

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

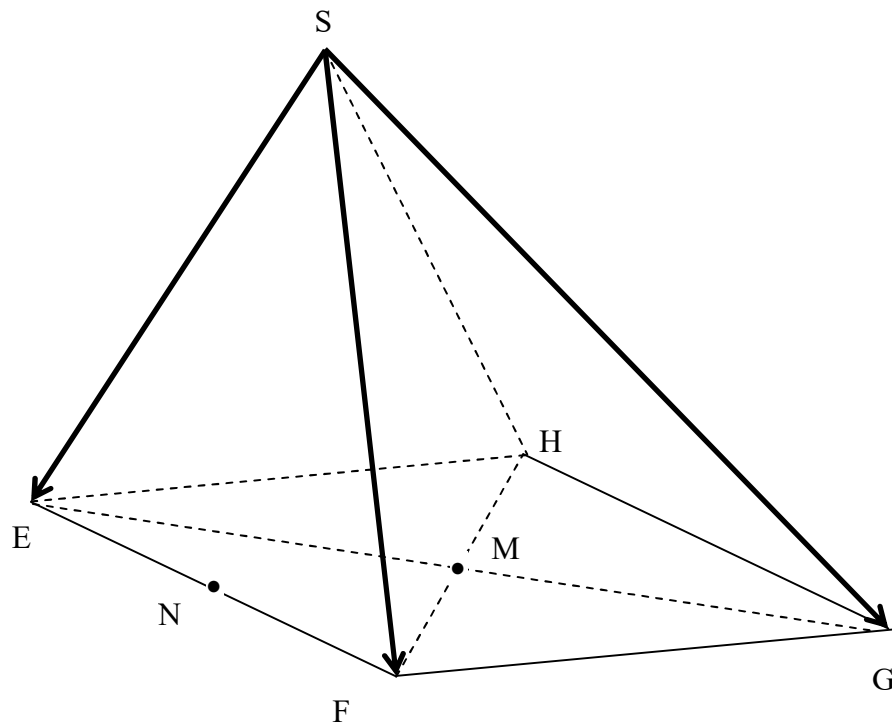
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M \setminus \{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Stellen Sie die Vektoren  $\overrightarrow{SN}$ ,  $\overrightarrow{SH}$ ,  $\overrightarrow{SM}$  der Pyramide (mit einer rechteckigen Grundfläche) als Linearkombination der Vektoren  $\overrightarrow{SE}$ ,  $\overrightarrow{SF}$ ,  $\overrightarrow{SG}$  dar.

Bemerkung:

N ist die Mitte der Strecke  $\overline{EF}$  und M ist die Mitte der Grundfläche (Rechteck) (15 P)



2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: (14P)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

3) a)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung: (21P)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Sind die 3 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig ?}$$

Begründen Sie (mathematisch mit Hilfe von Aufgabenteil a) oder durch Probieren!

Bemerkungen:

Bei linearen Gleichungssystemen **muss** der Gaußsche Algorithmus benutzt werden (genau so wie im Unterricht)!

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (genau so wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

## Lösungen

1)

$$a) \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SF}$$

$$b) \overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{SE} + (-\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}$$

$$c) \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} (-\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG}$$

2)

1. Lösung

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Lösung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \quad | - x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x \\ 6x \\ 8x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 4x = 0 \wedge 6x = 0 \wedge 8x = 0 \leftrightarrow x = 0 \wedge x = 0 \wedge x = 0$$

$$L = \{0\}$$

2. Lösung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x \\ -3x \\ -4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x \\ 6x \\ 8x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -3x \\ -4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x + 4x - 4 \\ -3x + 6x + 16 \\ -4x + 8x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4 \\ -3x + 16 \\ -4x + 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x - 4 \\ 3x + 16 \\ 4x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4 \\ -3x + 16 \\ -4x + 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2x - 4 = -2x - 4 \wedge 3x + 16 = -3x + 16 \wedge 4x + 3 = -4x + 3$$

$$\leftrightarrow 4x = 0 \wedge 6x = 0 \wedge 8x = 0 \leftrightarrow x = 0$$

$$L = \{0\}$$

3) a)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_3 \\ 0 \\ 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \wedge$$

$$-x_1 + x_2 = 0 \wedge$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0$$

$$-1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0$$

(6P)

oder in Matrizenform:

