

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M \setminus \{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

Die Grundmenge G bei den folgenden Gleichungen ist: $G = \mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen.
Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L folgender Gleichungen:

1) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x}{2}$ (3)

2) $x^2 = 144$ (2)

3) $4x^2 + 20x - 96 = 0$ (3)

4) $(4x + 3)(4x - 3) = 55$ (3)

5) $x^2 = 16a^2$ $a \in \mathbb{R}$ (2)

6) $\frac{2}{x-3} + 1 = \frac{6}{2x-6}$ (3)

7) $\frac{5x}{2x-2} - \frac{x}{3x-3} = 2$ (4)

8) $\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16}$ (4)

9) $\frac{3x+2}{x+2} = \frac{7x+2}{2x+4}$ (4)

10) $x^2 - 1 = c^2 - 2c$ $c \in \mathbb{R}$ (4)

11) Lösen Sie durch quadratische Ergänzung:

$x^2 - 10x - 11 = 0$ (3)

12) Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 (Die Definitionsmenge und die Zielmenge ist jeweils \mathbb{R}) mit den Funktionsgleichungen

$f_1(x) = \frac{3}{2}x - 1$

$f_2(x) = -\frac{1}{2}x - 2$

- a) Zeichnen Sie das Schaubild g_1 von f_1 und das Schaubild g_2 von f_2 in ein rechtwinkliges (3)
Koordinatensystem (x -Achse: $[-3; 4]$, y -Achse: $[-5; 5]$, $LE = 1$ cm)
- b) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Schaubilder von f_1 und f_2 (4)
- c) Zeigen Sie rechnerisch ob gilt: $P_1(2 | 2) \in g_1$ (2)
- d) Zeigen Sie rechnerisch ob gilt: $P_2(-1 | 3) \in g_2$ (2)
- e) Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden, die durch die Punkte $Q_1(-1,5 | -1,25)$ und $Q_2(2 | 2)$ geht. (4)

KLAUSUR 1 Mathematik 2BKI1 23.11.2001 Zeit: 90 Minuten Nachtermin*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M \setminus \{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Die Grundmenge G bei den folgenden Gleichungen ist: $G = \mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen.
Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L folgender Gleichungen:

1) $-2x^2 + 10x - 14 = -6$ (4)

2) $\frac{10x}{x-3} - 2 = \frac{6x}{3x-9}$ (4)

3) $\frac{x^2}{2x-4} - \frac{2x}{4-2x} = \frac{-0,5}{x-2}$ (4)

4) $\frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x-1} = \frac{-10}{3}$ (4)

5) $(x-2a)^2 + 4ax - 5a^2 = 0$ $a \in \mathbb{R}$ (4)

6) $x - \frac{x^3}{(x+2)^2} = \frac{12}{25}$ (4)

7) Lösen Sie durch quadratische Ergänzung :

a) $x^2 + 1,5x - \frac{3}{8} = 0$ b) $-\frac{1}{30} - \frac{1}{15}x + \frac{7}{6} = 0$ (4)

c) $x^2 - 17x + \frac{355}{4} = 0$ (4)

2) Eine Klassenarbeit wird durch einen linearen Punkteschlüssel korrigiert:

Das bedeutet, dass 50 Punkte der Note 1 und 0 Punkte mit der Note 6 bewertet werden. (3)

a) Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem auf der senkrechten Achse die Note y und auf der horizontalen Achse die Anzahl x der erreichten Punkte eingetragen werden.

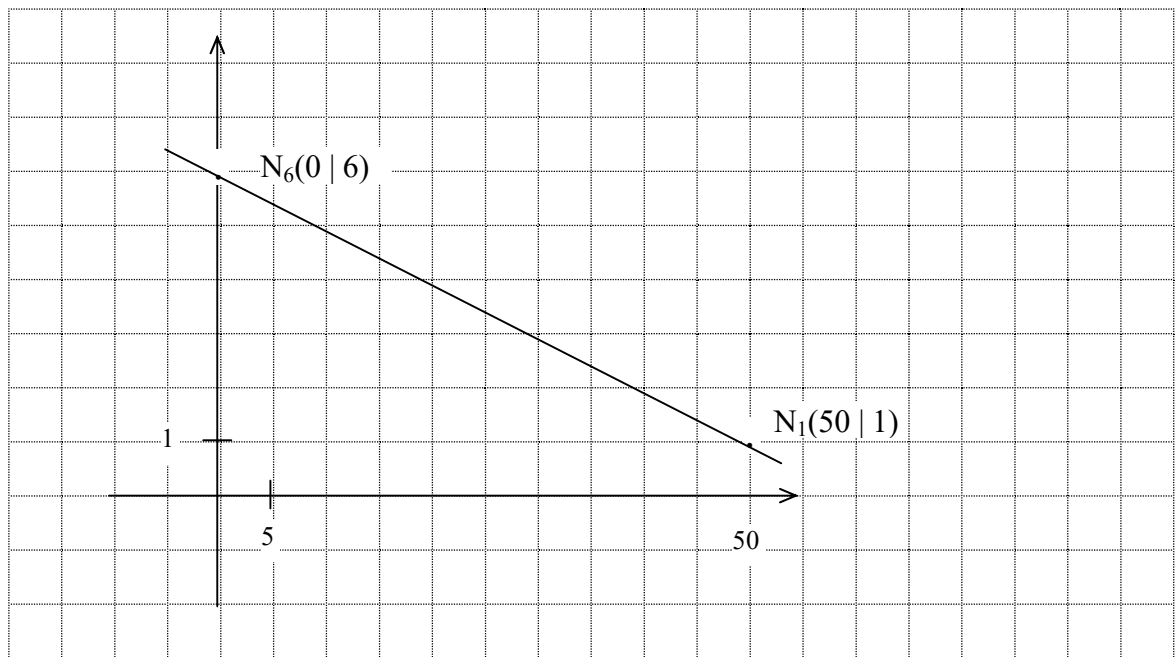
(x-Achse: $[-1; -11]$, y-Achse: $[-1; -7]$, LE: 5 Punkte = 1 cm, Eine Note = 1 cm).Verbinden Sie die Punkte $N_1(50, 1)$ und $N_6(0, 6)$ durch die Gerade g .b) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g ? (5)Bem: Das Ergebnis $y = (60 - x) / 10$ muß bei 2c) und 2d) verwendet werden.

c) Welche Note ergeben 28 erreichte Punkte.

Berechnen Sie dies mit Hilfe der Funktionsgleichung der Geradengleichung. (3)

d) Wieviel Punkte bekommt man für die Note 2,4 ?

Berechnen Sie dies mit Hilfe der Funktionsgleichung der Geradengleichung. (3)



Nachtermin für nächstes Jahr:

12) Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 (Die Definitionsmenge und die Zielmenge ist jeweils \mathbb{R}) mit den Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = \frac{5}{3}x - 1$$

$$f_2(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

- a) Zeichnen Sie das Schaubild g_1 von f_1 und das Schaubild g_2 von f_2 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x-Achse: $[-5; 4]$, y-Achse: $[-5; 5]$, LE = 1 cm) (2)
- b) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Schaubilder von f_1 und f_2 (3)
- c) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von g_1 und der x-Achse. (2)
- d) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von g_2 und der x-Achse. (2)
- e) Zeigen Sie rechnerisch ob gilt: $P_1(1,5 \mid 1,6) \in g_1$ (2)

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaue Ergebnisse (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Mit genauen Werten der Zwischenergebnisse muß bis zum Endergebnis weitergerechnet werden. Das Endergebnis kann dann zusätzlich gerundet werden (mit dem Zeichen \approx)
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkungen:

Überprüfen Sie bitte Ihre gerechneten Ergebnisse mit der Zeichnung.**AUFGABEN**

1) Es sind folgende Funktionsgleichungen f , h , mit den zugehörigen Schaubildern K_f und K_h gegeben:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

$$h(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$$

- a) Berechnen Sie den Scheitel von K_f (5)
- b) Berechnen Sie den Scheitel von K_h (5)
- c) Zeichnen Sie K_f , K_h im x -Intervall $[-2,4]$, $1LE = 1\text{ cm}$. (6)
- d) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse (4)
- e) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_f mit der y -Achse (4)
- f) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_h mit der x -Achse (4)
- g) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_h mit der y -Achse (4)
- h) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_f mit K_h (4)
- i) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden K_{g1} , die durch die Schnittpunkte von K_f mit K_h geht. (4)
- j) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden K_{g2} , die durch den Scheitel von K_h geht und senkrecht auf K_{g1} steht (4)
- k) Auf welchen Wert muß der Koeffizient von x^2 von K_f abgeändert werden, damit die Parabel durch den Punkt $R(1|5)$ (3)ht ?

2) Zeigen Sie rechnerisch, daß es egal ist, welchen Punkt man in der Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung als $P_1(x_1|y_1)$ und welchen Punkt man als $P_2(x_2|y_2)$ bezeichnet (3)

KLAUSUR 2 Mathematik 2BKI1 23.11.2001 Zeit: 90 Minuten
Nachtermin

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaue Ergebnisse (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Mit genauen Werten der Zwischenergebnisse muß bis zum Endergebnis weitergerechnet werden. Das Endergebnis kann dann zusätzlich gerundet werden (mit dem Zeichen \approx)
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkungen:

Überprüfen Sie bitte Ihre gerechneten Ergebnisse mit der Zeichnung.

AUFGABEN

1) Es sind folgende Funktionsgleichungen f , h , mit den zugehörigen Schaubildern K_f und K_h gegeben:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$h(x) = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

- a) Berechnen Sie den Scheitel von K_f
- b) Berechnen Sie den Scheitel von K_h
- c) Zeichnen Sie K_f , K_h im x -Intervall $[-5,3]$, x -Achse und y -Achse: $1LE = 1 \text{ cm}$.
- d) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse
- e) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_f mit der y -Achse
- f) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_h mit der x -Achse
- g) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_h mit der y -Achse
- h) Berechnen Sie Schnittpunkte von K_f mit K_h
- i) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden K_{g1} , die durch die Schnittpunkte von K_f mit K_h geht.
- j) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden K_{g2} , die senkrecht zu der Geraden K_{g1} ist und die gleichzeitig durch den Schnittpunkt der x -Achse mit der y -Achse geht.

2) Der Scheitel der Normalparabel wird vom Ursprung aus in negative x -Richtung und negative y -Richtung um den gleichen Wert so verschoben, dass die Parabel den Punkt $P(0|6)$ schneidet.

Berechnen Sie, um welchen Wert die Normalparabel verschoben wurde.

