

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an und machen Sie dazu jeweils ein Beispiel:

- |                               |    |
|-------------------------------|----|
| 1) Aussage                    | 5P |
| 2) Aussageform                | 5P |
| 3) allgemeingültig            | 5P |
| 4) Teilmenge                  | 5P |
| 5) Vereinigung zweier Mengen  | 5P |
| 6) Durchschnitt zweier Mengen | 5P |
| 7) Term                       | 5P |
| 8) Gleichung                  | 5P |
| 9) Definitionsmenge           | 5P |
| 10) Lösungsmenge              | 5P |

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

**AUFGABEN**1) Bestimmen Sie von den Mengen A und B die Menge  $A \setminus B$  (jeweils 3P)

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$$

2) Bestimmen Sie die Vereinigungsmenge von:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$$

3) Bestimmen Sie die Schnittmenge von:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}, \quad F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$$

4) Formen Sie die Terme in einfachere Terme um (daß sich allgemeingültige Gleichungen ergeben) (jeweils 6 P)

a)  $\frac{m^4 - n^4}{m^2 + n^2}$

b)  $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1}$

c)  $\frac{\frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x}}{\frac{2}{x} - \frac{2}{y}}$

5) Die Grundmenge ist  $G = \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen. Probe machen !!!!

a)  $2x - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{5}{4}x$       5P

c)  $\frac{3x+1}{4x-10} + \frac{5x-1}{6x-15} - \frac{7x+5}{10x-25} = \frac{8}{5}$       7P

b)  $\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{1-x}$       5P

d)  $\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16}$       7P

Lösungen:

1)  $A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$

2)  $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

3)  $E \cap F = \emptyset$

4)

a)  $\frac{m^4 - n^4}{m^2 + n^2} = \frac{(m^2)^2 - (n^2)^2}{m^2 + n^2} = \frac{(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)}{m^2 + n^2} = m^2 - n^2$

b)  $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{b}{a} + \frac{a}{a}} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{b+a}{a}} = \frac{(a+b)a}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

c)  $\frac{\frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x}}{\frac{x}{y}} = \frac{\frac{2xy}{2y} - \frac{2xy}{2x}}{\frac{xy}{xy}} = \frac{\frac{x^3 - y^3}{2xy}}{\frac{xy}{xy}} = \frac{x^3 - y^3}{2xy} = \frac{(x^3 - y^3)xy}{2xy(2y - 2x)} = \frac{x^3 - y^3}{4(y - x)}$

5)

a)

$$2x - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{5}{4}x \mid \cdot$$

$$D = R$$

$$24x - 6 - 9x + 8 = 2 + 15x$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$L = D = R$$

b)

$$\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{1-x} \mid \cdot (1-x)(x-1)$$

$$D = R \setminus \{1\}$$

$$1 - x = -x + 1$$

$$1 - x = 1 - x$$

$$L = D$$

c)

$$\frac{3x+1}{4x-10} + \frac{5x-1}{6x-15} - \frac{7x+5}{10x-25}$$

$$D = R \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

$$\frac{3x+1}{2(2x-5)} + \frac{5x-1}{3(2x-5)} - \frac{7x}{5(2x-5)}$$

$$(3x+1) \cdot 15 + (5x-1) \cdot 10 - (7x) \cdot 6$$

d)

$$\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \mid \cdot (x^2-16)$$

$$D = R \setminus \{4; -4\}$$

$$3(x-4) - 2(x+4) = 5x - 20$$

$$3x - 12 - 2x - 8 = 5x - 20$$

$$x - 20 = 5x - 20 \mid \cdot + 20 \mid \cdot - 5x$$

$$-4x = 0$$

$$L = \{0\}$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

**AUFGABEN**

1) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS an: (18P)

a)	b)	c)	d)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$	

2) Wie ist  $|x|$  definiert ? (3 P)3) Geben Sie eine Äquivalenzumformung der folgenden Gleichung an: (3 P)  
 $x^2 = 25$ 

4) Machen Sie die quadratische Ergänzung zum folgenden Term: (10P)

$$x^2 - \frac{7}{3}x + ? = (? - ?)^2$$

5)  $\sqrt{z^2} =$  (3 P)6) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an: (3 P)  
 $x^2 = -4$ 7) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichung durch Äquivalenzumformungen (nicht durch "Mitternachtsformel") (10P)  
 $(x - 1)^2 = 16$

## Lösungen

1)

$$a) L = \{(9; 8; 7)\}$$

$$b) L = \{\}$$

c)

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$$

$$L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$$

wähle:  $x_2 = 1$ , dann gilt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

$$\text{also: } (1; 1) \in L$$

d)

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 \wedge x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

2)

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$3) x^2 = 25 \iff x = 5 \vee x = -5$$

4)

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} x + ? = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6} x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{6}\right)^2$$

$$5) \sqrt{z^2} = |z|$$

6)

$$L = \{\}$$

7)

$$(x - 1)^2 = 16 \iff (\text{Wurzelziehen auf beiden Seiten})$$

$$|x - 1| = \sqrt{16} = 4 \iff$$

$$x - 1 = 4 \vee x - 1 = -4 \iff$$

$$x = 5 \vee x = -3 \iff$$

also:

$$L = \{-3; 5\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

- 1) Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an: 4P  
a) Funktion,  
b) Punktprobe
- 2) Geben Sie ein Schaubild an, das nicht zu einer Funktion gehört. 1P
- 3) Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge  $D$  der folgenden Funktion  $h$  an: 1P  
$$h(x) = \frac{1}{x-10}$$
- 4) Gegeben sei die Funktion  $f(x) = x^2+2x+3$  6P  
Bestimmen Sie  
 $f(x^2)$ ,  $f(2x)$ ,  $f(x+1)$   
Der sich ergebende Term muss nicht vereinfacht werden!!
- 5) Welche 3 Möglichkeiten gibt es, eine Funktion darzustellen? 3P
- 6) Eine Parallele zur y-Achse geht durch den Punkt  $P(3 \mid 1)$ . 2P  
Wie heißt die Gleichung dieser Geraden?
- 7) Wie heißt die Funktionsgleichung der Geraden, die identisch ist mit der x-Achse? 1P
- 8) Geben Sie die Formeln der folgenden Begriffe an:  
a) Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung 1P  
b) Zwei-Punkte- Form der Geradengleichung 1P

Lösungen:

1)a) Eine Funktion  $f$  ist eine Menge von geordneten Zahlenpaaren  $(x,y)$ .