(9P)

$x_1$	$x_2$		b	Op	KS
1	3	4	0	G1	8
-1	1	0	0	G2	0
2	2	4	0	G3	8
1	3	4	0	G4=G1	8
0	4	4	0	G5=G1+G2	8
0	-4	-4	0	G6=-2G1+G3	-8
-4	0	-4	0	G7=-4G4+3G5	-8
0	4	4	0	G8=G5	8
0	0	0	0	G9=G5+G6	0
-4	0	-4	0	Nullzeile	
0	4	4	0	weglassen	
1	0	1	0		
0	1	1	0		

1 P

2 P

2 P

2 P

2 P

$$L = \{ (x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = -x_3 \wedge x_2 = -x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$$

(2P)

b)

(4P)

Da  $(-1;-1;1) \in L$ . folgt:

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Gleichung außer der Lösung (0;0;0) noch eine weitere Lösung hat, sind die Vektoren nicht linear unabhängig.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

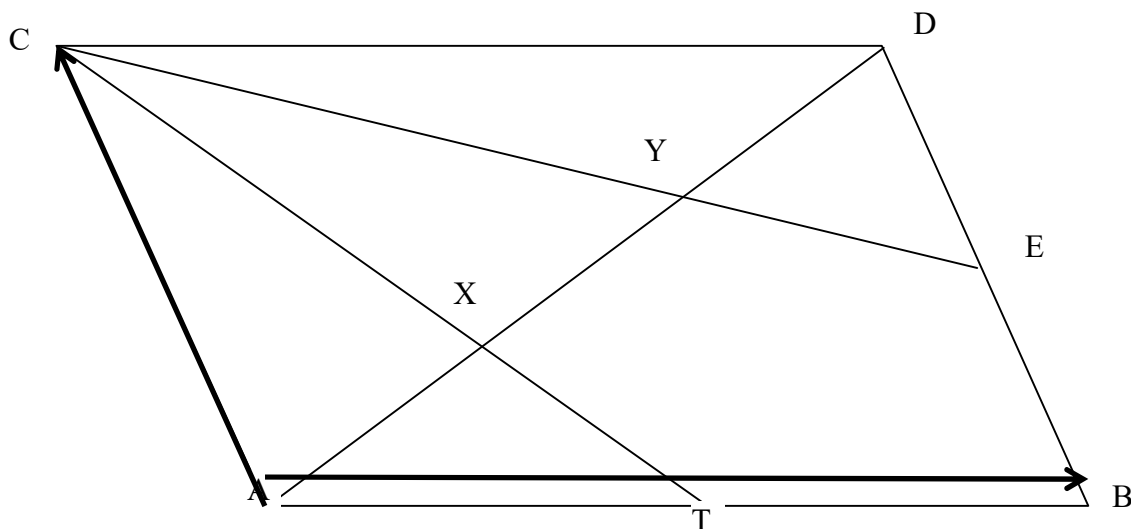
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1)

Im folgenden Parallelogramm ist T der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$  und

E der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BD}$ .



a) Beweisen Sie:

Die Länge der Strecke  $\overline{AY}$  ist zwei Drittel der Länge der Strecke  $\overline{AD}$   
Betrachten Sie dazu eine geschlossene Vektorkette im Dreieck AYE

b) Beweisen Sie:

Die Länge der Strecke  $\overline{AX}$  ist ein Drittel der Länge der Strecke  $\overline{AD}$   
Betrachten Sie dazu eine geschlossene Vektorkette im Dreieck AXE

Lösungen:

1)

$$a) \vec{AY} + \vec{YE} + \vec{EA} = \vec{0}$$

Esgilt:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{CE} = \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$\vec{EA} = -\frac{1}{2} \vec{AC} - \vec{AB}$$

Setze:

$$\vec{AY} = r \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{YE} = t \cdot \vec{CE}$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$r \cdot \vec{AD} + t \cdot \vec{CE} + \vec{EA} = \vec{0}$$

$$r \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) + t \cdot (\vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}) + \vec{EA} = \vec{0}$$

$$r \vec{AB} + r \vec{AC} + t \vec{AB} - \frac{1}{2} t \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} (r + t - 1) + \vec{AC} (r - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2}) = \vec{0}$$