Lösungen

1a)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{4}(x+2)^2, \text{ also } \underline{\underline{S_f(-2|0)}}$$

b)

$$h(x) = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{11}{3} = -\frac{1}{12}(x^2 - 4x - 44) = -\frac{1}{12}(x^2 - 4x + 4 - 4 - 44) =$$

$$-\frac{1}{12}((x-2)^2 - 48) = -\frac{1}{12}(x-2)^2 + 4, \text{ also } \underline{\underline{S_h(2|4)}}$$

d)

$$S(x_s|0) \in K_f$$

$$\frac{1}{4}x_s^2 + x_s + 1 = 0 \Leftrightarrow x_s^2 + 4x_s + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_s + 2)^2 = 0$$

$$\underline{\underline{S_1(-2|0)}}$$

e)

$$S(0|y_s) \in K_f$$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{4}0^2 + 0 + 1 = 1, \text{ also } \underline{\underline{S_2(0|1)}}$$

f)

$$S(x_s|0) \in K_h$$

$$-\frac{1}{12}x_s^2 + \frac{1}{3}x_s + \frac{11}{3} = 0 \Leftrightarrow x_s^2 - 4x_s - 44 = 0 \Leftrightarrow x_{s1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{192}}{2} = 2 \pm 4\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{S_3(2+4\sqrt{3}|0)}} \quad \underline{\underline{S_4(2-4\sqrt{3}|0)}}$$

g)

$$S(0|y_s) \in K_h$$

$$y_s = h(0) = \frac{1}{12}0^2 + \frac{1}{3}0 + \frac{11}{3} = \frac{11}{3}, \text{ also } \underline{\underline{S_3(0|\frac{11}{3})}}$$

h)

$$S(x_s|y_s) \in K_f \wedge S(x_s|y_s) \in K_h$$

$$\frac{1}{4}x_s^2 + x_s + 1 = -\frac{1}{12}x_s^2 + \frac{1}{3}x_s + \frac{11}{3} \Leftrightarrow 3x_s^2 + 12x_s + 12 = -x_s^2 + 4x_s + 44 \Leftrightarrow$$

$$x_s^2 + 2x_s - 8 = 0$$

$$x_{s1} = -4, \quad x_{s2} = 2$$

$$\underline{\underline{S_4(-4|1)}}, \quad \underline{\underline{S_5(2|4)}}$$

i)

$$\frac{y-1}{x-(-4)} = \frac{4-1}{2-(-4)} \Leftrightarrow \frac{y-1}{x+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{g1: y = \frac{1}{2}x + 3}}$$

j)

$$g2 \perp g1: m_{g2} = -2, \text{ also: } g(x) = -2x + c.$$

$$\text{Da } O(0|0) \in g2 \text{ gilt (Punktprobe): } 0 = -2 \cdot 0 + c, \text{ also: } c = 0, \text{ also: } \underline{\underline{g(x) = -2x}}$$

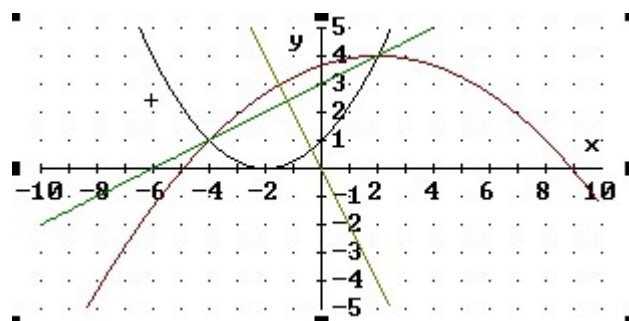
k)

Die Funktionsgleichung der Parabel lautet: $p(x) = (x-v)^2 + v$

Da $S(0|y_s) \in K_h$ gilt (Punktprobe): $6 = (0-v)^2 + v \Leftrightarrow v^2 + v - 6 = 0$

also: $v_1 = -3$, $v_2 = 2$. Da $v < 0$ sein muss: $p(x) = (x+3)^2 - 3$

Zeichnung:



Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

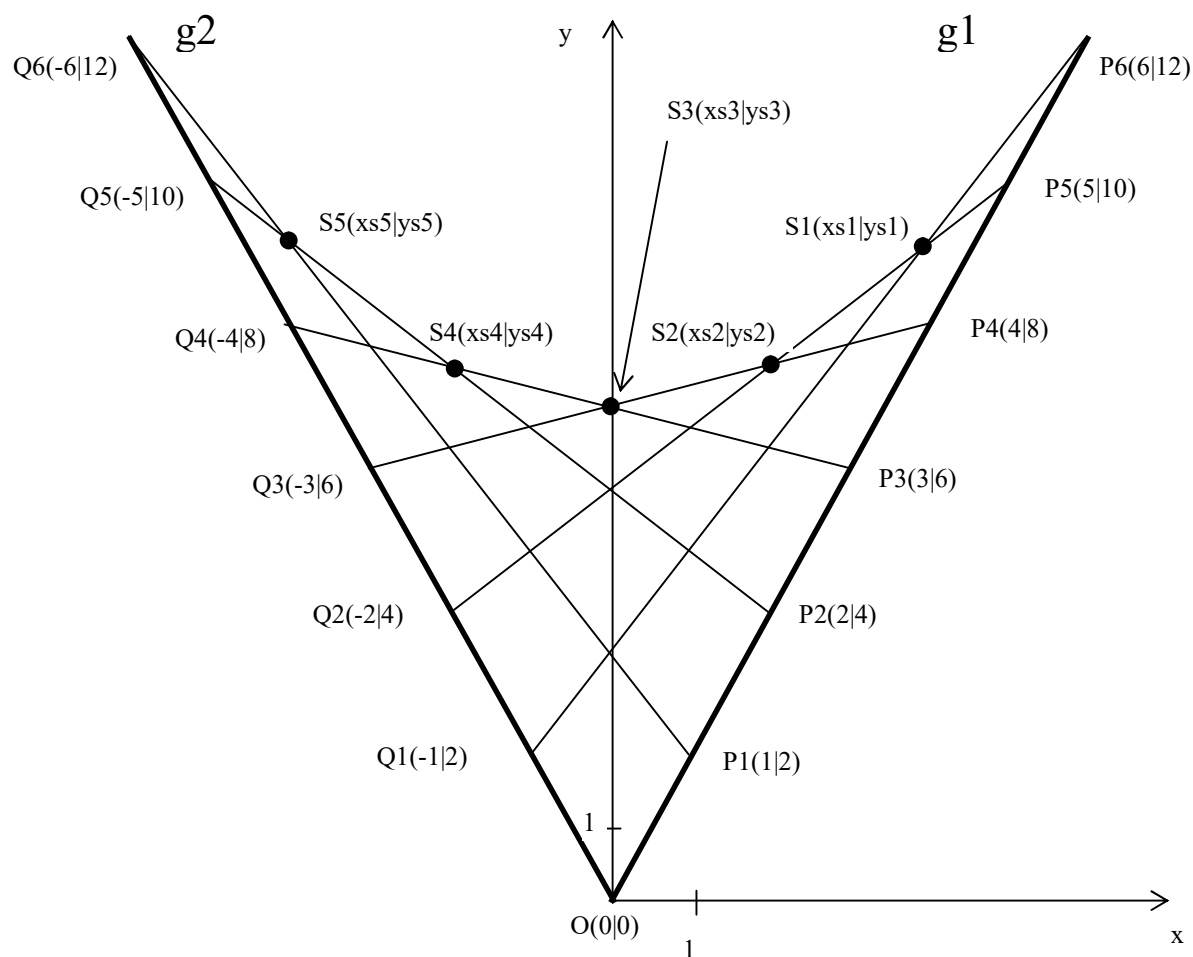
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) a) Zeigen Sie, dass sich alle Punkte

$S_1(x_{s1} | y_{s1})$, $S_2(x_{s2} | y_{s2})$, $S_3(x_{s3} | y_{s3})$, $S_4(x_{s4} | y_{s4})$, $S_5(x_{s5} | y_{s5})$

in der Zeichnung unten auf einer Parabel 2. Ordnung befinden.



- 2) Wie hoch muss der Jahreszinssatz sein, damit sich in 10 Jahren das Kapital vervierfacht ?
- 3) In wieviel Jahren vermehrt sich bei einem Jahreszinssatz von 5 % ein Anfangskapital auf das Doppelte ?

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

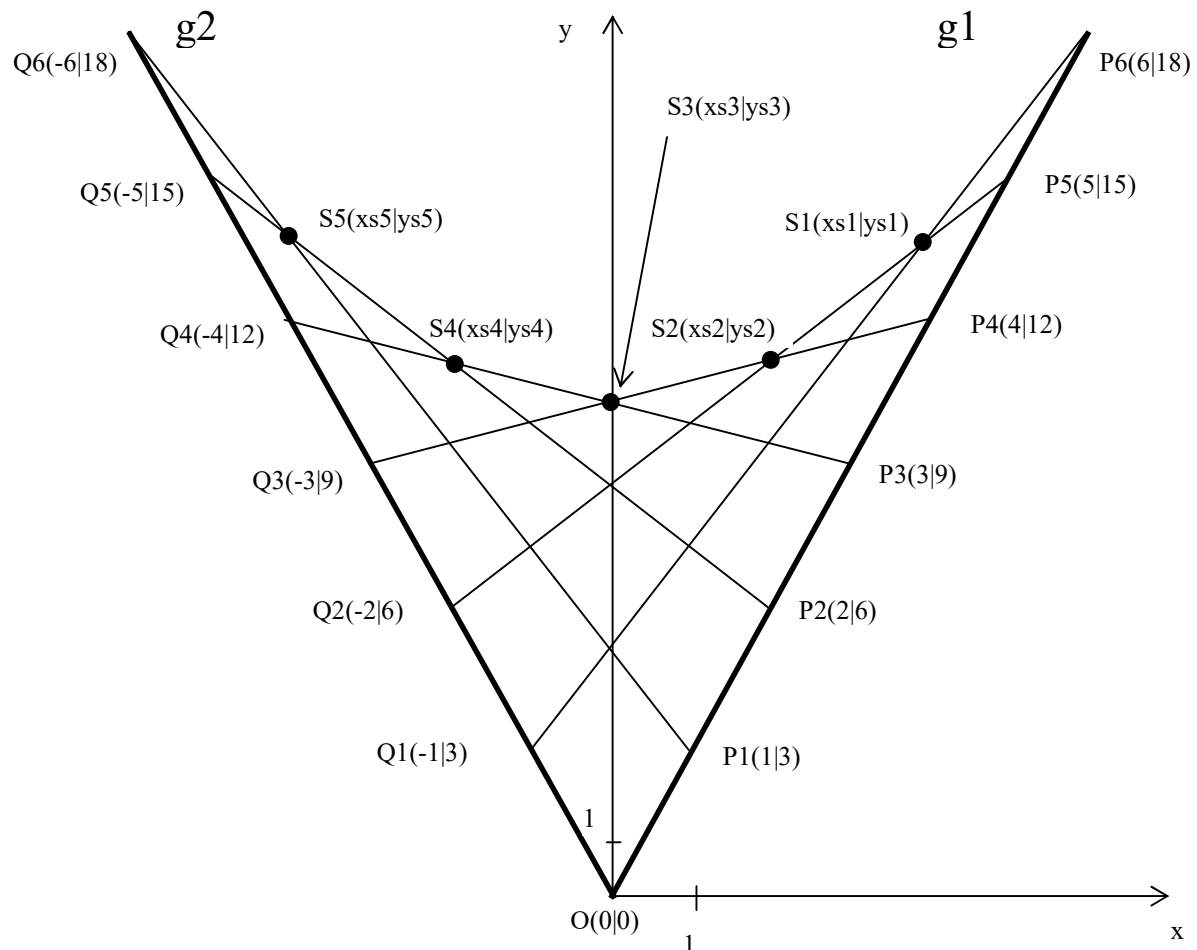
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) a) Zeigen Sie, dass sich alle Punkte

$S_1(xs1 | ys1)$, $S_2(xs2 | ys2)$, $S_3(xs3 | ys3)$, $S_4(xs4 | ys4)$, $S_5(xs5 | ys5)$

in der Zeichnung unten auf einer Parabel 2. Ordnung befinden.



2) Ein Bankkunde will in 5 Jahren bei 4,5 % Jahreszinssatz 2000 DM verdienen.
Wieviel Geld muß er einlegen ?

3) Jemand will sich 10000 DM bei seinem Freund leihen und ihm dafür in 5 Jahren 12500 DM zurückzahlen. Eine Bank würde dem Freund die Wertanlage mit 4,5 % Jahreszinssatz verzinsen.

Was ist die bessere Option ?

