

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

I) Ordnen Sie den unten stehenden sprachlichen Gebilden jeweils eine der folgenden Eigenschaften zu:

mathematisch sinnlos, wahr, falsch, nicht allgemeingültige Aussageform,
allgemeingültige Aussageform

1) 1P
Mathematik und grün statt größer und immer mehr

2) 1P
Voraussetzung: x ist eine reelle Zahl
 $\neg x \vee x$

3) 1P
Mike Tyson ist Boxer \vee Tänzer

4) 1P
Voraussetzung: a, b, c, d sind reelle Zahlen größer 0
 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

5) 1P
Voraussetzung: x, y, z sind reelle Zahlen größer 0
 $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x+y}{z}$

6) 1P
 $4 = 4 \cdot 1 \wedge 5 = 1+2$

7) 2P
Voraussetzung: x, y, z sind reelle Zahlen
 $x < y \vee y < x$

8)

2P

Voraussetzung: x, y, z sind reelle Zahlen

$$\neg (x < y \wedge y < x)$$

9)

1P

$$\{2; 3; 7; 9\} \setminus \{3\} \subset \{2; 7; 9\}$$

II)

(9P)

"BKI1" ist die Menge aller Schüler dieser Klasse. "BKI1A" ist die Menge aller Schüler der Gruppe A dieser Klasse.

"BKI1B" ist die Menge aller Schüler der Gruppe B dieser Klasse. "MESK" ist die Menge aller Schüler dieser Schule. Bestimmen Sie:

1) $\text{"BKI1A"} \cup \text{"BKI1B"} =$

2) $\text{"BKI1A"} \cap \text{"BKI1B"} =$

3) $\text{"BKI1A"} \setminus \text{"BKI1B"} =$

4) $\text{"BKI1B"} \setminus \text{"BKI1A"} =$

5) $\text{"BKI1"} \setminus \text{"BKI1B"} =$

6) $\text{"BKI1"} \setminus \text{"BKI1A"} =$

7) $\text{"BKI1A"} \setminus \text{"BKI1"} =$

8) $\text{"BKI1B"} \setminus \text{"BKI1"} =$

9) $\text{"MESK"} \cap \text{"BKI1A"} =$

Lösungen:

I)

1)

Mathematik und gün statt größer und immer mehr

(mathematisch sinnlos)

2)

$$\neg x \vee x$$

(mathematisch sinnlos)

3)

Mike Tyson ist Boxer oder Tänzer

(mathematisch sinnlos)

4)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

(Aussageform)

5)

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x+y}{z}$$

(allgemeingültige Aussageform)

6)

$$4 = 4 \cdot 1 \wedge 5 = 1+2$$

(falsch)

7)

$$x < y \vee y < x$$

(Aussageform)

8)

$$\neg (x < y \wedge y < x)$$

(allgemeingültige Aussageform)

9)

$$\{2; 3; 7; 9\} \setminus \{3\} \subset \{2; 7; 9\}$$

(wahr)

II)

1) $"BKI1A" \cup "BKI1B" = "BKI1"$

2) $"BKI1A" \cap "BKI1B" = \emptyset$

3) $"BKI1A" \setminus "BKI1B" = "BKI1A"$

4) $"BKI1B" \setminus "BKI1A" = "BKI1B"$

5) $"BKI1" \setminus "BKI1B" = "BKI1A"$

6) $"BKI1" \setminus "BKI1A" = "BKI1B"$

7) $"BKI1A" \setminus "BKI1" = \emptyset$

8) $"BKI1B" \setminus "BKI1" = \emptyset$

9) $"MESK" \cap "BKI1A" = "BKI1A"$

*Name, Vorname:*Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN**I) 3P**

1) Geben Sie (falls es diese überhaupt gibt) diejenigen bimomischen Formeln an, die allgemeingültig sind.