Dabei wird jedem Element  $x \in D$  (Definitionsmenge) genau ein Element  $y \in Z$  (Zielmenge) zugeordnet. Das zugeordnete Element  $y$  wird auch mit  $f(x)$  bezeichnet.

b) Gegeben ist eine Funktion  $f$ .

Liegt ein Punkt  $P(x_p | y_p)$  auf dem Graphen  $K_f$ , so erfüllen seine Koordinaten  $x_p$  und  $y_p$  die Funktionsgleichung  $y = f(x)$ .

Also gilt:

$$y_p = f(x_p)$$

$$2) y^2 = x^2$$

$$3) D = \mathbb{R} \setminus \{10\}$$

4)

$$f(x^2) = (x^2)^2 + 2(x^2) + 3$$

$$f(2x) = (2x)^2 + 2(2x) + 3$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 2(x+1) + 3$$

5) Funktionsgleichung, Wertetabelle, Paarmenge, Schaubild

$$6) x = 3$$

$$7) y = 0$$

8)

$$a) \frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

$$b) \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist eine Gerade  $K_g$  mit der Steigung  $-0,5$  und dem y-Achsenabschnitt  $-1$ . (2P)

a) Wie heißt die Geradengleichung von  $K_g$  ?

b)  $g$  wird an der y-Achse gespiegelt und ergibt die Gerade  $K_h$

Wie heißt die Geradengleichung von  $K_h$  ?

2) Eine Ursprungsgerade mit der Steigung  $2$  wird um  $+2$  in x-Richtung verschoben. (3P)

a) Wie heißt die Gleichung dieser Geraden  $g$

b) Durch den y-Achsenabschnitt dieser Geraden  $g$  wird eine dazu senkrechte Gerade  $h$  gezeichnet. Wie heißt die Gleichung dieser Geraden  $h$ ?

3) Eine Normalparabel wird gedehnt ( $a = 0,5$ ). (5P)

a) Wie heißt die Funktionsgleichung dieser Parabel?

Dann wird sie an der x-Achse gespiegelt.

b) Wie heißt die Funktionsgleichung dieser Parabel?

Dann wird sie in x-Richtung um  $-2$  verschoben.

c) Wie heißt die Funktionsgleichung dieser Parabel?

Dann wird sie in y-Richtung um  $+3$  verschoben.

d) Wie heißt die Funktionsgleichung dieser Parabel?

4) Wie heißt der Scheitelpunkt der Parabel mit der Funktionsgleichung: (10P)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$$

Die Umformungen müssen wie im Unterricht gemacht werden!



Lösungen:

1a)  $g(x) = -0,5x - 1$  (1P)

b)  $h(x) = 0,5x - 1$  (1P)

2a)  $y = 2x - 4$  (1P)

b)  $y = -0,5x - 4$  (2P)

3)

$y = 0,5x^2$  (1P)

$y = -0,5x^2$  (1P)

$y = -0,5(x - 2)^2$  (2P)

$y = -0,5(x - 2)^2 + 3$  (Endergebnis) (1P)

4)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} \quad (1P)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}x - 4 \cdot \frac{9}{4}) \quad (1P)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 9) \quad (1P)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 - 9) \quad (2P)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}((x+1)^2 - 1 - 9) \quad (1P)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{10}{4} \quad (2P)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 2,5$$

also (ablesen):

S(-1 | -2,5)

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Untersuchen Sie mathematisch die Schaubilder der folgenden Funktionen auf Punkt- bzw-Achsensymmetrie: (10P)

a)  $g(x) = 6,4 - 2x^2 + 0,1x^4$

b)  $h(x) = 3x - 0,25x^3$

2) Wie heißt der Scheitelpunkt der Parabel mit der Funktionsgleichung: (20P)

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x - 6$$

Die Umformungen müssen wie im Unterricht gemacht werden!

3) Es sollen alle Nullstellen der folgenden Funktion berechnet werden: (20P)

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

An der Stelle  $x = -3$  hat die Funktion eine Nullstelle.

a) Benutzen Sie dazu die Polynomdivision!

b) Geben Sie die restlichen Nullstellen mit Hilfe der Mitternachtsformel an.

Lösungen:

1)

$$a) g(x) = 6,4 - 2x^2 + 0,1x^4$$

$$g(-x) = 6,4 - 2(-x)^2 + 0,1(-x)^4 = 6,4 - 2x^2 + 0,1x^4 = g(x)$$

also Achsensymmetrie!

$$g(-x) = 6,4 - 2(-x)^2 + 0,1(-x)^4 = 6,4 - 2x^2 + 0,1x^4 = g(x)$$

$$-g(x) = -6,4 + 2x^2 - 0,1x^4$$

also:  $-g(x) \neq g(-x)$ , also keine Punktsymmetrie!

$$b) h(x) = 3x - 0,25x^3$$

$$-h(x) = -3x + 0,25x^3$$

$$h(-x) = 3(-x) - 0,25(-x)^3 = -3x + 0,25x^3 = -h(x)$$

also Punktsymmetrie!

$h(-x) \neq h(x)$ , also keine Achsensymmetrie!

