

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN**I) Bestimmen Sie die Mengen (keine Venn – Diagramme)**

1) (2P)

gegeben: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ gesucht: $A \cup B$

2) (2P)

gegeben: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ gesucht: $E \cap F$ **II) Formen Sie die Terme so in **einfachere** Terme um, dass sich allgemeingültige Gleichungen ergeben.**3) $17a - 23b + 35c - 9a - 41c + 30b$ (1P)4) $\frac{20a^2 + 15ab - 35ac}{5a}$ (2P)5) $\frac{38u^2 - 57uv}{2u - 3v}$ (2P)6) $\frac{ax - ay}{5x - 5y}$ (2P)7) $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1}$ (4P)8) $\frac{2x + 1}{x} - \frac{x + 1}{x}$ (4P)

III) Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen.

$$9) \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1} \quad (4P)$$

$$10) \frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \quad (4P)$$

$$11) \frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3} \quad (6P)$$

$$12) \frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \quad (5P)$$

$$13) \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \quad (7P)$$

$$14) \frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \quad (7P)$$

Lösungen:

1) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

2) $E \cap F = \emptyset$

3) $17a - 23b + 35c - 9a - 41c + 30b = 8a + 7b - 6c$

4) $\frac{20a^2 + 15ab - 35ac}{5a} = \frac{20a^2}{5a} + \frac{15ab}{5a} - \frac{35ac}{5a} = 4a + 3b - 7c$

5) $\frac{38u^2 - 57uv}{2u - 3v} = \frac{19u(2u - 3v)}{2u - 3v} = 19u$

6) $\frac{ax - ay}{5x - 5y} = \frac{a(x-y)}{5(x-y)} = \frac{a}{5}$

7) $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{b}{a} + \frac{a}{a}} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{b+a}{a}} = \frac{(a+b)a}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

8) $\frac{2x+1}{x} - \frac{x+1}{x} = \frac{2x+1-(x+1)}{x} = \frac{2x+1-x-1}{x} = 1$

9)

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1} \mid \cdot (x+1)(x-1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$L = \{-5\}$$

10)

$$\frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \mid \cdot (2-x)(x-2)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$L = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

11)

$$\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$x = 3$$

$$L = \{\}$$

12)

$$\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \mid \cdot (x^2-16)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{4; -4\}$$

$$3(x-4) - 2(x+4) = 5x - 20$$

$$3x - 12 - 2x - 8 = 5x - 20$$

$$x - 20 = 5x - 20 \mid \cdot +20 \mid \cdot -5x$$

$$-4x = 0$$

$$L = \{0\}$$

13)

$$\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \mid \cdot (x-1)(x+1)(x+2)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; -2\}$$

$$4(x-1)(x+1) - 1(x+1)(x+2) = 3(x-1)(x+2)$$

$$4(x^2-1) - 1(x^2+2x+x+2) = 3(x^2+2x-x-2)$$

$$4x^2 - 4 - x^2 - 2x - x - 2 = 3x^2 + 6x - 3x - 6$$

$$3x^2 - 6 - 3x = 3x^2 + 3x - 6 \mid -3x^2 \mid +6 \mid -3x$$

$$-6x = 0 \mid :(-6)$$

$$x = 0$$

$$L = \{0\}$$

14)

$$\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \mid \cdot 6(x-1)(x+1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$7(x-5)^2 = 2(5x-1)(x-1) - (3x-2)(x+1)$$

$$7(x^2-10x+25) = 2(5x^2-5x-x+1) - (3x^2+3x-2x-2)$$

$$7x^2 - 70x + 175 = 10x^2 - 10x - 2x + 2 - 3x^2 - 3x + 2x + 2$$

$$7x^2 - 70x + 175 = 7x^2 - 13x + 4 \mid -7x^2 \mid +70x \mid -4$$

$$171 = 57x \mid :57$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 2P
Vereinfachen Sie, falls dies möglich ist (und so weit wie möglich):

$$\sqrt{z^2} =$$

2) 16P
Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an:

a) $x^2 = -4$

b) $x^2 = 0$

c) $|x| = -5$

d) $x^2 = 0,25$

e) $|x| = 7$

f) $x^2 = 9$

g) $|x| = x$

h) $x = x + 17$

3) 3P
Ist folgende Gleichung allgemeingültig? Begründen Sie (konkret)!

$$\sqrt{x^2} = x$$

4) 2P
Geben Sie ein LGS an, dessen Lösungsmenge die leere Menge ist.

5) 3P
Geben Sie ein LGS (mit Lösungsmenge) an, das genau eine Lösung besitzt.

6) 3P
Geben Sie ein LGS (mit Lösungsmenge) an, das unendlich viele Lösungen besitzt.

7) 3P
Geben Sie ein LGS (mit Lösungsmenge) mit 2 Unbekannten an, dessen Lösungsmenge – anschaulich gesprochen – aus allen Punkten des 2-dimensionalen Koordinatensystems besteht.

8)

18P

Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS an:

a) 2 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

b) 3 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

c) 4 P

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}$$

d) 4 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{array}$$

e) 5 P

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 9 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Bemerkung zur Aufgabe:

Wenn die Lösungsmenge aus unendlich vielen Elementen besteht, muß zusätzlich noch ein konkretes Element der Lösungsmenge angegeben werden (gibt jeweils 2 Punkte).

Bei der Auswahl eines konkreten Elements dürfen nicht alle frei wählbaren Parameter Null gesetzt werden.

Lösungen:

1) 2P
 $\sqrt{z^2} = |z|$

2) 16P

a) $x^2 = -4$ $L = \{\}$

b) $x^2 = 0$ $L = \{0\}$

c) $|x| = -5$ $L = \{\}$

d) $x^2 = 0,25$ $L = \{0,5; -0,5\}$

e) $|x| = 7$ $L = \{-7; 7\}$

f) $x^2 = 9$ $L = \{-3; 3\}$

g) $|x| = x$ $L = \text{Menge aller positiven reellen Zahlen, einschließlich der } 0$

h) $x = x + 17$ $L = \{\}$

3) 3P

Ist folgende Gleichung allgemeingültig? Begründen Sie (konkret)!