Lösungen:

1)

$h1=(P6Q1)$, $h2=(P5Q2)$, $h3=(P4Q3)$, $h4=(P3Q4)$, $h5=(P2Q5)$, $h1=(P1Q6)$

a) Funktionsgleichungen der Geraden:

$$h1: \frac{y-12}{x-6} = \frac{2-12}{-1-6} \quad \text{also: } y = \frac{10}{7}x + \frac{24}{7}$$

$$h2: \frac{y-10}{x-5} = \frac{4-10}{-2-5} \quad \text{also: } y = \frac{6}{7}x + \frac{40}{7}$$

$$h3: \frac{y-8}{x-4} = \frac{6-8}{-3-4} \quad \text{also: } y = \frac{2}{7}x + \frac{48}{7}$$

$$h4: \frac{y-6}{x-3} = \frac{8-6}{-4-3} \quad \text{also: } y = -\frac{2}{7}x + \frac{48}{7}$$

$$h5: \frac{y-4}{x-2} = \frac{10-4}{-5-2} \quad \text{also: } y = -\frac{6}{7}x + \frac{40}{7}$$

$$h6: \frac{y-2}{x-1} = \frac{12-2}{-6-1} \quad \text{also: } y = -\frac{10}{7}x + \frac{24}{7}$$

b) Berechnung der Geradenschnittpunkte

$h1 \cap h2 = \{S1(xs1,ys1)\}$:

$$\frac{10}{7}xs1 + \frac{24}{7} = \frac{6}{7}xs1 + \frac{40}{7}$$

$$xs1 = 4, \quad ys1 = \frac{64}{7}$$

$h2 \cap h3 = \{S2(xs2,ys2)\}$:

$$\frac{6}{7}xs2 + \frac{40}{7} = \frac{2}{7}xs2 + \frac{48}{7}$$

$$xs2 = 2, \quad ys2 = \frac{52}{7}$$

$h3 \cap h4 = \{S3(xs3,ys3)\}$:

$$\frac{2}{7}xs3 + \frac{48}{7} = -\frac{2}{7}xs3 + \frac{48}{7}$$

$$xs3 = 0, \quad ys3 = \frac{48}{7}$$

$h4 \cap h5 = \{S4(xs4,ys4)\}$:

$$-\frac{2}{7}xs4 + \frac{48}{7} = -\frac{6}{7}xs4 + \frac{40}{7}$$

$$xs4 = -2, \quad ys4 = \frac{52}{7}$$

$h5 \cap h6 = \{S5(xs5,ys5)\}$:

$$-\frac{6}{7}xs5 + \frac{40}{7} = -\frac{10}{7}xs5 + \frac{24}{7}$$

$$xs5 = -4, \quad ys5 = \frac{64}{7}$$

c) Funktionsgleichung der Parabel:

$$P: f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$S1(4 | \frac{64}{7}) \in P, \quad S2(2 | \frac{52}{7}) \in P, \quad S3(0 | \frac{48}{7}) \in P$$

$$(1) \quad \frac{64}{7} = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$$

$$(2) \quad \frac{52}{7} = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$(3) \quad \frac{48}{7} = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$c = \frac{48}{7}$$

c eingesetzt in (1) und (2):

$$(4) \quad \frac{16}{7} = 16a + 4b$$

$$(5) \quad \frac{4}{7} = 4a + 2b$$

$$"(5) \cdot -4 + (4)":$$

$$-4b = 0, \quad \text{also: } b = 0$$

b in (5) eingesetzt:

$$a = \frac{1}{7}, \quad \text{damit:}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{7}x^2 + \frac{48}{7}}}$$

Punktprobe für $S4(-2 | \frac{52}{7})$:

$$\frac{1}{7} \cdot (-2)^2 + \frac{48}{7} = \frac{52}{7}$$

$$\text{also: } S4(-2 | \frac{52}{7}) \in P$$

Punktprobe für $S5(-4 | \frac{64}{7})$:

$$\frac{1}{7} \cdot (-4)^2 + \frac{48}{7} = \frac{64}{7}$$

$$\text{also: } S5(-4 | \frac{64}{7}) \in P$$

Klausurvorschlag:

1) Gegeben ist die Funktion f mit

$$g(x) = 3x - \frac{1}{4}x^3$$

Untersuchen Sie das Schaubild K_f dieser Funktion bzgl:

- a) Symmetrie
- b) Achsenschnittpunkte
- c) Ableitungen
- d) Extrempunkte
- e) Wendepunkte und Wendetangenten

2) Gegeben ist die Funktion g mit

$$g(x) = \frac{64}{10} - 2x^2 + \frac{1}{10}x^4$$

Untersuchen Sie das Schaubild K_f dieser Funktion bzgl:

- a) Symmetrie
- b) Achsenschnittpunkte
- c) Ableitungen
- d) Extrempunkte
- e) Wendepunkte und Wendetangenten

6) Das Schaubild einer geraden ganzrationalen Funktion 4. Grades geht durch die Punkte

$$P(0 | -3), \quad Q(2 | 21) \quad R\left(-\frac{1}{2} | -\frac{39}{16}\right)$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

15) Das Schaubild einer ungeraden ganzrationalen Funktion 5. Grades hat am Punkt $P(1|0)$ die Steigung 8 und geht durch den Punkt $Q(2|42)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$$

für $-3 \leq x \leq 3$ und $-2 \leq f(x) \leq 8$.

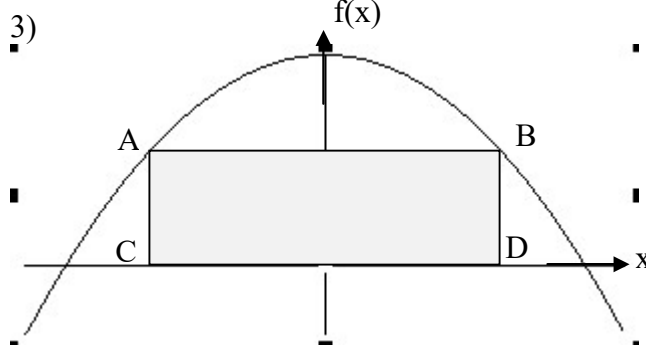
und untersuchen Sie es bzgl:

- a) Symmetrie
- b) Achsenschnittpunkte
- c) Ableitungen
- d) Extrempunkte
- e) Wendepunkte
- f) Stellen Sie für jede Wendetangente die Funktionsgleichung auf.

Bemerkung:

Da Sie jedes Teilergebnis dieser Aufgabe nachprüfen können, gibt es für jede Teilaufgabe dieser Aufgabe entweder die volle Punktzahl oder gar keinen Punkt.

2) Beweisen Sie rein rechnerisch, (mit Hilfe der Limesbildung), dass sich für die 1. Ableitung der Funktion

 $g(x) = x^3 + 2$ die Funktion $g'(x) = 3x^2$ ergibt.

Gegeben ist eine Parabel mit der folgenden Funktionsgleichung

$$f(x) = 3 - \frac{1}{4}x^2$$

Wie groß sind die Seiten und der Flächeninhalt des Rechtecks, dessen obere zwei Ecken A und B auf der Parabel und dessen untere zwei Ecken C und D auf der x-Achse liegen (siehe Zeichnung) und das den größten Flächeninhalt besitzt ?

Lösung

Punkteverteilung:

Aufgabe 1:

* --- Zeichnung --- * 4P

* --- Symmetrie --- * 4P

* --- Ableitungen --- *

$$f'(x) = x^3 - 4x \quad 1P$$

$$f''(x) = 3x^2 - 4 \quad 1P$$

$$f'''(x) = 6x \quad 1P$$

* --- Achsenschnittpunkte --- *

Schnittpunkte mit den Achsen

$$S(0 | 4) \quad 1P$$

$$f(x_s) = \frac{1}{4}x_s^4 - 2x_s^2 + 4 = 0 \quad 1P$$

Polynomdivision 1 2P

Polynomdivision 2 2P

$$N_1(-2 | 0) \quad 1P$$

$$N_2(2 | 0) \quad 1P$$

* --- Extrempunkte --- *

$$f'(x_e) = x_e^3 - 4x_e = 0 \quad 1P$$

Rechnung 2P

$$x_{e1} = 0 \quad 1P$$

$$x_{e2} = -2 \quad 1P$$

$$x_{e3} = 2 \quad 1P$$

$$f''(0) = -4 \quad 1P$$

$$f''(-2) = 8 \quad 1P$$

$$f''(2) = 8 \quad 1P$$

$$T_1(-2 | 0) \text{ ist TP} \quad 1P$$

$$T_2(2 | 0) \text{ ist TP} \quad 1P$$

$$H(0 | 4) \text{ ist HP} \quad 1P$$

Aufgabe 2: 10 P

Aufgabe 3: 10 P

* --- Wendepunkte --- *

$$f''(x_w) = 3x_w^2 - 4 = 0 \quad 1P$$

$$x_{w1} = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad 1P$$

$$x_{w2} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad 1P$$

$$f'''(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = -4\sqrt{3} \neq 0 \quad 1P$$

$$f'''(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = 4\sqrt{3} \neq 0 \quad 1P$$

$$W_1(-\frac{2\sqrt{3}}{3} | \frac{16}{9}) \quad 1P$$

$$W_2(\frac{2\sqrt{3}}{3} | \frac{16}{9}) \quad 1P$$

* --- Wendetangenten --- *

$$f'(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{-16\sqrt{3}}{9} \quad 1P$$

$$f'(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{9} \quad 1P$$

$$\frac{y - 16/9}{x + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9} \quad 1P$$

$$y = \frac{16\sqrt{3}}{9}x + \frac{16}{3} \quad 1P$$

$$\frac{y - 16/9}{x - \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{-16\sqrt{3}}{9} \quad 1P$$

$$y = -\frac{16\sqrt{3}}{9}x + \frac{16}{3} \quad 1P$$

Polynomdivision bei Aufgabe1:

Schnittpunkte $S(x_s|0)$ mit der x-Achse:

$$f(x_s) = \frac{1}{4}x_s^4 - 2x_s^2 + 4 = 0$$

$$\frac{1}{4}x_s^4 - 2x_s^2 + 4 = 0 \mid \cdot 4$$

$$x_s^4 - 8x_s^2 + 16 = 0$$

Lösung durch Raten : 2

$$x_s^4 - 8x_s^2 + 16 : (x_s - 2) = x_s^3 + 2x_s^2 - 4x_s - 8$$

$$\mu x_s^4 \pm 2x_s^3$$

$$2x_s^3 - 8x_s^2 + 16$$

$$\mu 2x_s^3 \pm 4x_s^2$$

$$-4x_s^2 + 16$$

$$\pm 4x_s^2 \mu 8x_s$$

$$-8x_s + 16$$

$$\pm 8x_s \mu 16$$

Damit ergibt sich :

$$x_s^4 - 8x_s^2 + 16 = (x_s - 2) \cdot (x_s^3 + 2x_s^2 - 4x_s - 8) = 0$$

Damit gilt :

$$(x_s - 2) = 0 \text{ oder } (x_s^3 + 2x_s^2 - 4x_s - 8) = 0$$

Wann wird $(x_s^3 + 2x_s^2 - 4x_s - 8)$ Null ?

$$x_s^3 + 2x_s^2 - 4x_s - 8 = 0$$

Lösung durch Raten : -2

weiter :

$$(x_s^3 + 2x_s^2 - 4x_s - 8) : (x_s + 2) = x_s^2 - 4$$

$$\mu x_s^3 \mu 2x_s^2$$

$$-4x_s - 8$$

$$\pm 4x_s \pm 8$$

Damit gilt dann :

$$(x_s^3 + 2x_s^2 - 4x_s - 8) = (x_s + 2) \cdot (x_s^2 - 4) = 0$$

und damit :

$$x_s^4 - 8x_s^2 + 16 = (x_s - 2) \cdot (x_s + 2) \cdot (x_s^2 - 4) = 0$$

damit gilt dann :

$$x_s - 2 = 0 \text{ oder } x_s + 2 = 0 \text{ oder } x_s^2 - 4 = 0$$

also :

$$x_{s1} = 2$$

$$x_{s2} = -2$$

$$x_{s3} = 2$$

$$x_{s4} = -2$$

Da jeweils 2 Lösungen zusammenfallen,

gibt es insgesamt die Lösungen :

$$x_{s1} = 2$$

$$x_{s2} = -2$$

Aufgabe 1:

a) Symmetrie:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$$

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 + 4$$

$$\text{also: } f(x) = f(-x)$$

Das Schaubild der Funktion f ist symmetrisch zur y -Achse

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte mit der y -Achse: $S(0 | y_s)$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 4$$

$$\text{damit: } S(0 | 4)$$

b2) Schnittpunkte mit der x -Achse: $S(x_s | 0)$

$$f(x_s) = \frac{1}{4}x_s^4 - 2x_s^2 + 4 = 0$$

$$\frac{1}{4}x_s^4 - 2x_s^2 + 4 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$x_s^4 - 8x_s^2 + 16 = 0$$