2)

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x - 6 = \frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} 4x - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot 6 = \frac{2}{5}(x^2 - \frac{5}{2} \cdot 4x - \frac{5}{2} \cdot 6)$$

$$= \frac{2}{5}(x^2 - 10x - 15) = \frac{2}{5}(x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 - 15) = \frac{2}{5}((x-5)^2 - 40) = \frac{2}{5}(x-5)^2 - 16$$

S(5 | -16)

3)

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$(x^3 + 9x^2 + 27x + 27) : (x + 3) = x^2 + 6x + 9$$

$$-x^3 - 3x^2$$

$$-----$$
$$6x^2 + 27x + 27$$

$$-6x^2 - 18x$$

$$-----$$
$$9x + 27$$

$$-9x - 27$$

$$-----$$
$$0$$

also:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3) * (x^2 + 6x + 9)$$

Schnittpunkte mit der x-Achse

Schnittpunkte  $S_x(x_s | 0)$  mit der x-Achse:  $S_x(x_s | 0) \in K_f$

$$x_s^3 + 9x_s^2 + 27x_s + 27 = 0 \iff (x_s + 3)(x_s^2 + 6x_s + 9) = 0$$

Fall 1:

$$\frac{1}{8}x_s^4 + \frac{1}{2}x_s^3 = 0 \iff \frac{1}{2}x_s^3(\frac{1}{4}x_s + 1) = 0$$

Fall 1:

$$x_s + 3 = 0 \iff x_s = -3, \text{ also:}$$

$$x_{s1} = 0$$

Fall 2:

$$x_s^2 + 6x_s + 9 = 0$$

$$x_{s2/3} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = -3$$

$$x_{s2} = -3$$

damit Nullstellen von f:  $S_{x1}(-3 | 0)$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

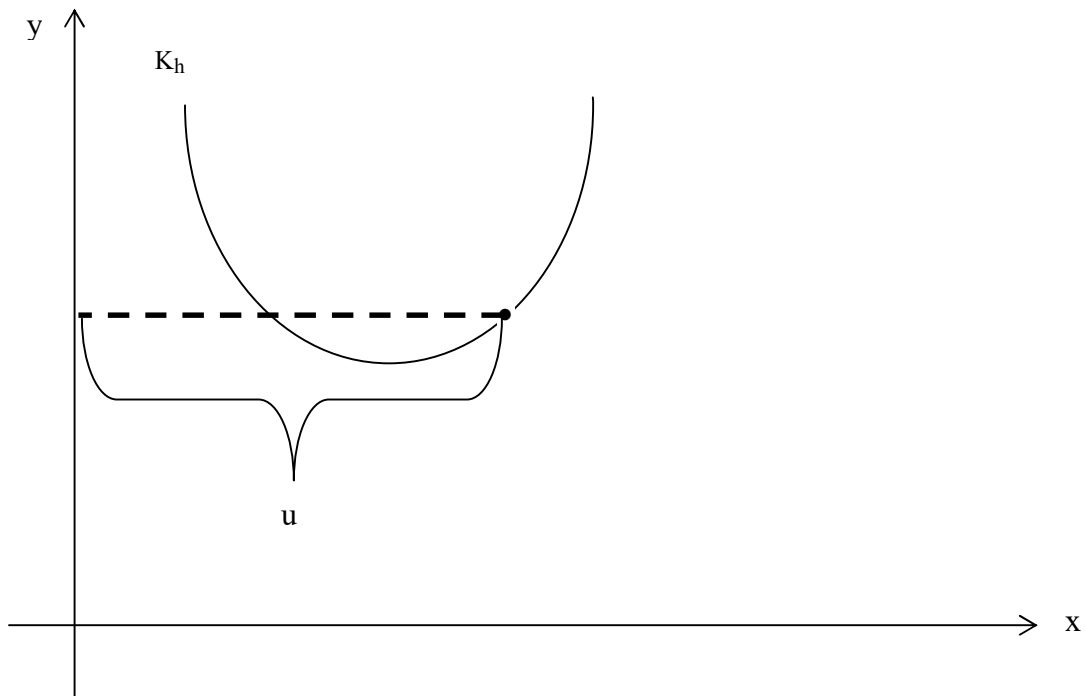
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben sei eine Funktion  $h$  (mit dem Schaubild  $K_h$ ).

Herr W.B. Gierig will wissen, wie groß  $h(u)$  und  $h'(u)$  ist. Zeichnen Sie deshalb  $h(u)$  und  $h'(u)$  in die folgende Zeichnung ein, so dass Herr W.B. Gierig diese Werte mit dem Geodreieck ablesen kann. (4P)



2) Wie ist rein formal (mit Hilfe des Limes) die Ableitung  $h'(x)$  definiert ? 2P

3) Gegeben ist die Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung 3P

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

$$g(x^2 + \pi)$$

4) Geben Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an: 7P

( $c, k$  sind **konstante** Werte)

a)  $h_1(x) = g(x) + c$

b)  $h_2(x) = k \cdot g(x)$

c)  $h_3(x) = g(x) + h(x)$

d)  $h_4(x) = 10 \cdot 5$

e)  $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$

f)  $h_6(x) = x$

g)  $h_7(x) = k/c$

5) In welchen Punkten hat das Schaubild  $K_g$  der Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung  $g(x) = x^3$  4P

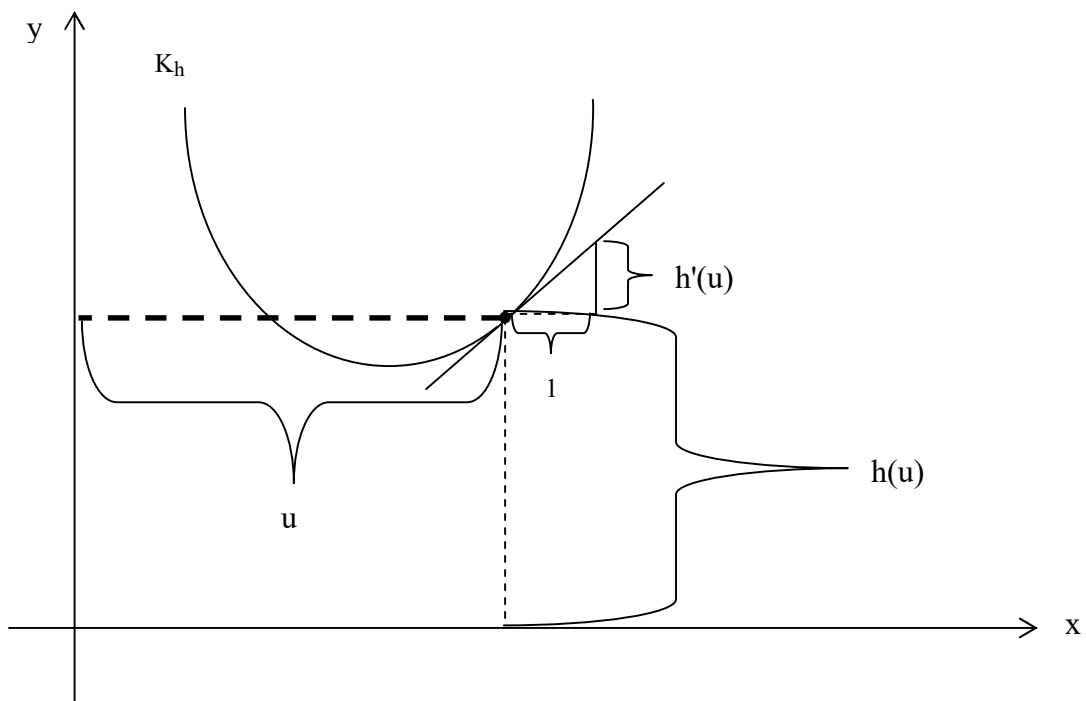
eine negative Steigung.