Nein, da $\sqrt{(-3)^2} = 3$ eine falsche Aussage ist.

4) 2P
 $0 \quad 0 \quad 1$

5) 3P
 $1 \quad 1$
 $L = \{1\}$

6) 3P
 $1 \quad -1 \quad 0$
 $L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = -x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$

7) 3P
 $0 \quad 0 \quad 0$
 $L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$

8) 2P
a)
 $L = \{(9; 8; 7)\}$

b) 3P
 $L = \{\}$

c) 4P
 $x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$
 $L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$
wähle: $x_2 = 1$, dann gilt:
 $x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$
also: $(1; 1) \in L$

d) 4P
 $x_1 = 7 - 4 \cdot x_3$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 \wedge x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 7 - 4 \cdot 1 = 3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot 1 = 4$$

also: $(3; 4; 1) \in L$

e)

5P

$$x_2 = 4 - 9 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1$$

$$x_4 = 5 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1$$

$$x_5 = 2 - 5 \cdot x_3 - 7 \cdot x_1$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \mid x_2 = 4 - 9 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1 \wedge x_4 = 5 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 \wedge x_5 = 2 - 5 \cdot x_3 - 7 \cdot x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_1 = 1; x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_2 = 4 - 9 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -7$$

$$x_4 = 5 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -5$$

$$x_5 = 2 - 5 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -10$$

also: $(1; -7; 1; -5; -10) \in L$

KLAUSUR 1 Mathematik 1 2BKI1 Nachtermin 1 Zeit: 75 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkung:

Die Grundmenge aller folgenden Gleichung sind die reellen Zahlen.

1) 5P

Bestimmen Sie:

a) $X \cup X$ b) $Z \cap Z$ c) $A \setminus A$ d) $B \cup \emptyset$ e) $B \cap \emptyset$

2) 6P

Ziehen Sie auf allen Seiten der folgenden Gleichung die Wurzel und geben Sie dann die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an:

$$(x - 6)^2 = 81$$

3) 5P

Machen Sie die quadratische Ergänzung zum folgenden Term:

$$x^2 - \frac{7}{4\pi}x + ? = (? - ?)^2$$

4) 3P

Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an:

$$(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-5) = 0$$

5) 9P

Formen Sie die Terme in einfachere Terme um (daß sich allgemeingültige Gleichungen ergeben) (jeweils 6 P)

a) $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1}$

b) $\frac{\frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x}}{\frac{2}{x} - \frac{2}{y}}$

6)

22P

Geben Sie jeweils die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

a) $\frac{9}{x+3} - \frac{x}{x-3} = 2 - \frac{3}{x-3} - \frac{3x}{x+3}$

b) $\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{4x-6}$

c) $\frac{9+2x}{9-x^2} = \frac{5}{3-x} - \frac{4+x}{6+2x}$

Lösungen:

1)

5P

a) $X \cup X = X$

b) $Z \cap Z = Z$

c) $A \setminus A = \emptyset$

d) $B \cup \emptyset = B$

e) $B \cap \emptyset = \emptyset$

2)

6P

$(x - 6)^2 = 81$ | Wurzel auf beiden Seiten

$|x - 6| = 9$

$x - 6 = 15 \quad \vee \quad x - 6 = -9$

$x = 11 \quad \vee \quad x = -3$

$L = \{-3; 11\}$

3)

5P

$x^2 - \frac{7}{4\pi}x = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4\pi}x = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{8\pi}x$, also:

$x^2 - \frac{7}{4\pi}x + \left(\frac{7}{8\pi}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{8\pi}\right)^2$

4)

3P

$D = \mathbb{R} \quad L = \{1; -2; 5\}$

5)

9P

a) $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{b}{a} + \frac{a}{a}} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{b+a}{a}} = \frac{(a+b)a}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

b) $\frac{\frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x}}{\frac{2}{x} - \frac{2}{y}} = \frac{\frac{x^3}{2xy} - \frac{y^3}{2xy}}{\frac{2y}{xy} - \frac{2x}{xy}} = \frac{\frac{x^3 - y^3}{2xy}}{\frac{2y - 2x}{xy}} = \frac{\frac{x^3 - y^3}{2xy}}{\frac{2y - 2x}{xy}} = \frac{(x^3 - y^3)xy}{2xy(2y - 2x)} = \frac{x^3 - y^3}{4(y - x)}$

6)

a)

$$\frac{9}{x+3} - \frac{x}{x-3} = 2 - \frac{3}{x-3} - \frac{3x}{x+3} \quad | \cdot (x+3)(x-3)$$

$$D = R \setminus \{-3; 3\}$$

$$9(x-3) - x(x+3) = 2(x-3)(x+3) - 3(x+3) - 3x(x-3)$$

$$9x - 27 - x^2 - 3x = 2x^2 - 18 - 3x - 9 - 3x^2 + 9x$$

$$-x^2 + 6x - 27 = -x^2 + 6x - 27$$

$$L = R \setminus \{-3; 3\}$$

b)

$$\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{4x-6} \quad | \cdot HN = 2x(2x-3)$$

$$D = R \setminus \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$$

$$2x^2 - (2x-3) = 3x$$

$$2x^2 - 2x + 3 = 3x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = 1$$

$$L = \{1\}$$

c)

$$\frac{9+2x}{9-x^2} = \frac{5}{3-x} - \frac{4+x}{6+2x} \quad | \cdot HN = 2(3-x)(3+x)$$

$$D = R \setminus \{3; -3\}$$

$$2(9+2x) = 10(3+x) - (4+x)(3-x)$$

$$18+4x = 30+10x - (12+3x-4x-x^2)$$

$$18+4x = 30+10x-12+x+x^2$$

$$-x^2-7x=0$$

$$-x(x+7)=0$$

$$x=0 \vee x=-7$$

$$L = \{0; -7\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 2P

Welche Bedingung muß mathematisch für einen Punkt $P(x|y)$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gelten, damit er:

- a) links von der y-Achse liegt ?
- b) sich im 4. Quadranten befindet ?