Durch Polynomdivision ergibt sich

die Faktorzerlegung (siehe anderes Blatt):

$$(x_s - 2)(x_s - 2)(x_s + 2)(x_s + 2) = 0$$

$$x_{s1} = -2$$

$$x_{s2} = 2$$

c) Ableitungen:

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

$$f'''(x) = 6x$$

d) Extrempunkte $E(x_e | y_e)$:

$$f'(x_e) = x_e^3 - 4x_e = 0$$

$$x_e^3 - 4x_e = 0$$

$$x_e(x_e^2 - 4) = 0$$

$$x_e = 0 \text{ oder } (x_e^2 - 4) = 0$$

$$x_e = 0 \text{ oder } (x_e^2 = 4)$$

damit:

$$x_{e1} = 0$$

$$x_{e2} = -2$$

$$x_{e3} = 2$$

$$f''(x_{e1}) = f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$$

$$f''(x_{e2}) = f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8$$

$$f''(x_{e3}) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8$$

$$f'(x_{e1}) = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$f'(x_{e2}) = f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 4 = 4 = 0$$

$$f'(x_{e3}) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 4 = 0$$

damit:

$$T_1(-2 | 0) \text{ ist TP}$$

$$T_2(2 | 0) \text{ ist TP}$$

$$H(0 | 4) \text{ ist HP}$$

e) Wendepunkte $W(x_w | y_w)$:

$$f''(x_w) = 3x_w^2 - 4 = 0$$

$$3x_w^2 - 4 = 0$$

$$x_w^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_{w1} = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad x_{w2} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$f'''(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = 6 \cdot -\frac{2\sqrt{3}}{3} = -4\sqrt{3} \neq 0$$

$$f'''(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \neq 0$$

$$f(x_{w1}) = f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{4}(-\frac{2\sqrt{3}}{3})^4 - 2(-\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + 4 = \frac{16}{9}$$

$$f(x_{w2}) = f(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{4}(\frac{2\sqrt{3}}{3})^4 - 2(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + 4 = \frac{16}{9}$$

damit:

$$W_1(-\frac{2\sqrt{3}}{3} | \frac{16}{9}) \text{ ist WP}$$

$$W_2(\frac{2\sqrt{3}}{3} | \frac{16}{9}) \text{ ist WP}$$

Aufgabe2:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 + 2 - (x_0^3 + 2)}{\Delta x} = \\ &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2 - (x_0^3 + 2)}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2\end{aligned}$$

$$m_t(x_0) = \lim (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2$$

Damit allgemein:

$$m_t(x) = 3x^2 \quad \text{und} \quad g'(x) = 3x^2$$

Aufgabe3:

$$f(x) = 3 - \frac{1}{4}x^2$$

a) Bestimmung des Definitionsbereichs:

Schnittpunkte mit x -Achse sind:

$$x_{S1} = \sqrt{12}, \quad x_{S2} = -\sqrt{12}$$

damit:

$$D = [-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$$

Der Flächeninhalt beträgt:

$$A(a, b) = 2 \cdot a \cdot b$$

$$A(a) = 2 \cdot a \cdot \left(3 - \frac{1}{4}a^2\right) = 6a - \frac{1}{2}a^3$$

$$A'(a) = 6 - \frac{3}{2}a^2$$

$$A''(a) = -3a$$

b) Bestimmung der relativen

Extrempunkte $E(a_e | A_e)$:

$$A'(a_e) = 0 = 6 - \frac{3}{2}a_e^2$$

$$0 = 6 - \frac{3}{2}a_e^2$$

$$a_{e1} = 2$$

$$a_{e2} = -2$$

$$A''(a_{e1}) = A''(2) = -3 \cdot 2 = -6$$

$$A''(a_{e2}) = A''(-2) = -3 \cdot -2 = 6$$

Relatives Maximum (Hochpunkt) an a_{e1}

$$A(a_{e1}) = A(2) = 6 \cdot 2 - \frac{1}{2}2^3 = 8$$

$$A(a_{e2}) = A(-2) = 6 \cdot -2 - \frac{1}{2}(-2)^3 = -8$$

(kein Flächeninhalt, da negativer Wert)

c) Bestimmung des absoluten Extrempunktes:

Dazu muß der Flächeninhalt an den

Rändern des Definitionsbereichs bestimmt werden:

$$A(x_{S1}) = 6 \cdot \sqrt{12} - \frac{1}{2}\sqrt{12}^3 = 0$$

Damit hat das maximale Rechteck die

Seiten:

$$L = 2a = 4$$

$$B = b = 2$$

und die Fläche

$$A = 8$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^5 - 8x^3 + 16x)$$

für $-2,5 \leq x \leq 2,5$ und $-3 \leq f(x) \leq 3$.

und untersuchen Sie es bzgl:

- a) Symmetrie
- b) Achsenschnittpunkte
- c) Ableitungen
- d) Extrempunkte
- e) Wendepunkte
- f) Stellen Sie für jede Wendetangente die Funktionsgleichung auf.

Bemerkungen:

b1) Da Sie jedes Teilergebnis dieser Aufgabe nachprüfen können, gibt es für jede Teilaufgabe dieser Aufgabe entweder die volle Punktzahl oder gar keinen Punkt.

b2) Jedes Ergebnis muss **exakt** berechnet werden. Näherungen werden nicht gewertet.

2) Beweisen Sie rein rechnerisch, (mit Hilfe der Limesbildung), dass sich für die 1. Ableitung der Funktion

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ die Funktion $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ergibt.

3) Wie müssen die Abmessungen einer zylindrischen Konservendose mit dem Volumen 1 dm^3 gewählt werden, damit der Blechverbrauch bei der Herstellung minimal wird?

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) An welcher x-Koordinate hat das Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{16}x^2$$

die Steigung 3 ?

2) Legen Sie an das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = \frac{1}{8}x^2$$

Tangenten parallel zur Gerade mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 1,5x$$

3) Legen Sie von $P(1 | -2)$ aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3$$

4) Wo sind die Steigungen der Schaubilder von f und g gleich groß ?

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$$

$$g(x) = -x^2 - 3x$$

5) Wo schneidet die Wendetangente des Schaubild der Funktion f die x-Achse ?

$$f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 10x$$

6) Beweisen Sie rein rechnerisch, (mit Hilfe der Limesbildung), dass sich für die 1. Ableitung der Funktion

$$h(x) = 2x^4 + 3$$

die Funktion

$$h'(x) = 8x^3$$

ergibt.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Schaubildern der beiden Funktionen:

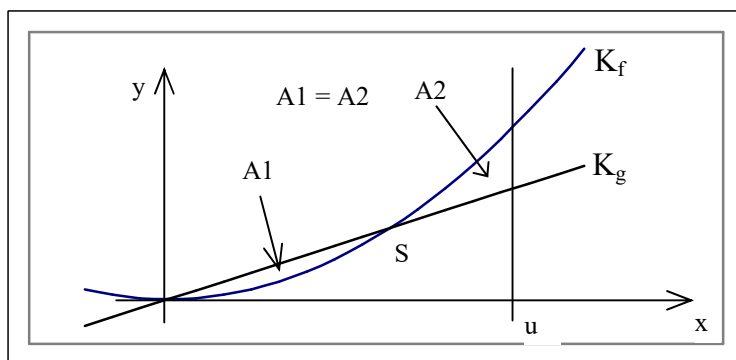
$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = x$$

und den Geraden mit den Gleichungen: $x = -1$ und $x = 1$ 2) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den folgenden Funktionsgleichungen:

$$f(x) = 0,5 x^2$$

$$g(x) = 2x$$



Skizze:

Wie groß ist u ($u \neq 0$), so dass die Fläche $A1$ zwischen K_f und K_g links des Schnittpunkts S gleich groß ist wie die Fläche $A2$ zwischen K_f , K_g und der Geraden $x = u$ rechts des Schnittpunkts S

3) Bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$\int 4 \cdot e^{5x+6}$$

4) Beweisen Sie rein rechnerisch, (mit Hilfe der Limesbildung) die Ableitung von:

$$f(x) = e^{2x}$$

5) Wie groß muß u sein, damit die Fläche zwischen der x -Achse, dem Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = e^{2x}$, der Geraden $x = 0$ und der Geraden $x = u$ den Wert $5/3$ hat ?

6) Gegeben ist die Funktionsgleichung der Funktion f mit ihrem Schaubild K_f

$$f(x) = e^{2x}$$

a) Von $(0|0)$ aus wird die Tangente an das Schaubild der Funktion f gelegt. Bestimmen Sie den Berührungspunkt B rechnerisch.

b) Machen Sie das gleiche für

$$f(x) = e^{kx} \quad \text{wobei } k \text{ eine Konstante ist.}$$

Lösungen:

1)

$$x_s - x_s^3 = 0 \leftrightarrow x_s(1 - x_s^2) = 0 \leftrightarrow x_{s1} = 0, \quad x_{s2} = -1, \quad x_{s3} = 1$$

$$A = 2 \cdot \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right) = \frac{1}{2}; \text{ also : } A = \frac{1}{2}$$

2)

$$\int_0^u \left(\frac{1}{2} x^2 - 2x \right) dx = 0$$

$$\left[\frac{x^3}{6} - x^2 \right]_0^u = 0$$

$$\frac{u^3}{6} - u^2 = 0$$

$$u^3 - 6u^2 = 0$$

$$u^2(u - 6) = 0$$

$$u = 6, \text{ da } u \neq 0$$

2. Möglichkeit:

$$\frac{1}{2} x_s^2 = 2x_s \leftrightarrow x_s^2 - 4x_s = 0 \leftrightarrow x_s(x_s - 4) = 0 \leftrightarrow x_{s1} = 0, \quad x_{s2} = 4$$

$$\int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2} x^2 \right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

$$\int_4^u \left(\frac{1}{2} x^2 - 2x \right) dx = \frac{16}{3} \leftrightarrow \left[\frac{x^3}{6} - x^2 \right]_4^u = \frac{16}{3}$$

$$u^3 - 6u^2 - \left(\frac{4^3}{6} - 4^2 \right) = \frac{16}{3} \leftrightarrow u^2(u - 6) = 0 \leftrightarrow u_1 = 0, u_2 = 6,$$

$$\text{also } u = 6, \text{ da } u \neq 0$$

5)

$$\int_0^u e^{2x} dx = \frac{5}{3}$$

$$\left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^u = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{2} e^{2u} - \frac{1}{2} = \frac{5}{3}$$

$$e^{2u} - 1 = 10/3$$

$$e^{2u} = 13/3$$

$$2u = \ln(13/3)$$

$$u = \frac{\ln 13 - \ln 3}{2}$$

3)

$$\int 4 \cdot e^{5x+6} dx = \int 4 \cdot e^6 \cdot e^{5x} dx = 4 \cdot e^6 \cdot \int e^{5x} dx = 4 \cdot e^6 \cdot \frac{1}{5} \cdot e^{5x} + C$$

$$= 0,8 \cdot e^6 \cdot e^{5x} + C$$

4)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{2(x_0 + \Delta x)} - e^{2x_0}}{\Delta x} = \frac{e^{2x_0 + 2\Delta x} - e^{2x_0}}{\Delta x} = \frac{e^{2x_0} \cdot e^{2\Delta x} - e^{2x_0}}{\Delta x} = \frac{e^{2x_0} (e^{2\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{2x_0} (e^{2\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 2e^{2x_0}$$

$$\text{Damit : } f'(x) = 2e^{2x}$$

6)

a)

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$$

$$t(x) = mx$$

$B(x_B | y_B)$ ist der Berührungspunkt. Für ihn gilt :

$$f(x_B) = e^{2x_B} = mx_B \quad (1)$$

$$f'(x_B) = 2e^{2x_B} = m \quad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt :

$$e^{2x_B} = 2e^{2x_B} \cdot x_B$$

$$x_B = 1/2, \quad y_B = e$$

$$b) f(x) = e^{kx}$$

$$f'(x) = ke^{kx}$$

$$t(x) = mx$$

$B(x_B | y_B)$ ist der Berührungspunkt. Für ihn gilt :

$$f(x_B) = e^{kx_B} = mx_B \quad (1)$$

$$f'(x_B) = ke^{kx_B} = m \quad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt :

$$e^{kx_B} = ke^{kx_B} \cdot x_B$$

$$x_B = 1/k, \quad y_B = e$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) Das Schaubild der Funktionsgleichung

$$f(x) = c \cdot a^x \quad a > 0, c \neq 0$$

geht durch die Punkte $P(0 \mid 4)$ und $Q(2 \mid 1)$.