Zeichnerische und rechnerische Begründung!

:

Lösungen:

1)



$$2) h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$3) g(x^2 + \pi) = (\sin(x^2 + \pi) + \pi)^2 - \sqrt{x^2 + \pi}$$

4)

a)  $h_1'(x) = g'(x)$

b)  $h_2'(x) = k \cdot g'(x)$

c)  $h_3'(x) = g'(x) + h'(x)$

d)  $h_4'(x) = 0$

e)  $h_5'(x) = 21 \cdot x^6$

f)  $h_6'(x) = 1$

g)  $h_7'(x) = 0$

5) a)  $g'(x) = 3x^2 \geq 0$ , da  $x^2 \geq 0$

b) Alle Tangenten haben positive Steigung

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

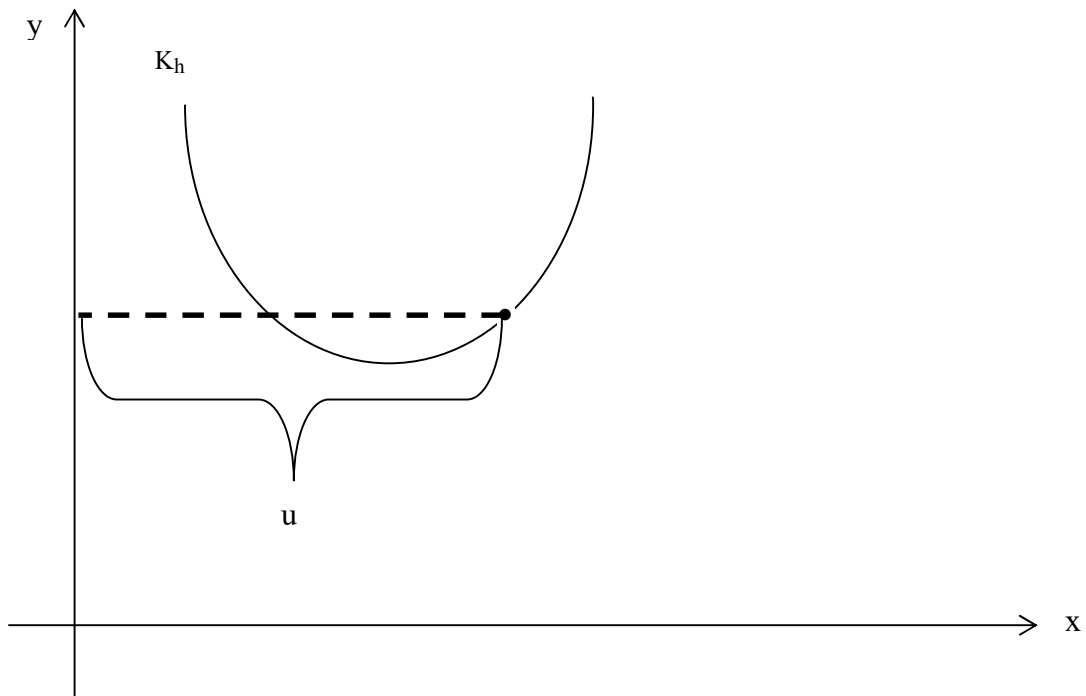
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben sei eine Funktion  $h$  (mit dem Schaubild  $K_h$ ).

Herr W.B. Gierig will wissen, wie groß  $h(u)$  und  $h'(u)$  ist. Zeichnen Sie deshalb  $h(u)$  und  $h'(u)$  in die folgende Zeichnung ein, so dass Herr W.B. Gierig diese Werte mit dem Geodreieck ablesen kann. (4P)



2) Wie ist rein formal (mit Hilfe des Limes) die Ableitung  $h'(x)$  definiert ? 2P

3) Gegeben ist die Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung 3P

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

$$g(x^2 + \pi)$$

4) Geben Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an: 7P

( $c, k$  sind **konstante** Werte)

a)  $h_1(x) = g(x) + c$

b)  $h_2(x) = k \cdot g(x)$

c)  $h_3(x) = g(x) + h(x)$

d)  $h_4(x) = 10 \cdot 5$

e)  $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$

f)  $h_6(x) = x$

g)  $h_7(x) = k/c$

5) In welchen Punkten hat das Schaubild  $K_g$  der Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung  $g(x) = x^3$  4P

eine negative Steigung.

Zeichnerische und rechnerische Begründung!



Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

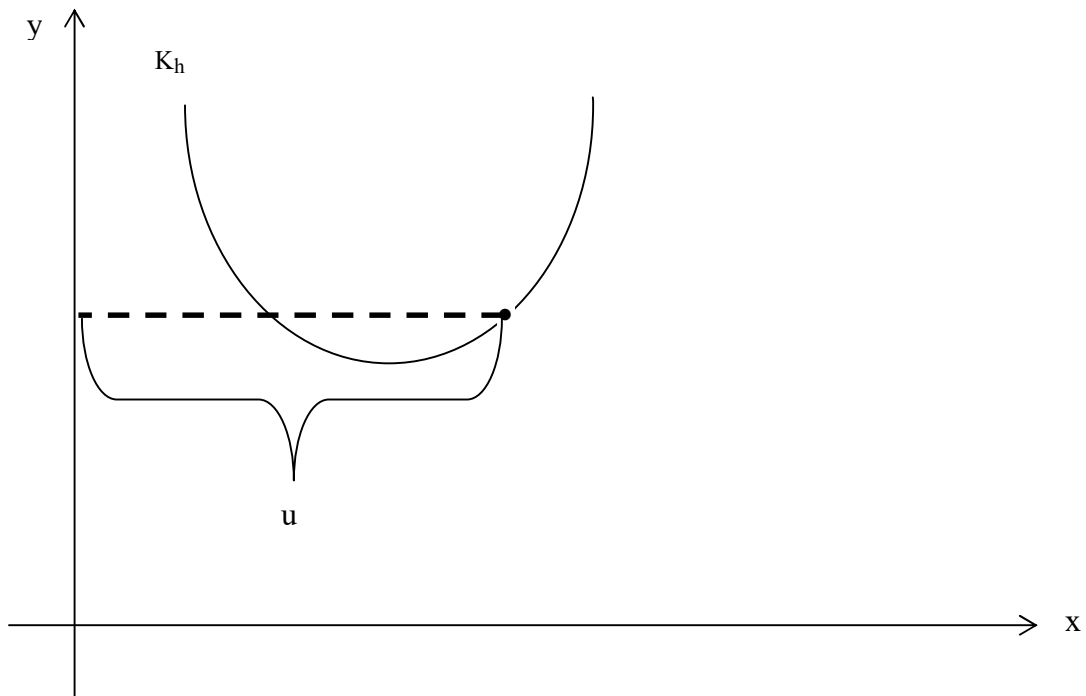
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben sei eine Funktion  $h$  (mit dem Schaubild  $K_h$ ).

Herr W.B. Gierig will wissen, wie groß  $h(u)$  und  $h'(u)$  ist. Zeichnen Sie deshalb  $h(u)$  und  $h'(u)$  in die folgende Zeichnung ein, so dass Herr W.B. Gierig diese Werte mit dem Geodreieck ablesen kann. (4P)



2) Wie ist rein formal (mit Hilfe des Limes) die Ableitung  $h'(x)$  definiert ? 2P

3) Gegeben ist die Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung 3P

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

$$g(x^2 + \pi)$$

4) Geben Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an: 7P

( $c, k$  sind **konstante** Werte)

a)  $h_1(x) = g(x) + c$

b)  $h_2(x) = k \cdot g(x)$

c)  $h_3(x) = g(x) + h(x)$

d)  $h_4(x) = 10 \cdot 5$

e)  $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$

f)  $h_6(x) = x$

g)  $h_7(x) = k/c$

5) In welchen Punkten hat das Schaubild  $K_g$  der Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung  $g(x) = x^3$  4P

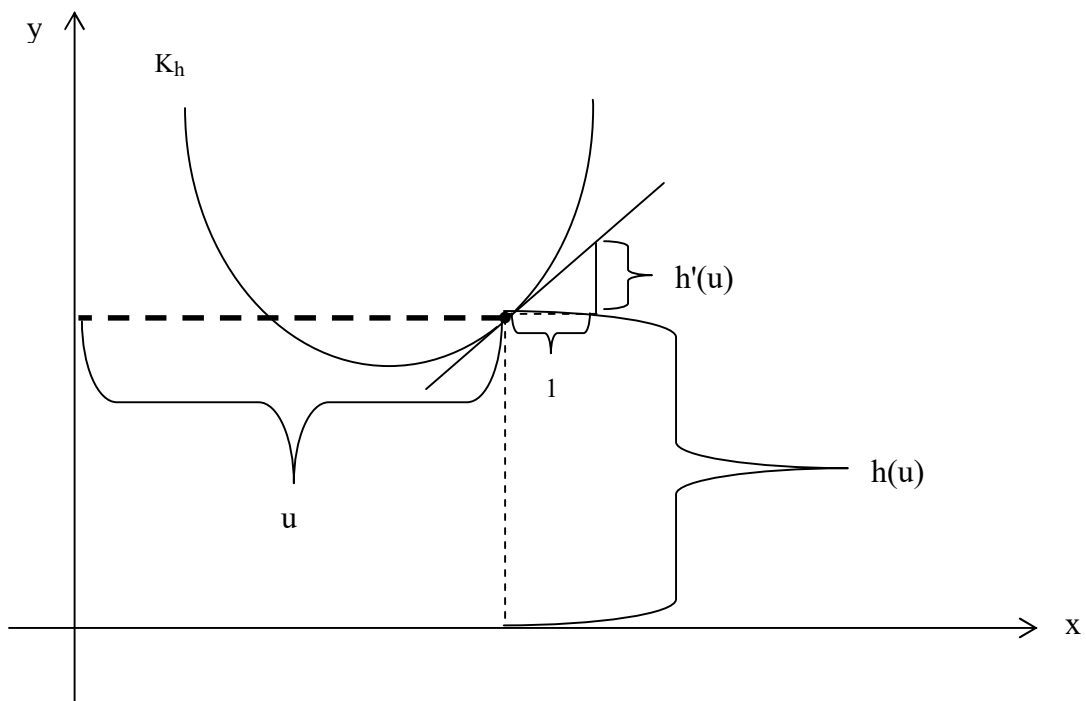
eine negative Steigung.

Zeichnerische und rechnerische Begründung!