2) 4P

Vervollständigen Sie den Lückentext !

Eine _____ ist eine Zuordnung, die jedem Element aus der _____menge
_____ Element aus der _____menge zuordnet.

3) 3P

Welche 3 Möglichkeiten gibt es, eine Funktion darzustellen?

4) 4P

Zeichnen Sie ein Schaubild an, das nicht zu einer Funktion gehört und begründen Sie, warum dieses Schaubild keine Funktionen darstellt.

5) 4P

Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

- a) $g(x + 2)$
- b) $g(x^2 - \pi)$

6) 4P

Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D und den Wertebereich W der folgenden Funktion h an:

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

7) 2P
Eine Parallele zur y-Achse geht durch den Punkt $P(3 \mid 1)$.
Wie heißt die Gleichung dieser Geraden?

8) 2P
Wie heißt die Funktionsgleichung der Geraden, die identisch ist mit der x-Achse?

9) 5P
Liegt der Punkt $Q(1 \mid 2)$ auf der Geraden K_g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -4 + 3x$?
Begründen Sie mathematisch !

10) 5P
Gegeben ist die Gerade K_g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -2 - 3x$.
Geben Sie die Funktionsgleichung einer Geraden K_f an, die senkrecht auf K_g steht.

11) 5P
Gegeben ist die Steigung $m = 3$ einer Geraden K_g und der Punkt $P(3 \mid 4)$ auf dieser Geraden.
gesucht:
Die Funktionsgleichung von K_g

WICHTIG:
Nur den Ansatz machen (nicht die Funktionsgleichung explizit angeben d.h. vollständig berechnen).
Begründung (auch Worte benutzen) wie im Unterricht !

12) 5P
Gegeben sind die Punkte $R(5 \mid 6)$ und $T(7 \mid 8)$ auf der Geraden K_f .
gesucht:
Die Funktionsgleichung von K_f

WICHTIG:
Nur den Ansatz machen (nicht die Funktionsgleichung explizit angeben d.h. vollständig berechnen).
Begründung (auch Worte benutzen) wie im Unterricht !

13) 6P
Gegeben sind die folgenden 2 Funktionen:
 $f(x) = 2x + 5$
 $h(x) = -6x + 7$

gesucht:
Der Schnittpunkt von K_f und K_h

WICHTIG:
Nur den Ansatz machen (nicht den Schnittpunkt vollständig berechnen).
Begründung (auch Worte benutzen) wie im Unterricht !

Lösungen:

- 1) 2P
a) $x < 0$
b) $x > 0$ und $y < 0$
- 2) 4P
Vervollständigen Sie den Lückentext !
Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element aus der Definitionsmenge genau ein Element aus der Wertemenge zuordnet.
- 3) 3P
Funktionsgleichung, Wertetabelle, Paarmenge, Schaubild
- 4) 4P
z.B: Kreis, denn zu einem x-Wert gehören dort zwei y-Werte.
- 5) 4P
$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$
$$g(x+2) = (\sin(x+2) + \pi)^2 - \sqrt{x+2}$$
$$g(x^2 - \pi) = (\sin(x^2 - \pi) + \pi)^2 - \sqrt{x^2 - \pi}$$
- 6) 4P
 $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 7) 2P
 $x = 3$
- 8) 2P
 $y = 0$
- 9) 5P
Annahme: $Q(1 \mid 2)$ liegt auf K_g Dann gilt: $2 = -4 + 3 \cdot 1 = -1$
Dies ist falsch, also $Q(1 \mid 2)$ liegt nicht auf K_g
- 10) 5P
Für die Steigung m_s einer senkrechten Geraden K_f gilt: $m_s = -1/(-3) = 1/3$.
Also wäre $f(x) = 1/3 \cdot x + 1234$ die Funktionsgleichung einer Geraden K_f
- 11) 5P
Nach der PSF gilt: $\frac{y-4}{x-3} = 3$
- 12) 5P
Nach der ZPF gilt: $\frac{y-6}{x-5} = \frac{8-6}{7-5}$

13)

6P

Der Schnittpunkt sei $S(x_s|y_s)$. Für diesen gilt:

$S(x_s|y_s) \in K_f$ und $S(x_s|y_s) \in K_h$.

Damit ist die Punktprobe erfüllt:

$$y_s = 2 x_s + 5$$

$$y_s = -6 x_s + 7$$

$$\text{also: } 2 x_s + 5 = -6 x_s + 7$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 5P

Bilden Sie die erste Ableitung von der folgenden Funktion f:

$$f(x) = (x-1)^3$$

2) 8P

Legen Sie an das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = 4x^2$$

Tangenten parallel zur Gerade mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 16x + 21$$

Bestimmen (und angeben) Sie den Berührungspunkt.

Begründung (vollständige Sätze benutzen) wie im Unterricht !

3) 6P

Gegeben ist die Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung:

$$f(x) = -2x^3$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangente im Punkt $T(1 \mid ?)$

Rechnerische Begründung (mit vollständigen Sätzen) wie im Unterricht !

4) 7P

Legen Sie von $P(3 \mid 7)$ aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = 2x^2 - 3x + 4$$

Bestimmen Sie die Berührungspunkte und die Funktionsgleichungen der Tangenten.

WICHTIG:

Nur den Ansatz machen (nicht den Berührungspunkt vollständig berechnen) und so lange rechnen, bis eine Gleichung mit genau einer Unbekannten entsteht. Berührungspunkt nicht explizit ausrechnen!

Rechnerische Begründung (mit vollständigen Sätzen) wie im Unterricht !