Wie groß ist a und c ?

2) Ein in y-Richtung verschobenes Schaubild der Funktion

$$f(x) = e^{2x}$$

bildet mit den Geraden mit den Gleichungen

$x = 0$ und $x = 1$ und der x-Achse eine Fläche mit dem Flächeninhalt $0,5$

Wie groß ist die Verschiebung in y-Richtung ?

3) Gibt es ein negatives a , für das die Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = e^x$, den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = 0$ und der x-Achse den Flächeninhalt 1 hat ?

Begründen Sie rechnerisch.

4) Beweisen Sie rein rechnerisch, (mit Hilfe der Limesbildung) die Ableitung von:

$$f(x) = e^{3x} + 2x$$

5) Gegeben ist eine Ausgangsmenge von 1 Kg des radioaktiven Elements Jod-131, das eine Halbwertszeit von $8,1$ Tagen hat.

a) Wieviel Prozent der Ausgangsmenge sind nach 30 Tagen zerfallen ?

b) Wieviel Prozent der jeweils noch vorhandenen Menge zerfällt nach jedem Tag ?

c) Nach wieviel Tagen sind nur noch ein Promille der Ausgangsmenge vorhanden ?

d) Wieviel Prozent der Ausgangsmenge zerfallen insgesamt (je einschließlich) zwischen dem dritten und dem fünften Tag ?

Lösungen:

1)

$$P(0 | 4) \in K_f:$$

$$4 = c \cdot a^0$$

$$c = 4$$

$$Q(2 | 1) \in K_f:$$

$$1 = c \cdot a^2$$

$$a^2 = 0,25$$

$$a = 0,5$$

2)

$$\int_0^1 (e^{2x} + c) dx = 0,5$$

$$[0,5e^{2x} + cx]_0^1 = 0,5$$

$$0,5e^2 + c - 0,5 = 0,5$$

$$c = 1 - 0,5e^2$$

3)

$$\int_a^0 e^x = 1$$

$$[e^x]_a^0 = 1$$

$$1 - e^a = 1$$

$$e^a = 0$$

Keine Lösung für a

4)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{3(x_0 + \Delta x)} + 2(x_0 + \Delta x) - (e^{3x_0} + 2x_0)}{\Delta x} = \frac{e^{3x_0} \cdot e^{3\Delta x} + 2x_0 + 2\Delta x - e^{3x_0} - 2x_0}{\Delta x} =$$

$$\frac{e^{3x_0}(e^{3\Delta x} - 1) + 2\Delta x}{\Delta x} = \frac{e^{3x_0}(e^{3\Delta x} - 1)}{\Delta x} + 2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{3x_0}(e^{3\Delta x} - 1)}{\Delta x} + 2 = 3e^{3x_0} + 2$$

$$\text{Damit: } f'(x) = 3e^{3x} + 2$$

5)

Die Bestimmung des Zerfallsgesetzes:

$$m(t) = m_0 \cdot q^t$$

Die Halbwertszeit sei H:

$$m(8,1) = m_0 \cdot q^{8,1} = 0,5m_0$$

$$q^{8,1} = 0,5$$

$$q = 0,5^{1/8,1}$$

$$a) \quad m(30) = m_0 \cdot (0,5^{1/8,1})^{30} = m_0 \cdot 0,5^{30/8,1} = 0,076749m_0$$

$$b) \quad m(1) = m_0 \cdot 0,5^{1/8,1} = 0,917985m_0$$

c)

$$0,001m_0 = m_0 \cdot (0,5^{1/8,1})^x$$

$$(0,5^{1/8,1})^x = 0,001$$

$$x = \log_{0,5^{1/8,1}} 0,001$$

$$x = \frac{\ln 0,001}{\ln 0,5^{1/8,1}} = \frac{\ln 0,001}{1/8,1 \cdot \ln 0,5} = \frac{8,1 \cdot \ln 0,001}{\ln 0,5} = 80,722852$$

d)

$$d = m(4) - m(7)$$

$$m(4) = m_0 \cdot (0,5^{1/8,1})^4 = m_0 \cdot 0,5^{4/8,1}$$

$$m(7) = m_0 \cdot (0,5^{1/8,1})^7$$

$$d = m_0 \cdot 0,5^{4/8,1} - m_0 \cdot 0,5^{7/8,1} = m_0 \cdot (0,5^{4/8,1} - 0,5^{7/8,1})$$

$$d \approx 0,160786$$

Klassenarbeitsersatz:

Erstellen Sie mit dem Textverarbeitungsprogramm "Winword" eine Klassenarbeit (5 Aufgaben) aus dem Bereich des in der Schule durchgenommenen Schulstoffs. Speichern Sie diese Klassenarbeit einschliesslich der Lösung in einer (nicht mehreren) Datei ab, in der Ihr Name vorkommt. Zusätzlich soll Ihr Name noch in der Klassenarbeit vorkommen.

- Die Aufgaben sollen originell sein (nicht aus einem Lehrbuch abgeschrieben).
- Erstellen Sie die Musterlösungen mit einem Textverarbeitungsprogramm und dem Formeleditor.
- Falls eine Aufgabe abgeschrieben wurde, oder mehrere Aufgaben doppelt vorkommen, wird jeweils die gesamte Klassenarbeit nicht bewertet.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Die Grundmenge G bei den folgenden Gleichungen ist: $G = \mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen.
Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L folgender Gleichungen:
Machen Sie bei jeder Aufgabe - falls die Lösungsmenge nicht leer bzw. nicht unendlich groß ist - die Probe.

$$1) \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7$$

$$2) \frac{x}{2} - \frac{x}{5} = 6$$

$$3) \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1}$$

$$4) \frac{x-3}{x} + \frac{2x}{3} = 1$$

$$5) (2x-3)^2 = (x-6)^2 + 21$$

$$6) (x-4)^2 = 25 - 8x$$

$$7) x^2 - 4a^2 = 0$$

$$8) x^2 - 8x + 11 = 0$$

$$9) (3x+1)^2 = 6x+37$$

$$10) \frac{2x}{x-4} + \frac{3x}{x+4} = \frac{4(x^2 - x + 4)}{x^2 - 16}$$

$$11) \frac{3x^2 + 25}{x^2 - 25} + \frac{5-x}{5+x} = \frac{2x}{x-5}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaue Ergebnisse (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Mit genauen Werten der Zwischenergebnisse muß bis zum Endergebnis weitergerechnet werden. Das Endergebnis kann dann zusätzlich gerundet werden (mit dem Zeichen \approx)
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkungen:

Überprüfen Sie bitte Ihre gerechneten Ergebnisse mit der Zeichnung.**AUFGABEN**

1) Es sind folgende Funktionsgleichungen f , h , mit den zugehörigen Schaubildern K_f und K_h gegeben:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$h(x) = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

- a) Berechnen Sie den Scheitel von K_f
- b) Berechnen Sie den Scheitel von K_h
- c) Zeichnen Sie K_f , K_h im x -Intervall $[-5,3]$, x -Achse und y -Achse: $1LE = 1\text{ cm}$.
- d) Berechnen Sie alle Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse
- e) Berechnen Sie alle Schnittpunkte von K_f mit der y -Achse
- f) Berechnen Sie alle Schnittpunkte von K_h mit der y -Achse
- g) Berechnen Sie alle Schnittpunkte von K_f mit K_h
- h) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden K_{g1} , die durch die Schnittpunkte von K_f mit K_h geht.
- i) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden K_{g2} , die senkrecht zu der Geraden K_{g1} ist und die gleichzeitig durch den Schnittpunkt der x -Achse mit der y -Achse geht.

2) Der Scheitel der Normalparabel wird vom Ursprung aus in positive x -Richtung und positive y -Richtung um den gleichen Wert so verschoben, dass die Parabel den Punkt $P(0|6)$ schneidet.

Berechnen Sie, um welchen Wert die Normalparabel verschoben wurde.

Lösungen

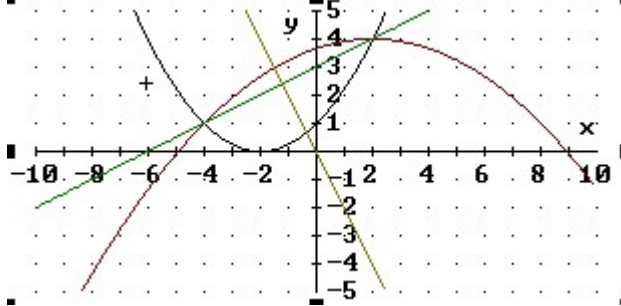
1a)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{4}(x+2)^2, \text{ also } \underline{\underline{S_{K_f}(-2|0)}}$$

b)

$$h(x) = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{11}{3} = -\frac{1}{12}(x^2 - 4x - 44) = -\frac{1}{12}(x^2 - 4x + 4 - 4 - 44) = -\frac{1}{12}((x-2)^2 - 48) = -\frac{1}{12}(x-2)^2 + 4, \text{ also } \underline{\underline{S_{K_h}(2|4)}}$$

c)



d)

$$S(x_s|0) \in K_f$$

$$\frac{1}{4}x_s^2 + x_s + 1 = 0 \Leftrightarrow x_s^2 + 4x_s + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_s + 2)^2 = 0$$

$$\underline{\underline{S_1(-2|0)}}$$

e)

$$S(0|y_s) \in K_f$$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{4}0^2 + 0 + 1 = 1, \text{ also } \underline{\underline{S_2(0|1)}}$$

f)

$$S(0|y_s) \in K_h$$

$$y_s = h(0) = \frac{1}{12}0^2 + \frac{1}{3}0 + \frac{11}{3} = \frac{11}{3}, \text{ also } \underline{\underline{S_3(0|\frac{11}{3})}}$$

g)

$$S(x_s|y_s) \in K_f \wedge S(x_s|y_s) \in K_h$$

$$\frac{1}{4}x_s^2 + x_s + 1 = -\frac{1}{12}x_s^2 + \frac{1}{3}x_s + \frac{11}{3} \Leftrightarrow 3x_s^2 + 12x_s + 12 = -x_s^2 + 4x_s + 44 \Leftrightarrow$$

$$x_s^2 + 2x_s - 8 = 0$$

$$x_{S1} = -4, \quad x_{S2} = 2, \quad \text{also: } \underline{\underline{S_4(-4|1)}}, \quad \underline{\underline{S_5(2|4)}}$$

h)

$$\frac{y-1}{x-(-4)} = \frac{4-1}{2-(-4)} \Leftrightarrow \frac{y-1}{x+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{g_1(x) = \frac{1}{2}x + 3}}$$

i)

$$K_{g2} \perp K_{g1}: m_{g2} = -2, \text{ also: } g_2(x) = -2x + c.$$

$$\text{Da } O(0|0) \in K_{g2} \text{ gilt (Punktprobe): } 0 = -2 \cdot 0 + c, \text{ also: } c = 0, \text{ also: } \underline{\underline{g_2(x) = -2x}}$$

2)

$$\text{Die Funktionsgleichung der Parabel lautet: } p(x) = (x-v)^2 + v$$

$$\text{Da } S(0|y_s) \in K_p \text{ gilt (Punktprobe): } 6 = (0-v)^2 + v \Leftrightarrow v^2 + v - 6 = 0$$

$$\text{also: } v_1 = -3, \quad v_2 = 2. \text{ Da } v > 0 \text{ sein muss: } \underline{\underline{p(x) = (x-2)^2 + 2}}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaue Ergebnisse (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Mit genauen Werten der Zwischenergebnisse muß bis zum Endergebnis weitergerechnet werden. Das Endergebnis kann dann zusätzlich gerundet werden (mit dem Zeichen \approx)
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Berechnen Sie rein rechnerisch, (mit Hilfe der Limesbildung) die Ableitung der Funktion $h(x) = 2x^3 + 4x + 5$

2) Berechnen Sie (mit Hilfe der Ableitung) den Scheitel der Parabel K_p mit der Funktionsgleichung:

$$p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2x - 20$$

3) An welchen Punkten hat die Parabel K_f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

die Steigung 2 ?