:

Lösungen:

1)



$$2) h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$3) g(x^2 + \pi) = (\sin(x^2 + \pi) + \pi)^2 - \sqrt{x^2 + \pi}$$

4)

a)  $h_1'(x) = g'(x)$

b)  $h_2'(x) = k \cdot g'(x)$

c)  $h_3'(x) = g'(x) + h'(x)$

d)  $h_4'(x) = 0$

e)  $h_5'(x) = 21 \cdot x^6$

f)  $h_6'(x) = 1$

g)  $h_7'(x) = 0$

5) a)  $g'(x) = 3x^2 \geq 0$ , da  $x^2 \geq 0$

b) Alle Tangenten haben positive Steigung

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) 32P (davon Zeichnung 2 P)

Zeichnen Sie das Schaubild der folgenden Funktion, in jeweils dem Bereich, in dem die interessanten Punkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte) vorkommen. Untersuchen Sie die Schaubilder jeweils bzgl:

- a) Symmetrie (mathematische Begründung mit  $f(x)$  und  $f(-x)$ )
- b) Achsenschnittpunkte
- c) Ableitungen
- d) Extrempunkte
- e) Wendepunkte und Wendetangenten

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$$

2) 18P

Eine bzgl.  $O(0 | 0)$  punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in  $P(-1 | 1)$  eine Wendetangente mit der Steigung 3. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

Bemerkungen:

- 1) Begründung und Argumentation bei allen Aufgaben wie im Unterricht!!
- 2) Ergebnisse exakt und gerundet angeben!

## Lösungen

1)  $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$

a) Symmetrie

a1)  $f(-x) = \frac{1}{5}(-x)^4 - 5 = \frac{1}{5}x^4 - 5 = f(x)$

Das Schaubild  $K_f$  ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

3P

a2)  $-f(-x) = -(\frac{1}{5}(-x)^4 - 5) = -\frac{1}{5}x^4 + 5 \neq f(x)$

Das Schaubild  $K_f$  ist nicht punktsymmetrisch bzgl.  $O(0 | 0)$ .

3P

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte  $S_y(0 | y_s)$  mit der y-Achse:  $S_y(0 | y_s) \in K_f$

$y_s = f(0) = \frac{1}{5} \cdot 0^4 - 5 = -5$

2P

$S_y(0 | -5)$

0,5P

b2) Schnittpunkte  $S_x(x_s | 0)$  mit der x-Achse:  $S_x(x_s | 0) \in K_f$

$0 = \frac{1}{5}x_s^4 - 5 \quad | \cdot 5$

1P

$0 = x_s^4 - 25 \iff x_s^4 = 25 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$

3P

$\sqrt{x_s^4} = 5 \iff x_s^2 = 5$

$x_{s1} = \sqrt{5}$

$x_{s2} = -\sqrt{5}$

damit Nullstellen von f:

1P

$S_{x1}(-\sqrt{5} | 0) \approx S_{x1}(-2,24 | 0)$

$S_{x2}(\sqrt{5} | 0) \approx S_{x2}(2,24 | 0)$

c) Ableitungen

3P

$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$

$f'(x) = \frac{4}{5}x^3$

$f''(x) = \frac{12}{5}x^2$

$f'''(x) = \frac{24}{5}x$

d) Extrempunkte

Extrempunkte  $E(x_e | y_e)$ :  $f'(x_e) = 0$

$0 = \frac{4}{5}x_e^3 \quad | : \frac{4}{5}$

3P

$x_e^3 = 0$

$x_{e1} = 0$

$f''(0) = \frac{12}{5} \cdot 0^2 = 0 \implies \text{keine Aussage möglich.}$

1P

aber: VZW bei  $f'(0)$  von - nach +  $\implies$  Tiefpunkt

2P

$$y_{el} = f(0) = \frac{1}{5} \cdot 0^4 - 5 = -5 \quad 1P$$

damit:

T(0 | -5) Tiefpunkt 0,5P

e) Wendepunkte

Wendepunkte  $W(x_w | y_w)$ :  $f''(x_w) = 0$

$$\frac{12}{5} x_w^2 = 0 \quad | : \frac{12}{5} \quad 3P$$

$$x_w^2 = 0$$

$$x_w = 0$$

$$f'''(0) = \frac{24}{5} \cdot 0 = 0 \implies \text{keine Aussage möglich.} \quad 1P$$

aber: kein VZW bei  $f''(0) \implies$  kein Wendepunkt 2P

damit:

keine Wendepunkte

f) Wendetangenten

Da es keine Wendepunkte gibt, gibt es auch keine Wendetangenten.

2)

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c \quad 2P$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

a)  $P(-1 | 1) \in K_f$  4P

$$1 = a \cdot (-1)^5 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)$$

$$1 = -a - b - c \quad (G1)$$

b)  $P(-1 | 1)$  ist Wendepunkt 4P

$$f''(-1) = 0$$

$$20a \cdot (-1)^3 + 6b(-1) = 0$$

$$-20a - 6b = 0$$

$$-10a - 3b = 0 \quad (G2)$$

c) Wendetangente in  $P(-1 | 1)$  hat die Steigung 3 4P

$$f'(-1) = 3$$

$$5a \cdot (-1)^4 + 3b \cdot (-1)^2 + c = 3$$

$$5a + 3b + c = 3 \quad (G3)$$

d) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3): 4P

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = 5, \quad c = -\frac{9}{2}$$

e) Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 5x^3 - \frac{9}{2}x$$

## KLAUSUR 2    Mathematik    2BKI1    Nachtermin1    Zeit: 45 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

### AUFGABEN

1)

25P

Gegeben ist eine Parabel 3. Ordnung, d.h:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bestätigen oder widerlegen Sie die folgende Vermutung:

"Der x-Wert des Wendepunkts ist das arithmetische Mittel (Mittelwert) der x-Werte der Extrempunkte"

2)

26P

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung  $O(0|0)$  und besitzt den Wendepunkt  $W(1|-2)$ . Die Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt  $S(3|0)$ . Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion (berechnen und angeben).

