenrätsel nicht überein ?
- d) Wieviel Möglichkeiten müsste ein "Brute-Force-Programm" durchprobieren, das ohne das Gaußverfahren arbeitet.
- e) Wieviel Möglichkeiten müsste ein "Brute-Force-Programm" durchprobieren, das mit dem Gaußverfahren arbeitet.



## Lösungen:

1)

$$2x_2 = x_1 + 10$$

$$x_1 + x_4 + 1 = 10 + x_3$$

$$x_1 + x_3 + 1 = x_2$$

-----

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b	Op	KS
-1	2	0	0	10	G1	11
1	0	-1	1	9	G2	10
1	-1	1	0	-1	G3	0
-1	2	0	0	10	G4=G1	11
1	0	-1	1	9	G5=0G1+G2	10
1	0	2	0	8	G6=G1+2G3	11
-1	2	0	0	10	G7=0G6+G4	11
3	0	0	2	26	G8=G6+2G5	31
1	0	2	0	8	G9=G6	11
-0,5	1	0	0	5	G10=G7/2	5,5
1,5	0	0	1	13	G11=G8/2	15,5
0,5	0	1	0	4	G12=G9/2	5,5

setze:

$$x_1 = r$$

also:

$$x_1 = r$$

$$x_2 = 5 + 0,5s$$

$$x_3 = 4 - 0,5s$$

$$x_4 = 13 - 1,5s$$

also:

$$L = \{(r; 5+0,5s; 4-0,5s; 13-1,5s) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M \setminus \{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

**AUFGABEN**

1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung:

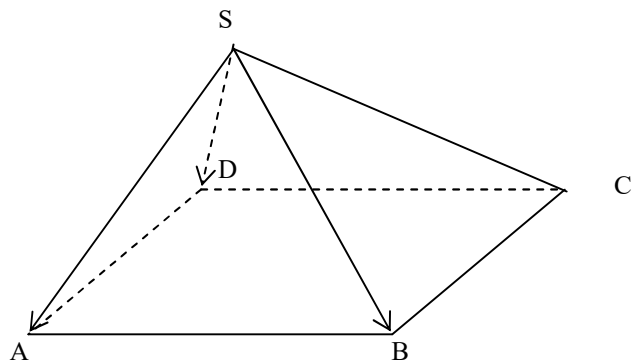
$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

2)

Stellen Sie zeichnerisch und rechnerisch den Vektor

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ als Linearkombination der Vektoren } \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dar.}$$

3) Stellen Sie die Vektoren  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{DB}$  der quadratischen Pyramide (siehe Skizze) als Linearkombination der Vektoren  $\overrightarrow{SD}$ ,  $\overrightarrow{SA}$ ,  $\overrightarrow{SB}$  dar.



4) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - x_3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

1)

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x \\ 7x \\ 4x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5x \\ 7x \\ -x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x-5x \\ 7x-7x \\ 4x+x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 5x \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 8 = 4x \wedge 0 = 0 \wedge 10 = 5x \Leftrightarrow x = 2 \wedge 0 = 0 \wedge x = 2 \Leftrightarrow x = 2, \text{ also } L = \{2\}$$

2)

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -3x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_2 \\ -1x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 - x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-2 = -2x_1 - 2x_2$$

$$3 = -3x_1 - x_2$$

ergibt (nach GA):

-2	-2	-2	G1	-6
-3	-1	3	G2	-1
-2	-2	-2	G3=G1	-6
0	4	12	G4=-3G1+2G2	16
-4	0	8	G5=2G3+G4	4
0	4	12	G6=G4	16
1	0	-2	G7=G5/-4	-1
0	1	3	G8=G6/4	4

also:

$$x_1 = -2 \wedge x_2 = 3 \text{ und damit: } \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3)

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}$$

$$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$$

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SA}$$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB} = -(-\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA}) - (-\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SB} - 2\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} = -(\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}) - (-\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA}) = -\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB}$$

4)