Da  $\vec{AB}$  und  $\vec{AC}$  linear unabhängig, folgt:

$$r + t - 1 = 0 \text{ und}$$

$$r - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} = 0$$

also:

$$r = \frac{2}{3} \implies \vec{AY} = r \cdot \vec{AD} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AD}$$

$$t = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \vec{AX} + \vec{XT} + \vec{TA} = \vec{0}$$

Esgilt:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{CT} = -\vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AB}$$

$$\vec{TA} = -\frac{1}{2} \vec{AB}$$

Setze:

$$\vec{AX} = t \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{XT} = r \cdot \vec{CT}$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$t \cdot \vec{AD} + r \cdot \vec{CT} - \frac{1}{2} \vec{AB} = \vec{0}$$

$$t \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) + r \cdot (-\vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AB}) - \frac{1}{2} \vec{AB} = \vec{0}$$

$$t \vec{AB} + t \vec{AC} - r \vec{AC} + \frac{1}{2} r \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} (t + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2}) + \vec{AC} (t - r) = \vec{0}$$

Da  $\vec{AB}$  und  $\vec{AC}$  linear unabhängig, folgt:

$$t + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0 \text{ und}$$

$$t - r = 0$$

also:

$$r = \frac{1}{3} \implies \vec{AX} = t \cdot \vec{AD} = \frac{1}{3} \cdot \vec{AD}$$

$$t = \frac{1}{3}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

zugelassener Taschenrechner

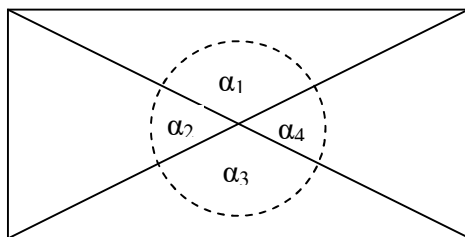
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben. Bei Winkelberechnungen auch gerundete Werte angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

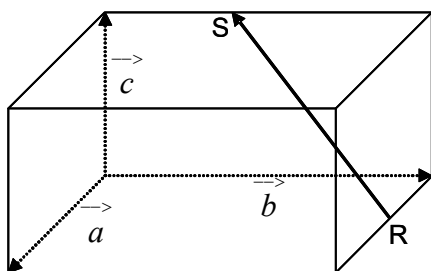
## AUFGABEN

1) 20P

In einem Rechteck, das doppelt so lang wie breit ist, müssen alle 4 Innenwinkel berechnet werden (jeweils berechnen, **nicht** durch geometrische Argumentation begründen). Berechnen Sie NUR mit Hilfe des Skalarprodukts jeweils die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$



2) 10P



R und S sind Kantenmitten eines Quaders.

Stelle den Vektor  $\overrightarrow{RS}$  als Linearkombination der Vektoren  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$  und  $\overrightarrow{c}$  dar,

3) 20P

Gegeben sind die Punkte  $A(3|-1|2)$ ,  $B(4|4|2)$ ,  $C(2,5|2,5|4)$  und  $D(2|0|4)$ .

a) Zeige rechnerisch: das Viereck ABCD ist ein Trapez und kein Parallelogramm.

b) Bestimme den Mittelpunkt der Diagonale BD.

Berechnen und begründen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung.

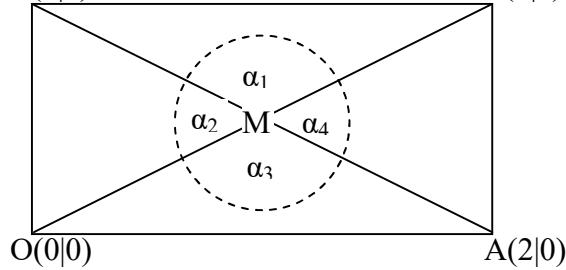


Lösungen:

1)

B(0|1)

C(2|1)



und Mittelpunkt M(1 | 0,5)