Lösungen:

1)

a) Ableitungen

2P

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

b)

b) Extrempunkte

Extrempunkte  $E(x_e|y_e)$ :  $f'(x_e) = 0$

$$0 = 3ax_e^2 + 2bx_e + c$$

$$x_{e1/2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot 3 \cdot a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4(b^2 - 3ac)}}{6a} =$$

$$\frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{6a} = \frac{2(-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac})}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$x_{e1} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$x_{e2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

13P

Wenn es Extrempunkte gibt, so habe sie die gerade eben berechneten x-Koordinaten.

c) Wendepunkte

Wendepunkte  $W(x_w|y_w)$ :  $f''(x_w) = 0$

$$6ax_w + 2b = 0 \quad | : 2$$

1P

$$3ax_w + b = 0$$

4P

$$3ax_w = -b$$

$$x_w = \frac{-b}{3a}$$

Wenn es einen Wendepunkt gibt, so hat er den gerade eben berechnete x-Koordinate.

d) arithmetische Mittel

5P

$$m = \frac{x_{e1} + x_{e2}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac} - b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{-2b}{3a} \right) = \frac{-b}{3a}$$

also:

$$m = \frac{-b}{3a}$$

d) Man sieht sofort:

$$m = x_w$$

2)



$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

4P

a)  $O(0 \mid 0) \in K_f$

4P

$$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$

$$d = 0$$

b)  $d = 0$  eingesetzt in  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ergibt:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

c)  $W(1 \mid -2) \in K_f$

4P

$$-2 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1$$

$$-2 = a + b + c \quad (G1)$$

d) Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt  $S(3 \mid 0)$

6P

Steigung  $m$  der Wendetangente (durch  $W(1 \mid -2)$  und  $S(3 \mid 0)$ )

$$m = \frac{-2 - 0}{1 - 3} = 1 \quad (\text{Steigungsdreieck})$$

andererseits:

$$1 = m = f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c$$

$$3a + 2b + c = 1 \quad (G2)$$

e)  $W(1 \mid -2)$  ist Wendepunkt

4P

$$f''(1) = 0$$

$$6a \cdot 1 + 2b = 0$$

$$6a + 2b = 0$$

$$3a + b = 0 \quad (G3)$$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$$a = -3, \quad b = 9, \quad c = -8$$

4P

Ergebnis:

$$f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 8x$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

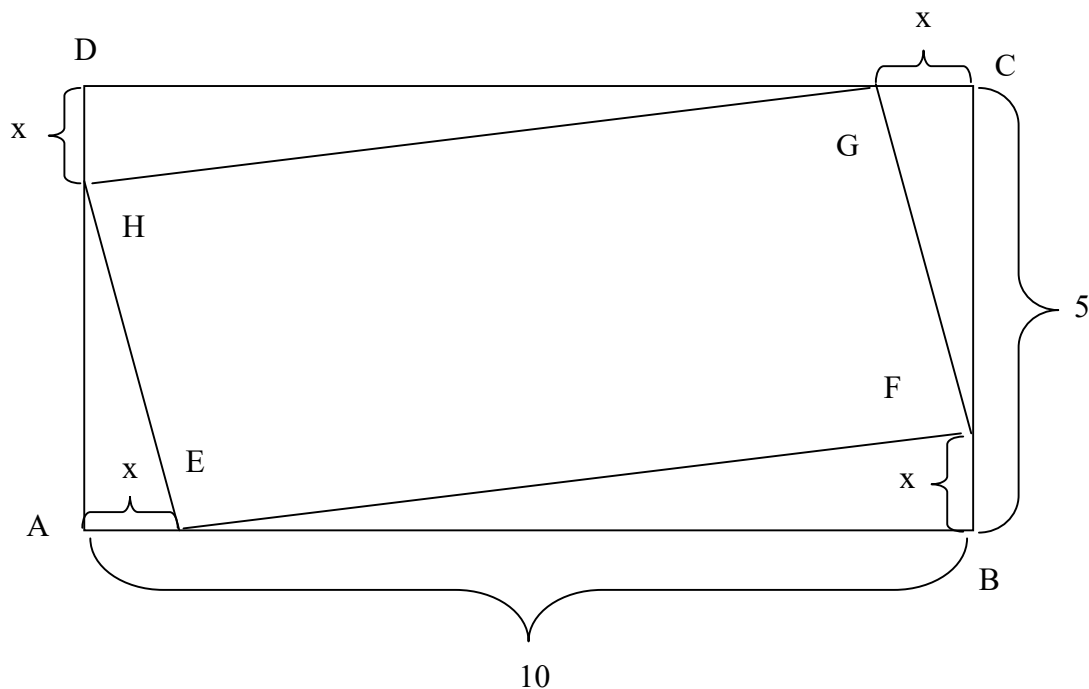
Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

**AUFGABEN**1) Auf den Seiten des Rechtecks ABCD wird die Strecke  $x$  abgetragen. 25PFür welchen Wert von  $x$  wird der Flächeninhalt des Parallelogramms EFGH am kleinsten?

Wie groß ist der kleinste Flächeninhalt?

2) 25P

Gegeben ist eine Parabel 3. Ordnung, d.h:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bestätigen oder widerlegen Sie die folgende Vermutung:

"Der  $x$ -Wert des Wendepunkts ist das arithmetische Mittel (Mittelwert) der  $x$ -Werte der Extrempunkte"

Lösungen:

1)

a) Zielfunktion:

15P

$$A(x) = 5 \cdot 10 - x(5 - x) - x(10 - x) =$$

$$50 - 5x + x^2 - 10x + x^2 = 50 - 15x + 2x^2$$

b) Ableitungen:

1P

$$A'(x) = -15 + 4x$$

$$A''(x) = 4$$

c) Definitionsbereich:

$$D = [0; 5]$$

1P

d) Lokale Extremwerte  $E(x_e | V_e): V'(x_e) = 0$ :

2P

$$4x_e - 15 = 0$$

$$x_e = 3,75 \in D$$

$$A''(x_e) = 4 > 0$$

2P

also: relatives Minimum bei

$$x_e = 3,75,$$

$$A(3,75) = 50 - 15 \cdot 3,75 + 3,75^2 = 7,8125$$

e) Randwertuntersuchung:

2P

$$A(0) = 50$$

$$A(5) = 25$$

f) Ergebnis:

2P

Der Flächeninhalt erreicht für  $x_e = 3,75$  sein absolutes Minimum  $A(3,75) = 7,8125$  FE

2)

a) Ableitungen

2P

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

b)

b) Extrempunkte

Extrempunkte  $E(x_e|y_e)$ :  $f'(x_e) = 0$

$$0 = 3ax_e^2 + 2bx_e + c$$

$$x_{e1/2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot 3 \cdot a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4(b^2 - 3ac)}}{6a} =$$
$$\frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{6a} = \frac{2(-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac})}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$x_{e1} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$x_{e2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