5)

15P

Bilden Sie (rein rechnerisch, ohne geometrische Begründung) von der folgenden Funktion h mit Hilfe der **Limesbildung** die Ableitungsfunktion von

$$h(x) = -3x^2 + 4x - 5$$

6)

10P

Besitzt die Kurve mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = x^5$$

einen Wendepunkt.

Rechnerische Begründung (mit vollständigen Sätzen) wie im Unterricht !

Lösung:

1)

5P

$$f(x) = (x-1)^3 = (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

2)

8P

$$g'(x) = 8x \quad // 1P$$

Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B | y_B)$. // 2P

Dort ist die Steigung 16

also gilt:

$$16 = g'(x_B) = 8x_B \quad // 2P$$

$$x_B = 2 \quad // 1P$$

$$y_B = g(2) = 4 \cdot 2^2 = 16 \quad // 1P$$

also

$$B(2 | 16) \quad // 1P$$

3)

6P

Ableitung:

$$f(x) = -2x^3$$

$$f'(x) = -6x^2 \quad // 1P$$

Berechnung der y-Koordinaten von T // 1P

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 = -2$$

Berechnung der Tangentensteigungen // 1P

$$f'(1) = -6 \cdot 1^2 = -6$$

Berechnung der Funktionsgleichungen der Tangenten

Nach der PSF gilt für t_1 :

$$\frac{y - (-2)}{x - 1} = -6 \iff y = -6x + 4, \text{ also: } // 3P$$

$$t: y = -6x + 4$$

4)

7P

Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$. // 2P

Für die Tangentenbedingung (TB) gilt:

$$\frac{y_B - 7}{x_B - 3} = h'(x_B) \quad (TB) \quad // 1P$$

$$h'(x) = 4x - 3 \quad // 1P$$

Es gilt aber:

$$h'(x_B) = 4x_B - 3 \quad // 1P$$

$$y_B = 2x_B^2 - 3x_B + 4 \quad // 1P$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{2x_B^2 - 3x_B + 4 - 7}{x_B - 3} = 4x_B - 3 \quad // 1P$$

5)

15P

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) - 5 - (-3x^2 + 4x - 5)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 4x + 4\Delta x - 5 + 3x^2 - 4x + 5}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3x^2 - 6x\Delta x - 3\Delta x^2 + 4x + 4\Delta x - 5 + 3x^2 - 4x + 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6x\Delta x - 3\Delta x^2 + 4\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-6x - 3\Delta x + 4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-6x - 3\Delta x + 4) = -6x + 4
 \end{aligned}$$

6)

10P

$$h(x) = x^5$$

$$h'(x) = 5x^4 \quad // \text{ 1P}$$

$$h''(x) = 20x^3$$

$$h'''(x) = 60x^2$$

$$\text{Wendepunkte } W(x_w|y_w): f''(x_w) = 0 \quad // \text{ 2P}$$

$$0 = h''(x_w) = 20 x_w^3 \quad // \text{ 2P}$$

$$0 = x_w^3$$

$$x_w = 0 \quad // \text{ 1P}$$

$$y_w = h(x_w) = h(0) = 0^5 = 0$$

Das Schaubild der Funktionsgleichung h'' macht an der Stelle $W(0|0)$ einen VZW.

Also ist $W(0|0)$ ein Wendepunkt. // 4P

KLAUSUR 4 Mathematik 2BK11 Nachtermin1 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, Formelsammlung

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1)

17P

Gegeben ist eine Parabel 3. Ordnung, d.h:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bestätigen oder widerlegen Sie die folgende Vermutung:

"Der x-Wert des Wendepunkts ist das arithmetische Mittel (Mittelwert) der x-Werte der Extrempunkte"

2)

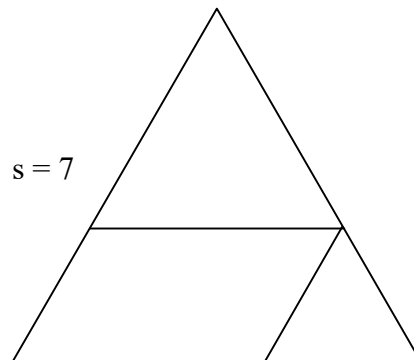
17P

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung $O(0|0)$ und besitzt den Wendepunkt $W(1|-2)$. Die Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt $S(3|0)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion (berechnen und angeben).

3)

17P

Einem gleichseitigem Dreieck mit der Seite $s = 7$ cm ist ein Parallelogramm größten Inhalts einzubeschreiben, das mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat (siehe Skizze).



Lösungen:

1)

a) Ableitungen

2P

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

b)

b) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = 3ax_e^2 + 2bx_e + c$$

$$x_{e1/2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot 3 \cdot a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4(b^2 - 3ac)}}{6a} =$$

$$\frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{6a} = \frac{2(-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac})}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$x_{e1} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$x_{e2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

13P

Wenn es Extrempunkte gibt, so habe sie die gerade eben berechneten x-Koordinaten.

c) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$6ax_w + 2b = 0 \quad | : 2$$

1P

$$3ax_w + b = 0$$

4P

$$3ax_w = -b$$

$$x_w = \frac{-b}{3a}$$

Wenn es einen Wendepunkt gibt, so hat er den gerade eben berechnete x-Koordinate.

d) arithmetische Mittel

5P

$$m = \frac{x_{e1} + x_{e2}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac} - b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2b}{3a} \right) = \frac{-b}{3a}$$

also:

$$m = \frac{-b}{3a}$$

d) Man sieht sofort:

$$m = x_w$$

2)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad 4P$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

a) $O(0 \mid 0) \in K_f$

4P

$$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$

$$d = 0$$

b) $d = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ergibt:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

c) $W(1 \mid -2) \in K_f$

4P

$$-2 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1$$

$$-2 = a + b + c \quad (G1)$$

d) Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt $S(3 \mid 0)$

6P

Steigung m der Wendetangente (durch $W(1 \mid -2)$ und $S(3 \mid 0)$)

$$m = \frac{-2 - 0}{1 - 3} = 1 \quad (\text{Steigungsdreieck})$$

andererseits:

$$1 = m = f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c$$

$$3a + 2b + c = 1 \quad (G2)$$

e) $W(1 \mid -2)$ ist Wendepunkt

4P

$$f''(1) = 0$$

$$6a \cdot 1 + 2b = 0$$

$$6a + 2b = 0$$

$$3a + b = 0 \quad (G3)$$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$$a = -3, \quad b = 9, \quad c = -8 \quad 4P$$