4) Gegeben sind die Schaubilder der Kurven K_p und K_q der Parabeln mit den folgenden Funktionsgleichungen:

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$q(x) = 2x^2 + 6x - 4$$

Zeigen Sie (mit Hilfe der Ableitung), dass es keine Punkt $P \in K_p$ und $Q \in K_q$ gibt, die die gleiche Steigung und die gleiche x-Koordinate haben.

4) Zeigen Sie (mit Hilfe der Ableitung), dass die Schaubilder der Kurven K_p und K_q der Parabeln mit den folgenden Funktionsgleichungen an keiner Stelle der x-Achse die gleiche Steigung haben:

5) Das Schaubild K_p hat die Funktionsgleichung:

$$p(x) = \frac{1}{3}x^2 + x + 5$$

An welchem Punkt P des Schaubilds K_p ist der Wert der Steigung so groß wie die x-Koordinate des Punktes P ?

Lösungen

1)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2(x_0 + \Delta x)^3 + 4(x_0 + \Delta x) + 5 - (2x_0^3 + 4x_0 + 5)}{\Delta x} = \\&= \frac{2(x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) + 4x_0 + 4\Delta x + 5 - 2x_0^3 - 4x_0 - 5}{\Delta x} = \\&= \frac{2x_0^3 + 6x_0^2\Delta x + 6x_0(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 + 4x_0 + 4\Delta x + 5 - 2x_0^3 - 4x_0 - 5}{\Delta x} = \\&= \frac{6x_0^2\Delta x + 6x_0(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 + 4\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 4)}{\Delta x} = \\&= 6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 4, \quad \text{da } \Delta x \neq 0\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 4 = 6x_0^2 + 4$$

x_0 ist beliebig, also gilt für alle x :

$$\underline{\underline{h'(x) = 6x^2 + 4}}$$

2)

$$p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2x - 20$$

$$p'(x) = -\frac{1}{4}x + 2$$

Für den Scheitel $S(x_s | y_s)$ gilt $p'(x_s) = 0$, also:

$$-\frac{1}{4}x_s + 2 = 0, \quad \text{also: } x_s = 8$$

$$y_s = p(x_s) = p(8) = -12, \quad \text{also:}$$

$$\underline{\underline{S(8 | -12)}}$$

3)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

$$f'(x) = x - 2$$

Im Punkt $P(x_p | y_p)$ gelte $f'(x_p) = 2$, also:

$$x_p - 2 = 2, \quad \text{also: } x_p = 4$$

$$y_p = f(x_p) = f(4) = 5, \quad \text{also:}$$

$$\underline{\underline{P(4 | 5)}}$$

4)

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 5, \quad p'(x) = 4x - 3$$

$$q(x) = 2x^2 + 6x - 4, \quad q'(x) = 4x + 6$$

Angenommen, es existiert ein x_p mit:

$$p'(x_p) = q'(x_p) \text{ dann müsste gelten:}$$

$$4x_p - 3 = 4x_p + 6,$$

$$-3 = 6. \text{ Das ist falsch. Deshalb:}$$

An keiner Stelle der x -Achse sind die

Steigungen der Schaubilder von p und q gleich gross.

5)

$$p(x) = \frac{1}{3}x^2 + x + 5$$

$$p'(x) = \frac{2}{3}x + 1$$

Im Punkt $P(x_p | y_p)$ gelte $f'(x_p) = x_p$, also:

$$\frac{2}{3}x_p + 1 = x_p, \quad \text{also: } x_p = 3$$

$$y_p = p(x_p) = p(3) = 11, \quad \text{also:}$$

$$\underline{\underline{P(3 | 11)}}$$

KLAUSUR 3 Mathematik 1 2BK11 Nachtermin 1 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaue Ergebnisse (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Mit genauen Werten der Zwischenergebnisse muß bis zum Endergebnis weitergerechnet werden. Das Endergebnis kann dann zusätzlich gerundet werden (mit dem Zeichen \approx)
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1)

Berechnen Sie rein rechnerisch, (mit Hilfe der Limesbildung) die Ableitung der Funktion

$$h(x) = ax^4 + bx^2 + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ (reelle Zahlen)}$$

2)

Die Grundmenge G bei der folgenden Gleichungen ist: $G = \mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen.
Bestimmen Sie dazu die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L .

$$6x^4 + 6x^3 - 42x^2 - 6x + 36 = 0$$

3)

Warum gibt es auf einer Parabel 2. Ordnung keine 2 Punkte mit gleicher Steigung ?

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaue Ergebnisse (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Mit genauen Werten der Zwischenergebnisse muß bis zum Endergebnis weitergerechnet werden. Das Endergebnis kann dann zusätzlich gerundet werden (mit dem Zeichen \approx)
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

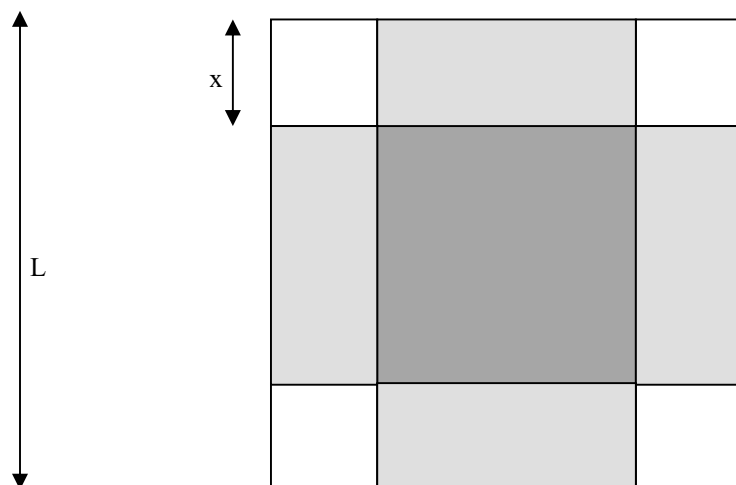
1) Beweisen Sie rein rechnerisch, (mit Hilfe der Limesbildung) die 1. Ableitung der Funktion $h(x) = 2e^x + 3$

2) Welche Ursprungsgerade berührt an welchem Punkt das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$h(x) = 2e^x$$

3) Das Schaubild einer bzgl. des Ursprungs $O(0 | 0)$ punktsymmetrischen ganzrationalen Funktion 5. Grades hat am Punkt $P(1 | 0)$ die Steigung 8 und geht durch den Punkt $Q(2 | 42)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

4) Aus einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge $L = 10$ cm soll eine oben offene Schachtel geformt werden. Dazu sollen an den Ecken quadratische Segmente der Länge x entfernt werden und die so entstehenden Seitenwände hochgeklappt werden. Je nach Größe der entfernten Segmente entstehen Schachteln mit unterschiedlicher Form und Volumen. Wie ist x zu wählen, damit das Volumen der Schachtel am größten wird ?



Lösungen:

1)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2e^{x_0 + \Delta x} + 3 - (2e^{x_0} + 3)}{\Delta x} = \frac{2e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} + 3 - 2e^{x_0} - 3}{\Delta x} = \frac{2e^{x_0} \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2e^{x_0} \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 2e^{x_0}$$

x_0 ist beliebig, also gilt für alle x :

$$\underline{\underline{h'(x) = 2e^x}}$$

2)

Die Funktionsgleichung der Ursprungsgerade lautet:

$$g(x) = mx$$

Für die Ableitungen gilt:

$$h(x) = 2e^x \qquad g(x) = mx$$

$$h'(x) = 2e^x \qquad g'(x) = m$$

Der Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

a) In $B(x_B, y_B)$ gilt:

$$h(x_B) = g(x_B), \text{ also:}$$

$$2e^{x_B} = m x_B \qquad (G1)$$

Da $e^{x_B} \neq 0$, ist $m \neq 0$ und $x_B \neq 0$

b) In $B(x_B, y_B)$ gilt:

$$h'(x_B) = g'(x_B), \text{ also:}$$

$$2e^{x_B} = m \qquad (G2)$$

aus (G1) folgt:

$$m = 2 \frac{e^{x_B}}{x_B}$$

also:

$$2e^{x_B} = 2 \frac{e^{x_B}}{x_B}$$

damit:

$$x_B = 1 \text{ und } y_B = e^{x_B} = e \text{ und } m = 2e^{x_B} = 2e^1 = 2e$$

$$\text{also: } \underline{B(1 | e)} \text{ und } \underline{\underline{m = 2e}}$$

3)

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$

a) $P(1 | 0) \in K_f$:

$$0 = a + b + c \qquad (G1)$$

b) $f'(1) = 8$:

$$8 = 5a + 3b + c \qquad (G2)$$

c) $Q(2 | 42) \in K_f$:

$$42 = a \cdot 2^5 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2 \implies 42 = 32a + 8b + 2c \quad (G3)$$

also zusammengefasst:

$$0 = a + b + c \qquad (G1)$$

$$8 = 5a + 3b + c \qquad (G2)$$

$$42 = 32a + 8b + 2c \quad (\text{G3})$$

damit:

$a = 1, b = 2, c = -3$, also:

$$\underline{\underline{f(x) = x^5 + 2x^3 - 3x}}$$

4)

Zielfunktion:

$$V(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$$

Nebenbedingungen:

$$y = L - 2x \quad L > 0$$

$$z = L - 2x$$

Reduktion auf eine Variable:

$$V(x) = x \cdot (L - 2x) \cdot (L - 2x)$$

$$= x \cdot (L - 2x)^2$$

$$= x \cdot (L^2 - 4Lx + 4x^2) = L^2x - 4Lx^2 + 4x^3$$

$$V'(x) = L^2 - 8Lx + 12x^2$$

$$V''(x) = -8L + 24x$$

Definitionsbereich:

$$D = [0; L/2]$$

Lokale Extrema:

$E(x_e | V_e)$ seien die lokalen Extrema. Dann gilt:

$$V(x_e) = 0 = L^2 - 8Lx_e + 12x_e^2$$

also:

$$0 = L^2 - 8Lx_e + 12x_e^2$$

$$x_{e1/2} = \frac{8L \pm \sqrt{64L^2 - 48L^2}}{24} = \frac{8L \pm \sqrt{16L^2}}{24} = \frac{8L \pm 4L}{24} \implies x_{e1} = \frac{L}{2}, \quad x_{e2} = \frac{L}{6}$$

$$V''(L/2) = -8L + 24 \cdot L/2 = 4L$$

$$V''(L/6) = -8L + 24 \cdot L/6 = -4L$$

Da $L > 0$ gilt:

$$V''(L/2) = 4L > 0, \text{ also } x_{e1} = L/2 \text{ ist lokales Minimum}$$

$$V''(L/6) = -4L < 0, \text{ also } x_{e2} = L/6 \text{ ist lokales Maximum.}$$

$$V(L/6) = L/6 \cdot (L - 2 \cdot L/6)^2 = 2/27 \cdot L^3$$

Untersuchung der Randwerte:

$$V(0) = 0 \cdot (L - 2 \cdot 0) \cdot (L - 2 \cdot 0) = 0$$

$$V(L/2) = L/2 \cdot (L - 2 \cdot L/2) \cdot (L - 2 \cdot L/2) = 0$$

also:

$$\underline{\underline{x_{e2} = L/6}}$$

ist globales Maximum

KLAUSUR 4 Mathematik 1 2BK11 Nachtermin 1 Zeit: 60 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaue Ergebnisse (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Mit genauen Werten der Zwischenergebnisse muß bis zum Endergebnis weitergerechnet werden. Das Endergebnis kann dann zusätzlich gerundet werden (mit dem Zeichen \approx)
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) Welche Gerade durch den Punkt $P(0,5 \mid -1)$ berührt an welchem Punkt das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2$$