II) 10P

2)

Bestimmen Sie die "größt mögliche" Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen (Grundmenge = \mathbb{R}):

3) $\frac{1}{x} = 0$

4) $3x = 3x$

5) $x^2 = -16$

6) $x = 2x$

7) $\frac{1}{0} = \frac{x}{x-5}$

II) 7P

gegeben sind die folgenden Mengen

$I = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

$J = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

$K = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 6\}$

$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Bestimmen Sie:

8) $I \cap J$

9) $I \cup J =$

10) $J \cap K =$

11) $J \cup K =$

12) $I \cup L =$

13) $I \setminus L =$

14) $L \setminus I =$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

I) Bestimmen Sie die Mengen (keine Venn – Diagramme) (4P)

1) gegeben: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

gesucht: $A \cup B$

2) gegeben: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

gesucht: $E \cap F$

II) Formen Sie die Terme so in **einfachere** Terme um, dass sich allgemeingültige Gleichungen ergeben (wie im Unterricht).

3) (3P)

$$(a+b)(4x-5y) - (a-b)(5x+3y)$$

4) (7P)

$$\frac{6b+2}{4y-8} + \frac{5b-3}{2y-4} - \frac{3b-1}{y-2}$$

5) (5P)

$$\frac{3x}{5(x-y)} \cdot \frac{20(x-y)}{21y}$$

6) (2P)

$$(-x-y)^2$$

7) (3P)

$$\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right) \cdot \frac{xy}{z}$$

III) Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

$$8) \frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \quad (3P)$$

$$9) \frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3} \quad (5P)$$

$$10) \frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \quad (5P)$$

$$11) \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \quad (7P)$$

$$12) \frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \quad (7P)$$

Lösungen

I)

(4P)

1) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

2) $E \cap F = \emptyset$

II)

3)

(3P)

$$\begin{aligned}(a+b)(4x-5y) - (a-b)(5x+3y) &= \\ 4ax - 5ay + 4bx - 5by - (5ax + 3ay - 5bx - 3by) &= \\ 4ax - 5ay + 4bx - 5by - 5ax - 3ay + 5bx + 3by &= \\ -ax - 8ay + 9bx - 2by\end{aligned}$$

4)

(7P)

$$\begin{aligned}\frac{6b+2}{4y-8} + \frac{5b-3}{2y-4} - \frac{3b-1}{y-2} &= \\ \frac{6b+2}{4y-8} + \frac{2(5b-3)}{2(2y-4)} - \frac{4(3b-1)}{4(y-2)} &= \\ \frac{6b+2}{4y-8} + \frac{2(5b-3)}{4y-8} - \frac{4(3b-1)}{4y-8} &= \\ \frac{6b+2+2(5b-3)-4(3b-1)}{4y-8} &= \\ \frac{6b+2+10b-6-12b+4}{4y-8} &= \\ \frac{4b}{4y-8} = \frac{4b}{4(y-2)} = \frac{b}{y-2}\end{aligned}$$

5)

(5P)

$$\begin{aligned}\frac{3x}{5(x-y)} \cdot \frac{20(x-y)}{21y} &= \\ \frac{3x \cdot 20(x-y)}{5(x-y) \cdot 21y} = \frac{3x \cdot 4(x-y)}{(x-y) \cdot 21y} &= \\ \frac{x \cdot 4(x-y)}{(x-y) \cdot 7y} = \frac{4x(x-y)}{7y(x-y)} &= \\ \frac{4x}{7y}\end{aligned}$$

6)

(2P)

$$\begin{aligned}(-x-y)^2 &= (-x+(-y))^2 = \\ (-x)^2 + 2(-x)(-y) + (-y)^2 &= \\ x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(-x-y)^2 &= (-(x+y))^2 = (x+y)^2 = \\ x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

7)

(3P)

$$\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right) \cdot \frac{xy}{z} =$$

$$\frac{axy}{xz} - \frac{bxy}{yz} =$$

$$\frac{ay}{z} - \frac{bx}{z} = \frac{ay - bx}{z}$$

III)