Ergebnis:

$$f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 8x$$

3)

3.1) Zielfunktion:

$$A(x) = x \cdot h$$

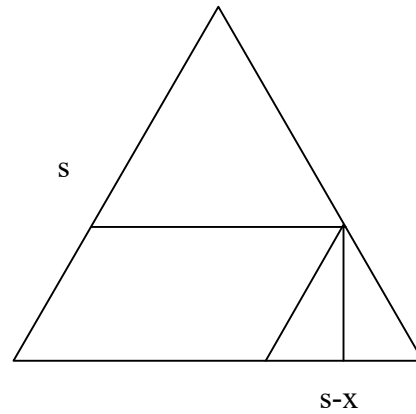
3.2) Nebenbedingungen:

$$h = \frac{s-x}{2} \sqrt{3}$$

3.3) Reduktion auf eine Variable:

$$A(x) = x \frac{s-x}{2} \sqrt{3} = x \frac{s\sqrt{3}}{2} - x^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A(x) = x \frac{s\sqrt{3}}{2} - x^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$



3.4) Ableitungen:

$$A'(x) = \frac{s\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}$$

$$A''(x) = -\sqrt{3}$$

3.5) Definitionsbereich:

$$D = [0, s]$$

3.6) Lokale Extremwerte $E(x_e | A_e)$: $A'(x_e) = 0$:

$$0 = \frac{s\sqrt{3}}{2} - x_e \sqrt{3}$$

$$\frac{s\sqrt{3}}{2} = x_e \sqrt{3}$$

$$x_e = \frac{s}{2}$$

$$A''\left(\frac{s}{2}\right) = -\sqrt{3} < 0$$

also: relatives Maximum bei $x_e = \frac{s}{2}$.

$$A\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{s}{2} \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{s}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{s^2\sqrt{3}}{4} - \frac{s^2\sqrt{3}}{8} = \frac{s^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7^2\sqrt{3}}{8} = \frac{49\sqrt{3}}{8} \approx 10,6 \text{ FE}$$

3.7) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 0 \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2} - 0^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$A(s) = s \frac{s\sqrt{3}}{2} - s^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

3.8) Ergebnis (für $s = 7$)

Für $x_e = s/2 = 3,5$ und $h_e = \frac{s}{4} \sqrt{3} = \frac{7}{4} \sqrt{3} \approx 3,03$ LE erreicht die Fläche des Parallelogramms

ihr absolutes Maximum von $A_e = \frac{s^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7^2\sqrt{3}}{8} = \frac{49\sqrt{3}}{8} \approx 10,6$ FE

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 6P
a) Ist die zur Funktionsgleichung $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ zugehörige Kurve K_f punktsymmetrisch zum Ursprung? Begründen Sie rein mathematisch oder über einen entsprechenden Satz.

b) Berechnen Sie mathematisch oder begründen verbal:

$$\int_{-2}^2 (x^5 - 2x^3 + x) dx =$$

2) 7P

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und die x -Achse begrenzen über dem Intervall $[0;a]$ eine Fläche (mit $a>0$). Wie muss a gewählt werden, damit der Flächeninhalt 4,5 Flächeneinheiten beträgt ?

3) 8P

Bestimmen Sie mathematisch die Fläche zwischen den Kurven mit folgender Funktionsgleichung:

$$f(x) = (x-2)(x+2)$$

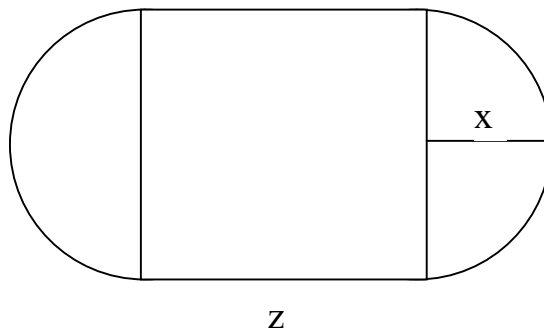
$$h(x) = \frac{1}{2}(2-x)(x+2)$$

4) 6P

Sie legen ein Anfangskapital von 10000 Euro bei einem Jahreszinssatz von 5% bei der Bank 10 Jahre lang an und lassen die Zinsen auf der Bank.
Wie groß ist das Kapital nach 10 Jahren

5) 12P

Eine Parabel 4. Ordnung hat in $O(0 | 0)$ eine waagrechte Tangente und in $P(-2 | 2)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente. Geben Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel an.



Eine 400 m Laufbahn besteht aus 2 parallelen Strecken mit zwei angesetzten Halbkreisen. Für welchen Radius x der Halbkreise wird die rechteckige Spielfläche maximal ?

Bemerkung zu dieser Aufgabe

Bitte folgendes Schema benutzen:

- a) Zielfunktion:
- b) Nebenbedingung:
- c) Reduktion auf 1 Variable:
- d) Ableitungen:
- e) Definitionsbereich:
- f) Lokale Extremwerte $E(x_e | V_e)$: $V'(x_e) = 0$:
- g) Randwertuntersuchung:
- h) Ergebnis:

Lösungen

1)

6P

a) Da das Polynom nur aus ungeraden Hochzahlen besteht, ist es punktsymmetrisch bzgl. dem Ursprung.

$$b) \int_{-2}^2 (x^5 - 2x^3 + x) dx = \left[\frac{x^6}{6} - 2 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{2^6}{6} - 2 \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} - \left(\frac{(-2)^6}{6} - 2 \frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^2}{2} \right) = 0$$

andere Begründung: Da K_f punktsymmetrisch, muß die bilanzierte Fläche 0 sein.