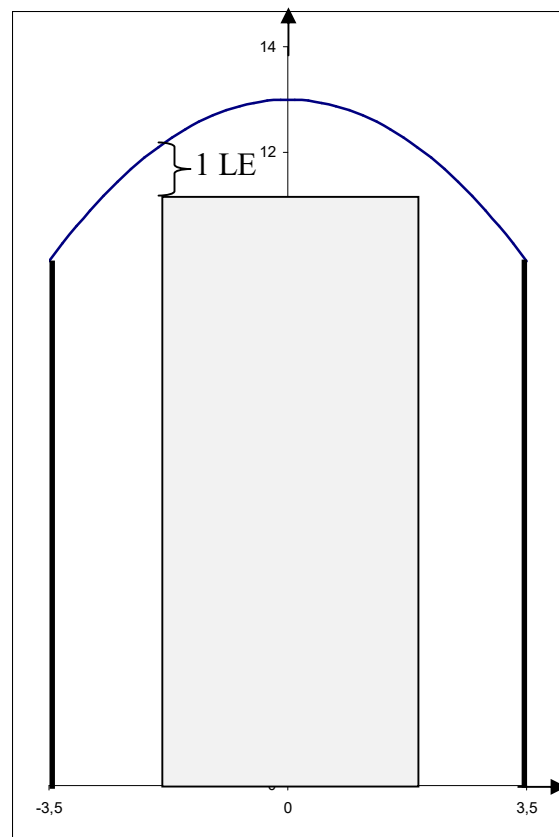
Zeichnen Sie das Schaubild

2)

Ein 7 LE breites und 13 LE hohes Tunnel wird durch einen Bogen, der die Form einer Parabel mit der folgenden Funktionsgleichung hat, begrenzt:

$$f(x) = 13 - \frac{1}{4}x^2$$

Die obere linke (und rechte) Ecke des rechteckigen Querschnitts eines LKWs, der durch den Tunnel fährt, darf sich maximal 1 LE unterhalb des oberen Tunnelbogens befinden (Anstoßgefahr!). Wie groß muß die Breite und die Länge des Querschnitts des LKWs sein, damit sein Querschnitt (und damit das Transportvolumen) maximal wird?



3) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung und hat dort die Steigung -2 . Sein Wendepunkt ist $W(2 \mid 0)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Lösungen

1) a) Die Funktionsgleichung der Tangente lautet:

$$g(x) = mx + b$$

Da $P(0,5 \mid -1) \in K_g$:

$$-1 = m \cdot 0,5 + b \rightarrow b = -1 - 0,5m$$

$$g(x) = mx - 1 - 0,5m$$

b) Für die Ableitungen gilt:

$$h(x) = \frac{1}{2} x^2 \qquad g(x) = mx - 1 - 0,5m$$

$$h'(x) = x \qquad g'(x) = m$$

c) Der Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

c1) In $B(x_B, y_B)$ gilt:

$h(x_B) = g(x_B)$, also:

$$\frac{1}{2} x_{xB}^2 = mx_{xB} - 1 - 0,5m \qquad (G1)$$

c1) In $B(x_B, y_B)$ gilt auch:

$h'(x_B) = g'(x_B)$, also:

$$x_B = m \qquad (G2)$$

(G2) in (G1) eingesetzt:

$$\frac{1}{2} x_{xB}^2 = x_{xB}^2 - 1 - 0,5x_{xB}$$

$$\frac{1}{2} x_{xB}^2 - 0,5x_{xB} - 1 = 0$$

$$x_{xB}^2 - x_{xB} - 2 = 0$$

damit:

$$x_{B1} = 2, \quad x_{B2} = -1$$

$$y_{B1} = \frac{1}{2} x_{B1}^2 = 2, \quad y_{B2} = \frac{1}{2} x_{B2}^2 = \frac{1}{2}$$

also:

$$x_{B1} = 2, \quad x_{B2} = -1$$

$$y_{B1} = 2, \quad y_{B2} = 1/2$$

$$B_1(2 \mid 2)$$

$$B_2(-1 \mid 0,5)$$

2)

Zielfunktion:

$$A(b, l) = 2bl$$

Nebenbedingung:

$$l = f(b) - 1 = 13 - \frac{1}{4} b^2 - 1 = 12 - \frac{1}{4} b^2$$

Reduktion auf 1 Variable:

$$A(b) = 2b \cdot (12 - \frac{1}{4} b^2) = 24b - \frac{1}{2} b^3$$

Ableitungen:

$$A'(b) = 24 - \frac{3}{2}b^2$$

$$A''(b) = -3b$$

Definitionsbereich:

$$D = [0 ; 3,5]$$

Lokale Extremwerte $E(b_e | A_e)$: $A'(b_e) = 0$

$$24 - \frac{3}{2}b_e^2 = 0 \Leftrightarrow b_e^2 = 16$$

$$b_{e1} = 4 \notin D$$

$$b_{e2} = -4 \notin D$$

Randwertuntersuchung:

$$A(3,5) = 24 \cdot 3,5 - \frac{1}{2} \cdot 3,5^3 = 62,5625$$

$$A(0) = 0$$

Ergebnis:

Die Fläche erreicht für $x_{b1} = 3,5$ mit $A(3,5) = 62,5625$ ihr globales (absolutes) Maximum.

3)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$a) O(0|0) \in K_f:$$

$$0 = d \quad (G11)$$

$$b) f'(0) = -2:$$

$$-2 = c \quad (G12)$$

$$c) W(2|0) \in K_f:$$

$$0 = 8a + 4b + 2c + d \quad (G13)$$

$$d) f''(2) = 0:$$

$$0 = 12a + 2b \quad (G14)$$

daraus folgt:

$$8a + 4b - 4 = 0 \quad (G21)$$

$$12a + 2b = 0 \quad (G22)$$

also:

$$4a + 2b = 2 \quad (G31)$$

$$6a + b = 0 \quad (G32)$$

also:

$$-8a = 2 \implies a = -1/4; \quad b = 1,5; \quad c = -2; \quad d = 0$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaue Ergebnisse (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Mit genauen Werten der Zwischenergebnisse muß bis zum Endergebnis weitergerechnet werden. Das Endergebnis kann dann zusätzlich gerundet werden (mit dem Zeichen \approx)
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

1) Wie heißt die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden, die das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$h(x) = e^x$$

berührt ?

Geben Sie den Berührpunkt an.

2) Der Spannungsverlauf beim Aufladen eines Kondensators ist:

$$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Lösen Sie nach t auf.

3) Nach 1000 Jahren ist noch ein Viertel der ursprünglichen Masse eines radioaktiven Materials vorhanden. Wie groß ist der Wachstumsfaktor ? (auf 7 Stellen gerundet angeben).

4) Von einer radioaktiven Substanz sind nach 12 Stunden noch 1280 mg, nach 18 Stunden noch 20 mg vorhanden. Wie lautet das Zerfallsgesetz ?

5) Nach welcher Zeit hat sich ein Kapital, das jährlich zu 10% verzinst wird (und dessen Zinsen auf der Bank gelassen werden) verdreifacht ?

6) Eine aus der Tiefkühltruhe genommene Brotkrume erwärme sich ungefähr nach der Funktionsgleichung: $y(x) = r \cdot (1 - e^{s \cdot x})$ Parameter $r = 24$, Parameter $s = -0,3$

Dabei ist y die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$ und x die Zeit in Minuten ab der Entnahme.

a) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion mit der obigen Funktionsgleichung.

b) Welcher Parameter in der Funktionsgleichung ändert sich wie (kleiner, grösser ?), wenn statt der Brotkrume eine Schweinehälfte - bei der gleichen Aussentemperatur wie bei a) - aus der gleichen Tiefkühltruhe entnommen wird ? Skizzieren Sie dazu ein Schaubild.

c) Welcher Parameter in der Funktionsgleichung ändert sich auf welchen Wert, wenn die Brotkrume aus der gleichen Tiefkühltruhe entnommen wird und die Außentemperatur 30°C ist ? Skizzieren Sie dazu ein Schaubild.

Bem: Alle Schaubilder in das **gleiche** Koordinatensystem einzeichnen !

Lösungen

1) siehe Skript

2)

$$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$U(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 - U(t)$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0 - U(t)}{U_0}$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{U_0 - U(t)}{U_0}\right)$$

$$t = -RC \ln\left(1 - \frac{U(t)}{U_0}\right)$$

3)

Allgemein gilt:

$$m(t) = m_0 \cdot q^t$$

Für die Masse nach 1000 Jahren gilt:

$$m(1000) = m_0 \cdot q^{1000} = \frac{1}{4} \cdot m_0$$

also:

$$q^{1000} = \frac{1}{4}$$

$$q = \sqrt[1000]{\frac{1}{4}} = 0,9986147$$

4)

Nach 11 h sind noch 1280 mg vorhanden, also:

$$m(12) = 1280 = m_0 \cdot q^{12}$$

$$(G1) \quad 1280 = m_0 \cdot q^{12}, \text{ also } m_0 = 1280 / q^{12}$$

Nach 18 h sind noch 20 mg vorhanden, also:

$$m(18) = 20 = m_0 \cdot q^{18}$$

$$(G2) \quad 20 = m_0 \cdot q^{18}, \text{ also } m_0 = 20 / q^{18}$$

(G1) und (G2) nach aufgelöst und gleichgesetzt

ergibt:

$$1280 / q^{12} = 20 / q^{18}$$

ergibt:

$$q^6 = 20 / 1280 = 1 / 64$$

$$q = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2} \text{ und } m_0 = 20 / 0,5^{18} = 10 \cdot 2^{19} \text{ mg}$$

Damit:

$$m(t) = 10 \cdot 2^{19} \cdot 0,5^t$$

5)

Für das Wachstumsgesetz gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$q = 1,1$$

also:

$$K_n = K_0 \cdot 1,1^n$$

Nach x Jahren hat sich das Kapital

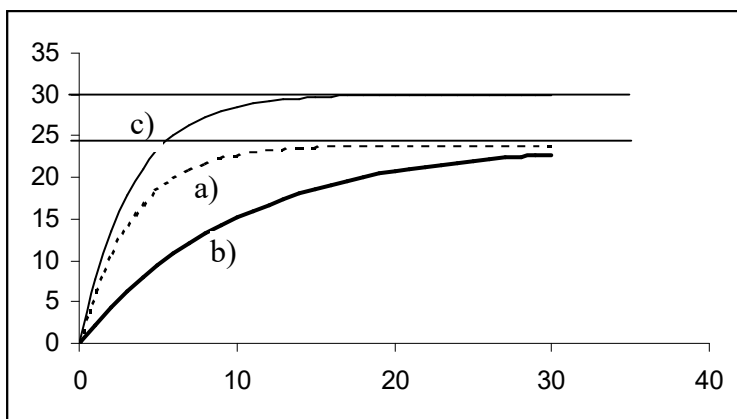
verdreifacht:

$$K_x = 3 K_0 = K_0 \cdot 1,1^x$$

$$3 = 1,1^x$$

$$x = \log_{1,1} 3 = \ln 3 / \ln 1,1 \approx 11,53$$

6)



b) s wird grösser (<0)

c) r = 30

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

1) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Schaubildern der beiden Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$$

$$h(x) = \sin(x)$$

und den Geraden mit den Gleichungen: $x = 0$ und $x = 2\pi$

2) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus (Nullen oberhalb und unterhalb einer Zahl erzeugen) die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems. Geben Sie die Lösungsmenge (in Mengenschreibweise !!) an.