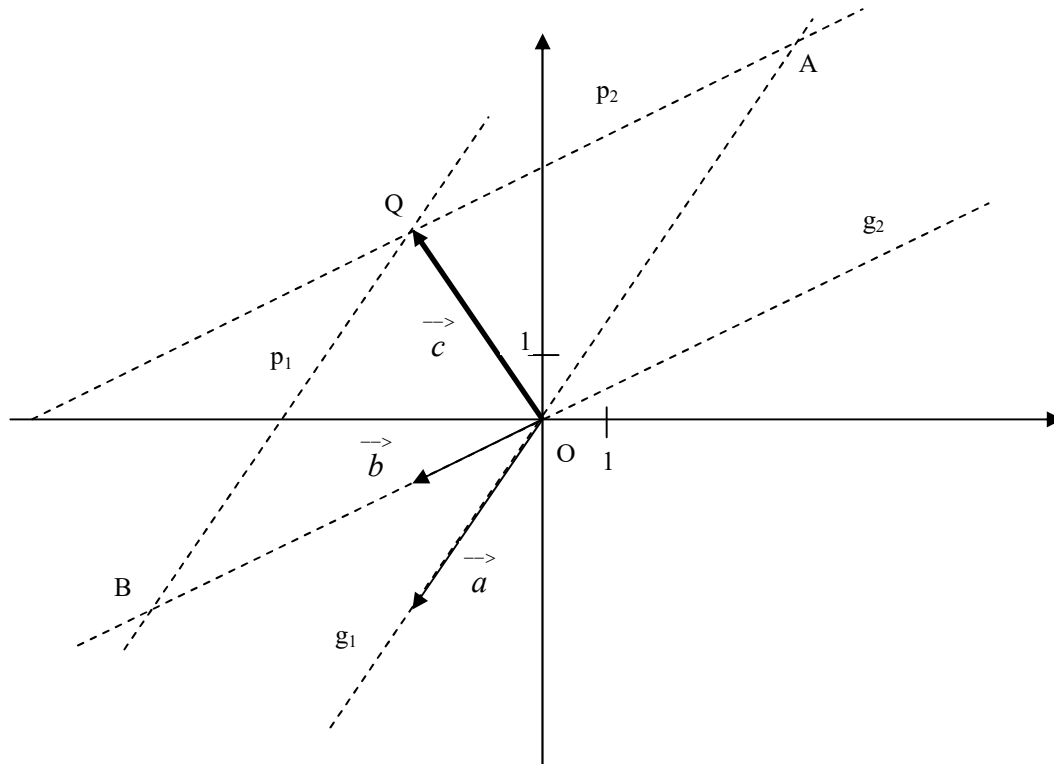
$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - x_3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4x_3 \\ x_3 \\ 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 22 \quad \text{Lösungsweg siehe Heft! } L = \{(1;2;3)\}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5$$

Zeichnung zu 2)



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

Konstruktionsvorschrift:

- Gerade  $g_1$  durch  $\vec{a}$
- Gerade  $g_2$  durch  $\vec{b}$
- Parallele  $p_1$  zu  $g_1$  durch den Punkt Q gibt den Schnittpunkt B.
- Parallele  $p_2$  zu  $g_2$  durch den Punkt Q gibt den Schnittpunkt A.
- Es gilt dann:  $\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB}$

e) Messen der Längen der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{OA}$  mit dem Geodreieck.

Da  $\vec{OA}$  2 mal so lang ist wie  $\vec{a}$  und in die entgegengesetzte Richtung zeigt, gilt:

$$\vec{OA} = -2 \cdot \vec{a}$$

f) Messen der Längen der Vektoren  $\vec{b}$  und  $\vec{OB}$  mit dem Geodreieck.

Da  $\vec{OB}$  3 mal so lang ist wie  $\vec{b}$  und in die gleiche Richtung zeigt, gilt:

$$\vec{OB} = 3 \cdot \vec{b}$$

g) Also:

$$\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = -2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

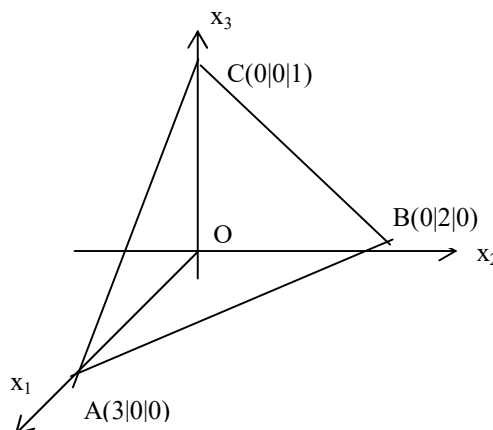
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist eine Pyramide, deren Spitze sich im Ursprung  $O(0|0|0)$  und deren Eckpunkte  $A(3|0|0)$ ,  $B(0|2|0)$  und  $C(0|0|1)$  sich auf den Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems befinden.