1. Lösung

a)

$$\cos(\alpha_1) = \frac{\vec{MB} \cdot \vec{MC}}{|\vec{MB}| \cdot |\vec{MC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0,5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{(-1) \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,5}{\sqrt{(-1)^2 + 0,5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0,5^2}} =$$

$$\frac{-1 + 0,25}{\sqrt{1,25} \cdot \sqrt{1,25}} = \frac{-0,75}{1,25} = -\frac{3}{5} \implies \alpha_1 \approx 126,87^\circ$$

b)

$$\cos(\alpha_2) = \frac{\vec{MB} \cdot \vec{MO}}{|\vec{MB}| \cdot |\vec{MO}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0,5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{(-1) \cdot (-1) + 0,5 \cdot (-0,5)}{\sqrt{(-1)^2 + 0,5^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-0,5)^2}} =$$

$$\frac{1 - 0,25}{\sqrt{1,25} \cdot \sqrt{1,25}} = \frac{0,75}{1,25} = \frac{3}{5} \implies \alpha_2 \approx 53,13^\circ$$

c)

$$\cos(\alpha_3) = \frac{\vec{MA} \cdot \vec{MO}}{|\vec{MA}| \cdot |\vec{MO}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0,5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right|} =$$

$$\frac{1 \cdot (-1) + (-0,5) \cdot (-0,5)}{\sqrt{1^2 + (-0,5)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-0,5)^2}} = \frac{-1 + 0,25}{\sqrt{1,25} \cdot \sqrt{1,25}} = \frac{-0,75}{1,25} = -\frac{3}{5} \implies \alpha_3 \approx 126,87^\circ$$

d)

$$\cos(\alpha_4) = \frac{\vec{MC} \cdot \vec{MA}}{|\vec{MC}| \cdot |\vec{MA}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-0,5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0,5}{\sqrt{1^2 + 0,5^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-0,5)^2}} =$$

$$\frac{1 - 0,25}{\sqrt{1,25} \cdot \sqrt{1,25}} = \frac{0,75}{1,25} = \frac{3}{5} \implies \alpha_4 \approx 53,13^\circ$$

2. Lösung

a)

$$\vec{a} = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a) \cos(\alpha_1) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \alpha_1 \approx 126,87^\circ$$

$$b) \cos(\alpha_1) = \frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha_2 \approx 53,13^\circ$$

$$c) \cos(\alpha_3) = \frac{-\vec{a} \cdot -\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |-\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \alpha_3 \approx 126,87^\circ$$

$$d) \cos(\alpha_1) = \frac{\vec{a} \cdot -\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |-\vec{b}|} = \frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha_4 \approx 53,13^\circ$$

2)

$$\overrightarrow{RS} = -\vec{a}/2 - \vec{b}/2 + \vec{c}$$

3)

Das Viereck ABCD ist ein Trapez wenn im Viereck ABCD zwei Seiten parallel sind.

Zu zeigen:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \text{ oder } \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$$

$$\text{Aus } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ folgt } \overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

Mit

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ folgt } \overrightarrow{AD} \text{ und } \overrightarrow{BC} \text{ verlaufen nicht parallel.}$$

Also ist das Trapez kein Parallelogramm

b)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 0-4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ also:}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M(3 | 2 | 3)$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEDLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) 10P

Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  seien linear unabhängig.

Zeigen Sie:  $\vec{a} + \vec{b}$  und  $\vec{a} - \vec{b}$  sind linear unabhängig.

2) 10P

Beweisen Sie für den zweidimensionalen Raum:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \vec{a} \vec{b} + \vec{b}^2$$

Tipp:

Setze

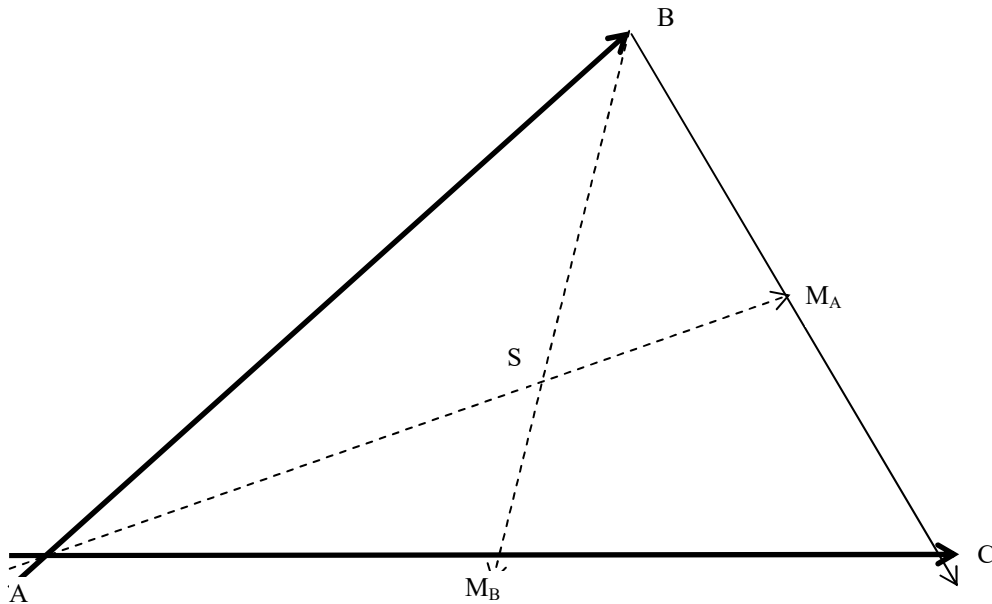
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