13P

Wenn es Extrempunkte gibt, so habe sie die gerade eben berechneten x-Koordinaten.

c) Wendepunkte

Wendepunkte  $W(x_w|y_w)$ :  $f''(x_w) = 0$

$$6ax_w + 2b = 0 \quad | : 2$$

1P

$$3ax_w + b = 0$$

4P

$$3ax_w = -b$$

$$x_w = \frac{-b}{3a}$$

Wenn es einen Wendepunkt gibt, so hat er den gerade eben berechnete x-Koordinate.

d) arithmetische Mittel

5P

$$m = \frac{x_{e1} + x_{e2}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) =$$
$$\frac{1}{2} \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac} - b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{-2b}{3a} \right) = \frac{-b}{3a}$$

also:

$$m = \frac{-b}{3a}$$

d) Man sieht sofort:

$$m = x_w$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

**AUFGABEN**

1) 10P

a) Um das wie vielfache des Anfangskapital von 10000 Euro vervielfacht sich ein Kapital bei einem Jahreszinssatz von 3% (wenn die Zinsen auf der Bank gelassen werden) nach 10 Jahren?

b) Gilt das auch für ein (beliebiges) anderes Anfangskapital?  
Begründen Sie mathematisch!

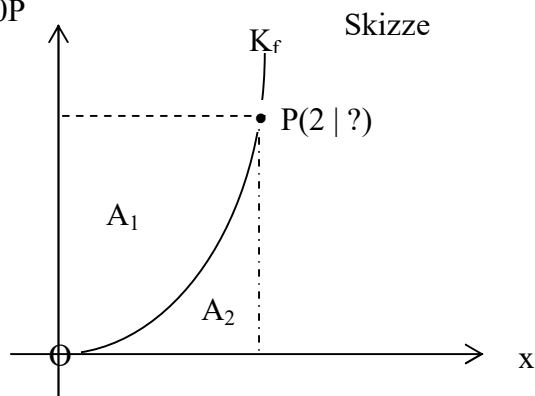
2) 10P

In Abhängigkeit der Zeit gilt beim Entladevorgang des Kondensators:

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}; \text{ wobei } U_0 \neq 0, R \neq 0, C \neq 0$$

Lösen Sie diese Gleichung nach  $t$  auf (umformen nach  $t$ ).

3) 30P



$K_f$  ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^2$

Die Fläche  $A_1$  wird durch  $K_f$ , die  $y$ -Achse und die waagrechte Gerade, die durch  $P$  geht, begrenzt. Die Fläche  $A_2$  wird durch  $K_f$ , die  $x$ -Achse und die senkrechte Gerade, die durch  $P$  geht, begrenzt.

a) Begründen Sie anschaulich, warum  $A_1 > A_2$  ist.

b) Um das wie vielfache ist  $A_1$  größer als  $A_2$  ?

c) Um das wie vielfache ist  $A_1$  größer als  $A_2$  , wenn  $P(a | ?) \in K_f$  ein beliebiger Punkt ist ( $a > 0$ ) ?

## Lösungen

1)

a)  $q = 1,03$

5P

$$K_{10} = K_0 \cdot q^{10}$$

$$\frac{K_{10}}{K_0} = \frac{10000 \cdot q^{10}}{10000} = q^{10} = 1,03^{10} \approx 1,34$$

b)  $q = 1,03$

5P

$$K_{10} = K_0 \cdot q^{10}$$

$$\frac{K_{10}}{K_0} = \frac{K_0 \cdot q^{10}}{K_0} = q^{10} = 1,03^{10} \approx 1,34$$

2)

10P

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad | : U_0$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0}$$

$$-\frac{t}{RC} = \log_e \frac{U}{U_0} = \ln \frac{U}{U_0}$$

$$t = -RC \cdot \ln \frac{U}{U_0}$$

3) 5P

a) Sei  $A_R$  die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da  $K_f$  unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt:  $A_1 > A_R/2 > A_2$

Damit gilt dann:

$$A_1 > A_2$$

b) 10P

$$A_2 = \int_0^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = 2 \cdot f(2) - A_2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16/3}{8/3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung  $A_1$ ):

$$A_1 = \int_0^2 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 (f(2) - x^2) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

c) 15P

$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{3} a^3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung  $A_1$ ):

$$A_1 = \int_0^a (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^a (f(a) - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkung:

Taschenrechner dürfen nicht verwendet werden!!!

## AUFGABEN

1) Lösen Sie die Gleichung  $r^x = s$  (wobei  $r > 0$ ,  $r \neq 1$ ,  $s > 0$ ) auf nach:

- a)  $x$  1P  
b)  $r$  1P

2) Berechnen Sie:

- a)  $\ln e^7$  1P  
b)  $\ln 1$  1P  
c)  $\ln e$  1P

3) Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

- a)  $\log_{10}(a \cdot a)$  2P  
b)  $\ln(x - y)$  2P  
c)  $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$  2P  
d)  $\log_a 1$  1P  
e)  $\log_a a$  1P  
f)  $\log_a a^x$  2P  
g)  $\log_a ((a^n)^m)$  3P  
h)  $\log_a \frac{a^n}{a^m}$  3P

Lösungen:

1)

a)  $x = \log_r s$

b)  $r = \sqrt[x]{s} = s^{1/x}$

2)

a)  $\ln e^7 = 7$

b)  $\ln 1 = 0$

c)  $\ln e = 1$

3)

a)  $\log_{10}(a \cdot a) = \log_{10} a^2 = 2 \log_{10} a$

b)  $\ln(x - y)$  "keine Umformung möglich"

c)  $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 \ln e = -2$

d)  $\log_a 1 = 0$

e)  $\log_a a = 1$

f)  $\log_a a^x = x$

g)  $\log_a ((a^n)^m) = \log_a (a^{nm}) = nm \cdot \log_a a = nm$

h)  $\log_a \frac{a^n}{a^m} = \log_a a^{n-m} = (n-m) \log_a a = n-m$