2)

7P

$$\int_0^a \frac{1}{2} x^2 dx = 4,5$$

$$\left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^a = 4,5 \iff \frac{1}{6} a^3 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 4,5 \iff \frac{1}{6} a^3 = 4,5$$

$$\iff a^3 = 27 \iff a = \sqrt[3]{27} \iff$$

$$a = 3$$

3)

8P

a) Berechnung der Nullstellen:

$N(x_S | 0)$ sei der Schnittpunkt.

$$(x_S - 2)(x_S + 2) = \frac{1}{2} (2 - x_S) (x_S + 2)$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) = -\frac{1}{2} (x_S - 2) (x_S + 2)$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) + \frac{1}{2} (x_S - 2) (x_S + 2) = 0$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) \left[1 + \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) \cdot 1,5 = 0 \quad | : 1,5$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) = 0$$

$$x_{S1} = -2 \quad x_{S2} = -2$$

Alternative Lösung:

$$(x_S - 2)(x_S + 2) = \frac{1}{2} (2 - x_S) (x_S + 2)$$

$$x_S^2 - 4 = -\frac{1}{2} (x_S^2 - 4) \quad | + \frac{1}{2} (x_S^2 - 4)$$

$$\frac{3}{2} (x_S^2 - 4) = 0 \quad | : \frac{3}{2}$$

$$x_S^2 - 4 = 0$$

$$x_S^2 = 4$$

$$|x_S| = 2$$

$$x_{S1} = -2 \quad x_{S2} = -2$$

$$b) A = \int_{-2}^2 (Ok(x) - Uk(x)) dx = \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} - (x^2 - 4) \right) dx = \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} - x^2 + 4 \right) dx = \int_{-2}^2 \left(6 - \frac{3x^2}{2} \right) dx =$$

$$\left[6x - \frac{x^3}{2} \right]_{-2}^2 = \left[6x - \frac{x^3}{2} \right]_{-2}^2 = (6 \cdot 2 - 2^3/2) - (6 \cdot (-2) - (-2)^3/2) = 12 - 4 - (-12 + 4) = 8 + 8 = 16$$

4)

6P

$$K_{10} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} \approx 16288,95 \text{ Euro}$$

5)

12P

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

a) $O(0 | 0) \in K_f$

2P

$$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$$

$$e = 0$$

b) $e = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ergibt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

c) $O(0 | 0)$ hat eine waagrechte Tangente

2P

$$f'(0) = 0$$

$$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$$

$$d = 0$$

d) $d = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ ergibt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

e) $P(-2 | 2) \in K_f$

$$2 = a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2$$

$$2 = 16a - 8b + 4c$$

$$1 = 8a - 4b + 2c \quad (G1)$$

f) $P(-2 | 2)$ ist Wendepunkt, also $f''(-2) = 0$

$$12a \cdot (-2)^2 + 6b \cdot (-2) + 2c = 0$$

$$48a - 12b + 2c = 0$$

$$24a - 6b + c = 0 \quad (G2)$$

g) $P(-2 | 2)$ hat eine waagrechte Tangente

$$f'(-2) = 0$$

$$4a \cdot (-2)^3 + 3b \cdot (-2)^2 + 2c \cdot (-2) = 0$$

$$-32a + 12b - 4c = 0$$

$$-8a + 3b - c = 0 \quad (G3)$$

h) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$$a = \frac{3}{8}, \quad b = 2, \quad c = 3$$

i) Ergebnis: $f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2$

6)

12P

a) Zielfunktion:

$$A(x, z) = 2x \cdot z$$

b) Nebenbedingung:

$$400 = 2z + 2\pi x$$

$$200 = z + \pi x$$

$$z = 200 - \pi x$$

c) Reduktion auf 1 Variable:

$$A(x) = 2x (200 - \pi x) = 400x - 2\pi x^2$$

d) Ableitungen:

$$A'(x) = 400 - 4\pi x$$

$$A''(x) = -4\pi$$

e) Definitionsbereich: $D = [0; \frac{200}{\pi}]$

f) Lokale Extremwerte $E(x_e | A_e)$:

$$A'(x_e) = 0:$$

$$0 = 400 - 4\pi x_e$$

$$x_e = 100 / \pi \approx 31,83$$

$$x_e \in D$$

$$A\left(\frac{100}{\pi}\right) = 400 \cdot \frac{100}{\pi} - 2\pi \frac{10000}{\pi^2} = \frac{20000}{\pi} \approx 6366,2$$

g) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 0 \qquad A\left(\frac{200}{\pi}\right) = 2 \cdot \frac{200}{\pi} \left(200 - \pi \frac{200}{\pi}\right) = 0$$

h) Ergebnis:

Die maximale Fläche wird für $x = 100/\pi$ mit $A_e \approx 6366,2$ erreicht.

KLAUSUR 5 Mathematik 2BKI1 Nachtermin1 Zeit: 90 Minuten*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, Formelsammlung