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -7 \\ -x_1 & & & + & x_3 & & & = & 2 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & -11 \end{array}$$

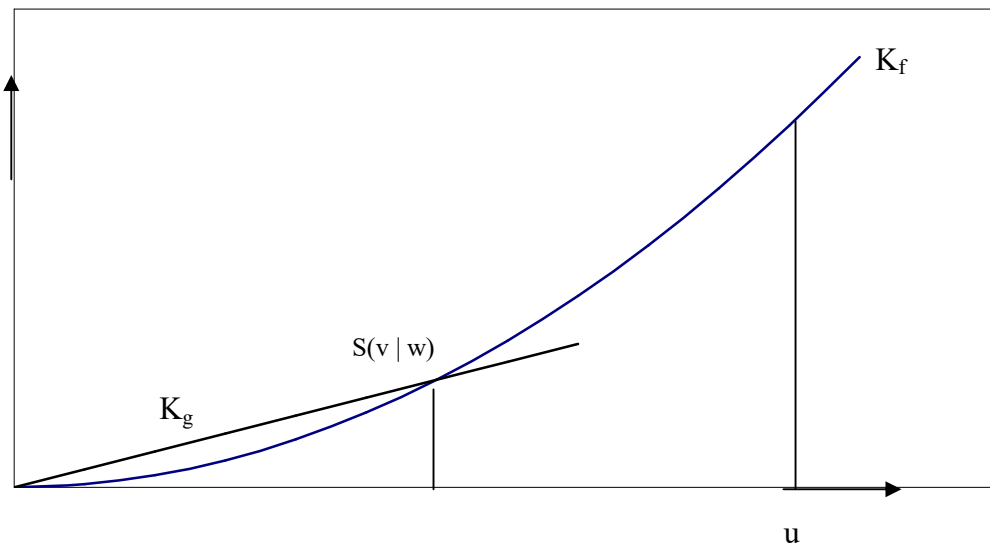
Nur die richtige Lösung wird bewertet.
Deshalb: Probe machen !!!

3) Gegeben ist die Funktionen f mit der folgenden Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0,5 x^2$$

Das Schaubild K_f der Funktion f , die x -Achse und die Gerade $x = u$ ($u > 0$) begrenzen eine Fläche von 72 Flächeneinheiten (FE). Die Ursprungsgerade K_g mit der Funktionsgleichung $g(x) = mx$ schneidet K_f in $S(v | w)$, wobei $v > 0$ ist.

Welchen Wert hat v , damit die Fläche zwischen K_f , der x -Achse und der Geraden $x = v$ so groß ist, wie zwischen der Geraden $x = v$, K_f , der x -Achse und der Geraden $x = u$?



Lösungen:

1)

$$A_1 = \int_0^{\pi} (\sin(x) - (\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}))dx = \int_0^{\pi} (\sin(x) - \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})dx = [-\cos(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{\pi}{2}x]_0^{\pi}$$

$$= -\cos(\pi) - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{2} - (-\cos(0) - 0 + 0) = -(-1) + \frac{\pi^2}{4} + 1 = 2 + \frac{\pi^2}{4}$$

$$A = 2 \cdot A_1 = 2 \cdot (2 + \frac{\pi^2}{4}) = 4 + \frac{\pi^2}{2}, \text{ also:}$$

$$\underline{\underline{A = 4 + \frac{\pi^2}{2}}}$$

2)

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b	Op	KS
1	-2	1	1	4	G1	5
0	2	-1	-2	-7	G2	-8
-1	0	1	0	2	G3	2
0	2	-1	-3	-11	G4	-13
1	-2	1	1	4	G5=G1	5
0	2	-1	-2	-7	G6=0*G1+G2	-8
0	-2	2	1	6	G7=G1+G3	7
0	2	-1	-3	-11	G8=0*G1+G4	-13
1	0	0	-1	-3	G9=G6+G5	-3
0	2	-1	-2	-7	G10=G6	-8
0	0	1	-1	-1	G11=G6+G7	-1
0	0	0	1	4	G12=G6-G8	5
1	0	0	-1	-3	G13=0*G11+G9	-3
0	2	0	-3	-8	G14=G11+G10	-9
0	0	1	-1	-1	G15=G11	-1
0	0	0	1	4	G16=0*G11+G12	5
1	0	0	0	1	G17=G16+G13	2
0	2	0	0	4	G18=3*G16+G14	6
0	0	1	0	3	G19=G16+G15	4
0	0	0	1	4	G20=G16	5
1	0	0	0	1	G21=G17	2
0	1	0	0	2	G22=G18/2	3
0	0	1	0	3	G23=G19	4
0	0	0	1	4	G24=G20	5

$$\underline{\underline{L = \{ (1; 2; 3; 4) \}}}$$

3)

$$\int_0^v \frac{1}{2}x^2 dx = 36 \Leftrightarrow [\frac{x^3}{6}]_0^v = 36 \Leftrightarrow \frac{v^3}{6} = 36 \Leftrightarrow v^3 = 6^3 \Leftrightarrow v = 6, \text{ also:}$$

$$\underline{\underline{v = 6}}$$

KLAUSUR 6 Mathematik 1 2BK11 Nachtermin 1 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben sind die Geraden mit den folgenden Funktionsgleichungen:

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$h(x) = x - 1$$

Die Fläche zwischen den obigen Geraden und der Geraden $x = u$ beträgt 15 FE.
Wie groß ist u ?

Bemerkung:

Benutzen Sie zur Lösung die entsprechenden Hilfsmittel der Integralrechnung
(Stichwort: Oberkurve - Unterkurve), ansonsten wird die Aufgabe mit 0 Punkte bewertet.

2) Bestimmen Sie rein **rechnerisch** (ohne anschauliche Argumentation) alle Hochpunkte, Tiefpunkte und Wendepunkte der Sinusfunktion.

3) Welche Ursprungsgerade berührt an welchem Punkt das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$h(x) = 2e^x$$

Lösungen:

1)

a) Schnittpunkt $S(x_s | y_s)$ der Geraden:

$$-\frac{1}{2}x_s + 2 = x_s - 1$$

$$1,5x_s = 3$$

$$x_s = 2$$

b) Fläche zwischen den Geraden:

$$\int_2^u (x - 1 - (-\frac{1}{2}x + 2))dx = 14$$

$$\int_2^u (x - 1 + \frac{1}{2}x - 2)dx = 15$$

$$\int_2^u (\frac{3}{2}x - 3)dx = 15$$

$$[\frac{3}{4}x^2 - 3x]_2^u = 15$$

$$\frac{3}{4}u^2 - 3u - 9 = 15$$

$$\frac{3}{4}u^2 - 3u - 24 = 0$$

$$3u^2 - 12u - 96 = 0$$

$$u_1 = -4$$

$$u_2 = 8$$

2) Sinusfunktion:

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

a) Hochpunkte $H(x_H | y_H)$: $f'(x_H) = 0$

$$\cos(x_H) = 0$$

$$x_H = (2k+1)/2 * \pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

aber:

$$f''((4k+1)/2 * \pi) = -\sin((4k+1)/2 * \pi) = -1 < 0$$

also:

$H((4k+1)/2 * \pi | 1)$ sind Hochpunkte

c) Wendepunkte $W(x_W | y_W)$: $f''(x_W) = 0$

$$-\sin(x_W) = 0$$

$$x_W = k * \pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

aber:

$$f'''(k * \pi) = -\cos(k * \pi) \neq 0$$

also:

$W(k * \pi | 0)$ sind Wendepunkte

b) Tiefpunkte $T(x_T | y_T)$: $f'(x_H) = 0$

$$\cos(x_H) = 0$$

$$x_H = (2k+1)/2 * \pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

aber:

$$f''((4k+3)/2 * \pi) = -\sin((4k+3)/2 * \pi) = 1 > 0$$

also:

$T((4k+3)/2 * \pi | -1)$ sind Tiefpunkte

3) Siehe Heft

KLAUSUR 6 Mathematik 1 2BK11 Nachtermin 2 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben sind die Funktionen mit den Funktionsgleichungen:

$$f(x) = k - \frac{x^2}{k}$$

$$h(x) = k^3 - kx^2$$

wobei k ein Parameter ist ($k > 0$ und $k \neq 1$).

a) Zeichnen Sie die Kurven K_f und K_h für $k = 2$

b) Berechnen Sie das oberhalb der x -Achse gelegene Flächenstück, das von beiden Kurven begrenzt wird.

c) Für welchen Wert von k ($0 < k < 1$) hat diese Fläche den grössten Inhalt ?
Wie groß ist dieser ?

Lösungen:

b)

$$K_f \cap K_g = S(x_s | y_s):$$

$$k - \frac{x_s^2}{k} = k^3 - kx_s^2$$

$$kx_s^2 - \frac{x_s^2}{k} = k^3 - k$$

$$k^2 x_s^2 - x_s^2 = k^4 - k^2$$

$$x_s^2 (k^2 - 1) = k^4 - k^2$$

$$x_s^2 = \frac{k^4 - k^2}{k^2 - 1} = \frac{k^2 (k^2 - 1)}{k^2 - 1} = k^2$$

$$x_{s1} = k$$

$$x_{s2} = -k$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-k}^k \left(k - \frac{x^2}{k} - (k^3 - kx^2) \right) dx = \int_{-k}^k \left(k - \frac{x^2}{k} - k^3 + kx^2 \right) dx = \int_{-k}^k \left(kx^2 - \frac{x^2}{k} + k - k^3 \right) dx = \\ &= \left[\frac{kx^3}{3} - \frac{x^3}{3k} + kx - k^3 x \right]_{-k}^k = \frac{kk^3}{3} - \frac{k^3}{3k} + kk - k^3 k - \left(\frac{k(-k)^3}{3} - \frac{(-k)^3}{3k} + k(-k) - k^3(-k) \right) = \\ &= \frac{k^4}{3} - \frac{k^2}{3} + k^2 - k^4 + \frac{k^4}{3} - \frac{k^2}{3} + k^2 - k^4 = \frac{2k^4}{3} - \frac{2k^2}{3} + 2k^2 - 2k^4 = \frac{4k^2}{3} - \frac{4k^4}{3} \end{aligned}$$

c)

$$A(k) = \frac{4k^2}{3} - \frac{4k^4}{3}$$

$$A'(k) = \frac{8k}{3} - \frac{16k^3}{3}$$

$$A''(k) = \frac{8}{3} - 16k^2$$

Extrempunkte $E(k_e | y_e): A'(k_e) = 0$

$$A'(k_e) = \frac{8k_e}{3} - \frac{16k_e^3}{3} = 0$$

$$8k_e - 16k_e^3 = 0 \quad |:8$$

$$k_e - 2k_e^3 = 0 \quad |:k_e \neq 0$$

$$1 - 2k_e^2 = 0$$

$$2k_e^2 = 1$$

$$k_e^2 = 0,5$$

$$k_{e1} = \sqrt{0,5} \quad k_{e2} = -\sqrt{0,5} \text{ (keine Lösung)}$$

$$A(\sqrt{0,5}) = \frac{4 \cdot 0,5}{3} - \frac{4 \cdot 0,25}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$A''(\sqrt{0,5}) = \frac{8}{3} - 16 \cdot 0,5 = \frac{8}{3} - 8 < 0$$

also ist $A(\sqrt{0,5})$ lokales Maximum

Ergebnis:

Für $k = \sqrt{0,5}$ hat die Fläche den grössten Inhalt ($=1/3$)