8) (3P)

$$\frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \quad | \cdot (2-x)(x-2)$$

$$D = R \setminus \{2\}$$

$$-3x + 6 = 6 - 3x$$

$$6 - 3x = 6 - 3x$$

$$L = D$$

9) (5P)

$$\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3}$$

$$D = R \setminus \{3\}$$

$$\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{-(x-3)}$$

$$\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{-(4-x)}{3-x} \quad | \cdot (3-x)$$

$$2-x-1(3-x) = -(4-x)$$

$$2-x-3+x = -4+x$$

$$-1 = x-4$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

10) (5P)

$$\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \quad | \cdot (x^2-16)$$

$$D = R \setminus \{4; -4\}$$

$$3(x-4) - 2(x+4) = 5x-20$$

$$3x-12-2x-8 = 5x-20$$

$$x-20 = 5x-20 \quad | \cdot +20 \quad | \cdot -5x$$

$$-4x = 0$$

$$L = \{0\}$$

11) (7P)

$$\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \quad | \cdot (x-1)(x+1)(x+2)$$

$$D = R \setminus \{-1; 1; -2\}$$

$$4(x-1)(x+1) - 1(x+1)(x+2) = 3(x-1)(x+2)$$

$$4(x^2-1) - 1(x^2+2x+x+2) = 3(x^2+2x-x-2)$$

$$4x^2-4-x^2-2x-x-2 = 3x^2+6x-3x-6$$

$$3x^2-6-3x = 3x^2+3x-6 \quad | -3x^2 \quad | +6 \quad | -3x$$

$$-6x = 0 \quad | :(-6)$$

$$x = 0$$

$$L = \{0\}$$

12) (7P)

$$\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \quad | \cdot 6(x-1)(x+1)$$

$$D = R \setminus \{1; -1\}$$

$$7(x-5)^2 = 2(5x-1)(x-1) - (3x-2)(x+1)$$

$$7(x^2-10x+25) = 2(5x^2-5x-x+1) - (3x^2+3x-2x-2)$$

$$7x^2-70x+175 = 10x^2-10x-2x+2-3x^2-3x+2x+2$$

$$7x^2-70x+175 = 7x^2-13x+4 \quad | -7x^2 \quad | +70x \quad | -4$$

$$171 = 57x \quad | :57$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

1) $\frac{2}{3x-4} - \frac{1}{20} = \frac{5}{6x-8}$ (4P)

2) $\frac{2}{x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{1}{x-1}$ (4P)

3) $\frac{2+x}{x-1} = \frac{3+2x}{x+1} - 1$ (4P)

4) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x+3} = x - 2$ (4P)

5) $\frac{-3x+6}{2x-4} + \frac{x}{x-2} = -\frac{7}{6}$ (4P)

6) $\frac{4}{x-1} + \frac{1}{5} = \frac{3}{1-x} + \frac{8}{5}$ (4P)

7) $x + \frac{2x}{x-1} = 0$ (4P)

8) $\frac{32}{8x+16} = \frac{5x}{2x+4}$ (4P)

9) $\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-2x}{1-x^2}$ (4P)

10) $\frac{5x-5}{x+1} + 2 = \frac{6x-3}{2x-1} + 4$ (4P)

11) $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-4}$ (4P)

12) $\frac{3-x}{x+1} - 4 = 0$ (4P)

13) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0$ (4P)

Lösungen:

$$L = \{-2\}$$

$$L = \{5/3\}$$

$$L = \{-2\}$$

$$L = \{\}$$

$$L = \{-1\}$$

$$L = \{6\}$$

$$L = \{0 ; -1\}$$

$$L = \{8/5\}$$

$$L = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$$

$$L = \{\}$$

$$L = \{1\}$$

$$L = \{-0,2\}$$

$$L = \{2/3\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

I) Formen Sie die Terme so in **einfachere** Terme um, dass sich allgemeingültige Gleichungen ergeben (wie im Unterricht).

$$1) \frac{1}{2a} - \frac{3}{4a} - \frac{a+b}{ab} = \quad (3P)$$

$$2) \frac{1}{k} - \frac{2}{x} + \frac{2k-x}{kx} = \quad (3P)$$

$$3) k+3 - \frac{k(k+3)}{k-3} = \quad (3P)$$

$$4) \frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} - \frac{6}{(2-x)^2} = \quad (3P)$$

$$5) \frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k} + \frac{2}{k^2-1} - 4 = \quad (3P)$$