Skizze:



- a) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden  $g_1 = (AB)$
- b) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden  $g_2 = (AC)$
- c) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden  $g_3 = (BC)$
- d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts (nicht mit dem Kosinussatz) die 3 Winkel in dem Dreieck ABC
- e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$

Lösung:

a)

A(3|0|0); B(0|2|0); C(0|0|1)

$$g_1: \vec{X} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$g_2: \vec{X} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$g_3: \vec{X} = \vec{OB} + r \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d)

d1) Berechnung des Winkels  $\alpha = \angle ABC$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{-\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| -\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\frac{3 \cdot 0 + -2 \cdot -2 + 0 \cdot 1}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(0)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} = \approx 0,49614$$

also:  $\alpha \approx 60,255^\circ$

d2) Berechnung des Winkels  $\beta = \angle CAB$

$$\cos \beta = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} =$$

$$\frac{-3 \cdot -3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-3)^2 + (0)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + 0^2}} = \frac{9}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}} = \approx 0,78935$$

also:  $\beta \approx 37,874^\circ$

d3) Berechnung des Winkels  $\gamma = \angle ACB$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{-\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot -\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| -\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| -\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\frac{3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \approx 0,14142$$

also:  $\gamma \approx 81,870^\circ$

e) Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \sin \beta \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{13} \cdot \sin 37,874^\circ \approx 3,499$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben sind die 3 Punkte

$$A(0 \mid 0 \mid 0)$$

$$B(-\sqrt{\frac{3}{2}} \mid \sqrt{\frac{3}{2}} \mid 1)$$

$$C(-\sqrt{6} \mid \sqrt{6} \mid 0)$$

a) Bestimmen Sie (exakt, keine Näherung) die Gleichungen (in Parameterform) der 3 Geraden  $g = (AB)$ ,  $h = (BC)$ ,  $i = (AC)$ .

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung alle Schnittpunkte der Geraden  $g$  mit der Geraden  $i$ .

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts (nicht mit dem Kosinussatz) die 3 Winkel in dem Dreieck  $ABC$

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$ .



Lösungen:

a)

$$\text{g: } \vec{X} = t \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{h: } \vec{X} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} + \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{i: } \vec{X} = t \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

Für den Schnittpunkt  $S(x_{s1}|x_{s2}|x_{s3})$  gibt es ein  $t_s$  und ein  $r_s$  mit:

$$t_s \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = r_s \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot t_s &= -\sqrt{6} \cdot r_s \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot t_s &= \sqrt{6} \cdot r_s \\ t_s &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow t_s = 0 \quad r_s = 0$$

Für den Schnittpunkt  $S(x_{s1}|x_{s2}|x_{s3})$  gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \\ x_{s3} \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt:

$S(0|0|0)$

=====

c)

c1)

$\alpha = \pi \text{ BAC}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-\sqrt{1,5} \cdot -\sqrt{6} + \sqrt{1,5} \cdot \sqrt{6} + 1 \cdot 0}{\sqrt{1,5+1,5+1} \cdot \sqrt{6+6}} = \frac{6}{2 \cdot \sqrt{12}} = \frac{6}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot 3}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

c2)

$\beta = \pi \text{ BAC}$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} + \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|} = \frac{(-\sqrt{6} + \sqrt{1,5}) \cdot \sqrt{1,5} + (\sqrt{6} - \sqrt{1,5}) \cdot -\sqrt{1,5} + -1 \cdot -1}{\sqrt{(-\sqrt{6} + \sqrt{1,5})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{1,5})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\sqrt{1,5}^2 + (\sqrt{1,5})^2 + (-1)^2}} =$$

$$\frac{-3 + 1,5 - 3 + 1,5 + 1}{\sqrt{6 + 1,5 - 6 + 6 + 1,5 - 6 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1,5 + 1,5 + 1}} = \frac{-2}{4} = -0,5$$

$$\beta = 120^\circ$$

c3)

$\gamma = \pi \text{ BAC}$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 30^\circ$$

d)

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \text{ , damit:}$$

$$A \approx 1,732 \text{ FE}$$