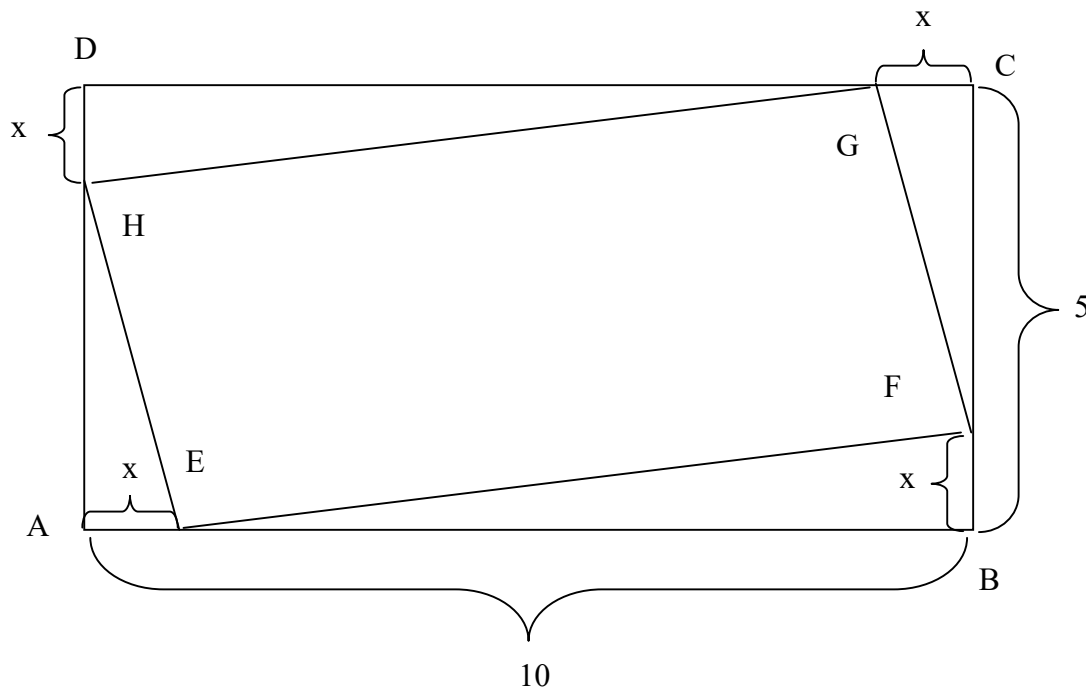
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) Auf den Seiten des Rechtecks ABCD wird die Strecke x abgetragen. 25P

Für welchen Wert von x wird der Flächeninhalt des Parallelogramms EFGH am kleinsten?

Wie groß ist der kleinste Flächeninhalt?



2) 25P

Eine Parabel 4. Ordnung hat im Wendepunkt $O(0 \mid 0)$ und für $x = 6$ waagrechte Tangenten. Sie schneidet die x -Achse ein zweites Mal mit der Steigung -8 . Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel?

Lösungen:

1)

1) Zielfunktion:

15P

$$A(x) = 5 \cdot 10 - x(5 - x) - x(10 - x) = \\ 50 - 5x + x^2 - 10x + x^2 = 50 - 15x + 2x^2$$

2) Ableitungen:

1P

$$A'(x) = -15 + 4x$$

$$A''(x) = 4$$

3) Definitionsbereich:

$$D = [0; 5]$$

1P

4) Lokale Extremwerte $E(x_e | V_e): V'(x_e) = 0$:

2P

$$4x_e - 15 = 0$$

$$x_e = 3,75 \in D$$

$$A''(x_e) = 4 > 0$$

2P

also: relatives Minimum bei

$$x_e = 3,75,$$

$$A(3,75) = 50 - 15 \cdot 3,75 + 3,75^2 = 7,8125$$

5) Randwertuntersuchung:

2P

$$A(0) = 50$$

$$A(5) = 25$$

6) Ergebnis:

2P

Der Flächeninhalt erreicht für $x_e = 3,75$ sein absolutes Minimum $A(3,75) = 7,8125$ FE

2)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

a) $O(0 | 0) \in K_f$

$$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$$

$$e = 0$$

b) $e = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ergibt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

c) $O(0 | 0)$ ist Wendepunkt

$$12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0$$

$$c = 0$$

d) $c = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ ergibt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + dx$$

e) In $O(0 | 0)$ waagrechte Tangente

$$f'(0) = 0$$

$$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$$

$$d = 0$$

f) $d = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + dx$ ergibt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

g) Für $x = 6$ waagrechte Tangente

$$f'(6) = 0$$

$$4a \cdot 6^3 + 3b \cdot 6^2 = 0 \quad | : 6^2$$

$$24a + 3b = 0$$

$$8a + b = 0 \quad (G1)$$

h) Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ von K_f mit der x -Achse

$$S_x(x_s | 0) \in K_f$$

$$0 = ax_s^4 + bx_s^3$$

$$0 = x_s^3(ax_s + b)$$

Fall 1:

$$x_s = 0,$$

$$x_{s1} = 0$$

1. Schnittpunkt

Fall 2:

$$ax_s + b = 0$$

$$x_s = -\frac{b}{a}$$

2. Schnittpunkt

i) Steigung im 2. Schnittpunkt = -8

$$-8 = 4a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^3 + 3b \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^2$$

$$-8 = -4a \cdot \frac{b^3}{a^3} + 3b \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

$$-8 = -4 \cdot \frac{b^3}{a^2} + 3 \cdot \frac{b^3}{a^2} \quad | \cdot a^2$$

$$-8a^2 = -b^3$$

$$b^3 = 8a^2 \quad (G2)$$

j) (G1) nach b auflösen und in (G2) einsetzen

$$(-8a)^3 = 8a^2$$

$$-512a^3 = 8a^2$$

$$-512a^3 - 8a^2 = 0 \quad | : 8$$

$$-64a^3 - a^2 = 0$$

$$a^2(-64a - 1) = 0$$

Fall 1:

$$a^2 = 0,$$

$$a_1 = 0$$

nicht möglich, da

Polynom 4. Ordnung

Fall 2:

$$-64a - 1 = 0$$

$$a = -\frac{1}{64}$$

j) a einsetzen in (G1)

$$8 \cdot -\frac{1}{64} + b = 0$$

$$b = \frac{1}{8}$$

k) Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1)

Lösen Sie die Gleichung $r^x = s$ (wobei $r > 0$, $r \neq 1$, $s > 0$) auf nach:

- a) x 1P
b) r 1P

2) Berechnen Sie (ohne Taschenrechner):

- a) $\ln e^7$ 1P
b) $\ln 1$ 1P
c) $\ln e$ 1P

3) Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

- a) $\log_{10}(a \cdot a)$ 2P
b) $\ln(x - y)$ 2P
c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ 2P
d) $\log_a 1$ 1P
e) $\log_a a$ 1P
f) $\log_a a^x$ 2P
g) $\log_a ((a^n)^m)$ 3P
h) $\log_a \frac{a^n}{a^m}$ 3P