3)

30P

Beweisen Sie:

Zwei Seitenhalbierenden eines "echten" Dreiecks (alle Winkel im Dreieck sind größer als 0) schneiden sich im Schwerpunkt S im Verhältnis 2 : 1



Lösung:

1)

Es gilt:  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0} \implies x = y = 0$

Es sei:

$$u(\vec{a} + \vec{b}) + v(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0} \implies$$

$$u\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{a} - v\vec{b} = \vec{0} \implies$$

$$u\vec{a} + v\vec{a} + u\vec{b} - v\vec{b} = \vec{0} \implies$$

$$(u+v)\vec{a} + (u-v)\vec{b} = \vec{0} \implies u+v = u-v = 0 \implies$$

$$u+v = u-v \implies v = -v \implies 2v = 0 \implies v = 0$$

und

$$u+v = 0 \implies u+0 = 0 \implies u = 0$$

2)

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\left[ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) + b_1^2 + b_2^2 = \\ a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + b_1^2 + b_2^2 &= a_1^2 + 2a_1 b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2 b_2 + b_2^2 = \\ (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \end{aligned}$$

weitere Vorschläge:

20P

1)

Das Rechteck OABC ist doppelt so lang wie breit.

a)

Berechnen Sie die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  des Parallelogramms OAFE.

(jeweils NUR mit Hilfe des Skalarprodukts berechnen, **nicht** durch geometrische Argumentation begründen).

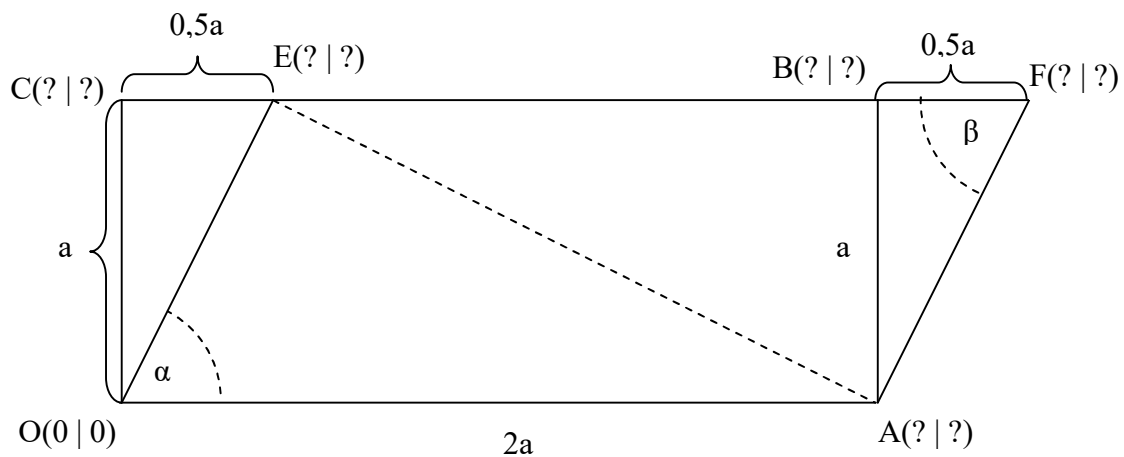
(jeweils berechnen, **nicht** durch geometrische Argumentation begründen).

b)

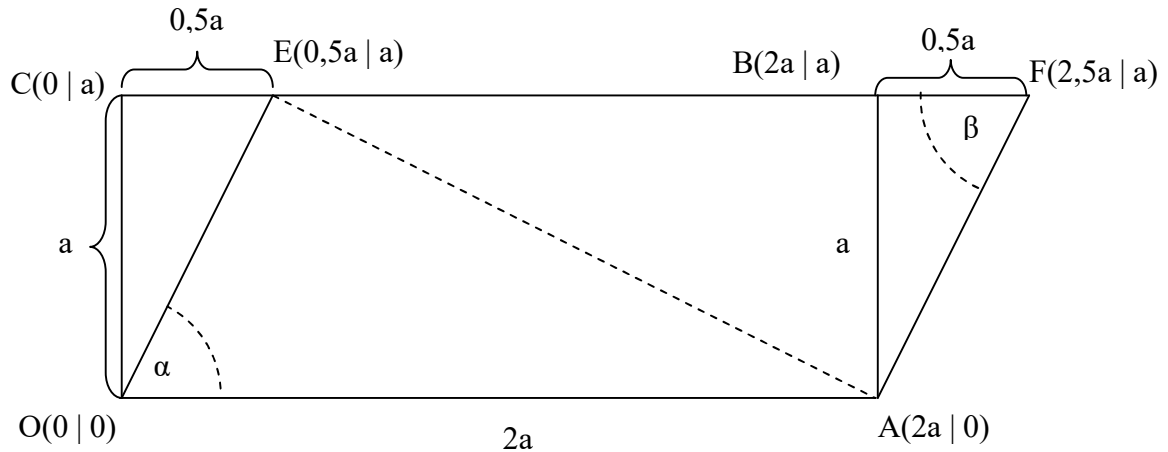
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms OAFE, in dem Sie jeweils die Fläche der Dreiecke OAE und AFE berechnen.

(jeweils NUR mit Hilfe des Skalarprodukts berechnen, **nicht** durch geometrische Argumentation begründen).

Berechnen Sie NUR mit Hilfe des Skalarprodukts jeweils die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$



Lösungen:



Berechnung der Fläche  $A_1$  des Dreiecks OAE:

$$\vec{OE} = \begin{pmatrix} 0,5a - 0 \\ a - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5a \\ a \end{pmatrix} \quad |\vec{OE}| = \sqrt{(0,5a)^2 + a^2} = \sqrt{0,25a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} |a|$$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2a - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{OA}| = \sqrt{(2a)^2 + 0^2} = \sqrt{4a^2} = 2 |a|$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{OE} \cdot \vec{OA}}{|\vec{OE}| \cdot |\vec{OA}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0,5a \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{5}{4}} |a| \cdot 2 |a|} = \frac{0,5a \cdot 2a + a \cdot 0}{2\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot a^2} = \frac{a^2}{2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \cdot a^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \implies \alpha \approx 63,4349^\circ$$

$$A_1 = \frac{1}{2} |\vec{OE}| \cdot |\vec{OA}| \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{5}a^2 \cdot \sin(\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{5}})) = a^2$$

Berechnung der Fläche  $A_2$  des Dreiecks AFE:

$$\vec{FE} = \begin{pmatrix} 0,5a - 2,5a \\ a - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{FE}| = \sqrt{(-2a)^2 + 0^2} = \sqrt{4a^2} = 2 |a|$$

$$\vec{FA} = \begin{pmatrix} 2a - 2,5a \\ 0 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5a \\ -a \end{pmatrix} \quad |\vec{FA}| = \sqrt{(-0,5a)^2 + (-a)^2} = \sqrt{0,25a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} |a|$$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{FE} \cdot \vec{FA}}{|\vec{FE}| \cdot |\vec{FA}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,5a \\ -a \end{pmatrix}}{2 |a| \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} |a|} = \frac{(-2a) \cdot (-0,5a) + 0 \cdot (-a)}{2\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot a^2} = \frac{a^2}{2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \cdot a^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\implies \alpha \approx 63,4349^\circ$$

$$A_2 = \frac{1}{2} |\vec{FE}| \cdot |\vec{FA}| \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \sqrt{5}a^2 \cdot \sin(\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{5}})) = a^2$$

Berechnung der Fläche A des Parallelogramms OAFE:

$$A = A_1 + A_2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