4)

3P

Begründen Sie (ohne Taschenrechner), warum Folgendes gilt (Gleichung allgemeingültig ist):

$$4 \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{16}\right) = 0$$

5)

6P

Leiten Sie die folgende Funktion genau einmal ab:

$$f(x) = 2 + 3x + 4 e^{5x+6}$$

6)

6P

Berechnen Sie:

$$\int (2 + 3x + 4 e^{5x+6}) dx$$

7)

7P

Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge L der Gleichung

$$5 \cdot 25^{2x} = 5^{4x+1}$$

8)

9P

Legen Sie von $P(1 \mid 0)$ aus die Tangente(n) an das Schaubild K_h der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$h(x) = e^{2x+1}$$

Bestimmen Sie die bzw. den Berührungspunkt(e) und die Funktionsgleichungen der Tangente(n).

Lösungen

- 1) 2P
a) $x = \log_r s$
b) $r = \sqrt[x]{s} = s^{1/x}$
- 2) 3P
a) $\ln e^7 = \log_e e^7 = 7$
b) $\ln 1 = \log_e 1 = 0$
c) $\ln e = \log_e e = 1$
- 3) 16P
a) $\log_{10}(a \cdot a) = \log_{10} a^2 = 2 \log_{10} a$
b) $\ln(x - y)$ "keine Umformung möglich"
c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 \ln e = -2$
d) $\log_a 1 = 0$
e) $\log_a a = 1$
f) $\log_a a^x = x$
g) $\log_a ((a^n)^m) = \log_a (a^{nm}) = nm \cdot \log_a a = nm$
h) $\log_a \frac{a^n}{a^m} = \log_a a^{n-m} = (n-m) \log_a a = n-m$
- 4) 3P
 $4 \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{16}\right) = \ln 2^4 + \ln 16^{-1} = \ln 16 - \ln 16 = 0$
- 5) 6P
Leiten Sie die folgende Funktion ab:
 $f(x) = 2 + 3x + 4e^{5x+6}$
 $f'(x) = 3 + 20e^{5x+6}$
- 6) 6P
Berechnen Sie:
 $\int (2 + 3x + 4e^{5x+6}) dx = 2x + 1,5x^2 + 0,8e^{5x+6}$
- 7) 7P
 $5 \cdot 25^{2x} = 5^{4x+1} \quad | \ln$
 $\ln(5 \cdot 25^{2x}) = \ln(5^{4x+1})$
 $\ln 5 + \ln 25^{2x} = (4x+1) \cdot \ln 5$
 $\ln 5 + 2x \cdot \ln 25 = (4x+1) \cdot \ln 5$
 $\ln 5 + 2x \cdot \ln 5^2 = 4x \cdot \ln 5 + \ln 5 \quad | -\ln 5$
 $2x \cdot 2 \ln 5 = 4x \cdot \ln 5 \quad | : 4 \ln 5$
 $x = x$
 $L = \mathbb{R}$

8)

9P

a) Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Es gilt:

$$\frac{h(x_B) - 0}{x_B - 0} = h'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$h(x_B) = e^{2x_B + 1} \text{ und } h'(x_B) = 2e^{2x_B + 1}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{e^{2x_B + 1} - 0}{x_B - 1} = 2e^{2x_B + 1}$$

$$\frac{e^{2x_B + 1}}{x_B - 1} = 2e^{2x_B + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_B - 1} = 2 \Leftrightarrow x_B - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_B = 1,5$$

$$y_B = h(1,5) = e^{2 \cdot 1,5 + 1} = e^4$$

also: $B(1,5 \mid e^4)$

Funktionsgleichung der Tangente:

$$\frac{y - 0}{x - 1} = \frac{e^4 - 0}{1,5 - 1} \Leftrightarrow \frac{y}{x - 1} = \frac{e^4}{0,5} \Leftrightarrow \frac{y}{x - 1} = 2e^4 \Leftrightarrow y = 2e^4(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = 2e^4x - 2e^4$$

Weitere mögliche Aufgaben

1)

Vereinfachen Sie maximal (maximal zusammenfassen):

$$\ln x^5 - \ln (2x)^4 + 4\ln 2 =$$

2)

Geben Sie die Exponentialfunktion der Form

$$f(x) = c \cdot a^x \quad (a > 0)$$

an, die durch die folgenden Punkte geht:

$$P(0|4), Q(2|1)$$

3)

In Abhängigkeit der Zeit gilt:

$$U = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \text{ wobei } U_0 \neq 0, R \neq 0, C \neq 0$$

Formen Sie die Gleichung nach t um

Lösungen

1)

20P

$$\begin{aligned} \ln x^5 - \ln (2x)^4 + 4\ln 2 &= 5\ln(x) - 4\ln(2x) + 4\ln 2 = 5\ln(x) - 4(\ln 2 + \ln x) + 4\ln 2 = \\ &= 5\ln(x) - 4\ln 2 - 4\ln(x) + 4\ln 2 = \ln(x) \end{aligned}$$

2)

20P

$P \in K_f$ und $Q \in K_f$, also:

$$4 = c \quad (G11)$$

$$1 = c \cdot a^2 \quad (G12)$$

$$c = 4 \quad (G21)$$

$$c = 1/a^2 \quad (G22)$$

$$4 = \frac{1}{a^2} \quad (G31)$$

damit:

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{2}, \text{ da } a > 0$$

$$c = 4$$

3)

20P

$$U = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad | : U_0$$

$$1 - e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0} \quad | -1$$

$$-e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0} - 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U}{U_0} + 1$$

$$-\frac{t}{RC} = \log_e \left(-\frac{U}{U_0} + 1 \right) = \ln \left(1 - \frac{U}{U_0} \right)$$

$$t = -RC \cdot \ln \left(1 - \frac{U}{U_0} \right)$$