$$6) \frac{\frac{x}{2}}{k} + \frac{3}{k} = \quad (3P)$$

$$7) \frac{\frac{k}{4} - \frac{k}{3}}{\frac{3k}{4} - \frac{k}{3}} = \quad (3P)$$

$$8) \frac{\frac{x}{k}}{2k} + \frac{4x}{k^2} = \quad (3P)$$

$$9) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k} + \frac{1}{k-1} = \quad (3P)$$

$$10) \frac{k+2 - \frac{k(k+2)}{k-1}}{2} = \quad (3P)$$

$$11) \frac{x}{x-1} : \frac{1}{x^2-x} = \quad (3P)$$

$$12) \frac{3x^2-3}{x^2+3x} - \frac{2x-2}{x+3} = \quad (3P)$$

$$13) \frac{ax^2+2x}{ax+2x^2} = \quad (3P)$$

$$14) \left(1 + \frac{k-1}{2}\right) : \left(k - \frac{k-1}{2}\right) = \quad (3P)$$

II) Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

$$15) \frac{2-x}{1-x} - x = 1 - x + \frac{1}{1-x} \quad (3P)$$

$$16) \frac{2x^2-3x+1}{x-2} = 2x+1 + \frac{3}{x-2} \quad (3P)$$

$$17) x^2 - x + 1 - \frac{3}{x+1} = \frac{x^3-2}{x+1} \quad (3P)$$

Lösungen:

$$1) \frac{1}{2a} - \frac{3}{4a} - \frac{a+b}{ab} = \frac{4a+5b}{4ab}$$

$$2) \frac{1}{k} - \frac{2}{x} + \frac{2k-x}{kx} = 0$$

$$3) k+3 - \frac{k(k+3)}{k-3} = \frac{-3(k+3)}{k-3}$$

$$4) \frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} - \frac{6}{(2-x)^2} = \frac{1}{x-2}$$

$$5) \frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k} + \frac{2}{k^2-1} - 4 = -4$$

$$6) \frac{\frac{x}{2}}{k} + \frac{3}{k} = \frac{x+6}{2k}$$

$$7) \frac{\frac{\frac{k}{4} - \frac{k}{3}}{3k} - \frac{k}{k}}{\frac{4}{4} - \frac{3}{3}} = -\frac{1}{5}$$

$$8) \frac{\frac{x}{k}}{2k} + \frac{4x}{k^2} = \frac{9x}{2k^2}$$

$$9) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k} + \frac{1}{k-1} = \frac{-1}{k-1}$$

$$10) \frac{k+2 - \frac{k(k+2)}{k-1}}{2} = -\frac{k+2}{2k-2}$$

$$11) \frac{x}{x-1} : \frac{1}{x^2-x} = x^2$$

$$12) \frac{3x^2-3}{x^2+3x} - \frac{2x-2}{x+3} = \frac{x-1}{x}$$

$$13) \frac{ax^2+2x}{ax+2x^2} = \frac{ax+2}{a+2x}$$

$$14) (1 + \frac{k-1}{2}) : (k - \frac{k-1}{2}) = 1$$

II) Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

$$15) \frac{2-x}{1-x} - x = 1 - x + \frac{1}{1-x} \quad L = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$16) \frac{2x^2-3x+1}{x-2} = 2x+1 + \frac{3}{x-2} \quad L = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$17) x^2 - x + 1 - \frac{3}{x+1} = \frac{x^3-2}{x+1} \quad L = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 7P
Geben Sie ein LGS an, dessen Lösungsmenge die leere Menge ist und das nicht in der Aufgabe 5) vorkommt

2) 7P
Geben Sie ein LGS (mit Lösungsmenge) an, das genau eine Lösung besitzt und das nicht in der Aufgabe 5) vorkommt

3) 7P
Geben Sie ein LGS (mit Lösungsmenge) an, das unendlich viele Lösungen besitzt und das nicht in der Aufgabe 5) vorkommt

4) 8P
Geben Sie ein LGS mit 2 Unbekannten an, dessen Lösungsmenge – anschaulich gesprochen – aus allen Punkten des 2-dimensionalen Koordinatensystems besteht.

5) 21P
Geben Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden LGS an (ohne Gaußschen Algorithmus, nur durch "ablesen"):

a)	b)	c)
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1)

3 8 6
0 0 7

$L = \{ \}$

2)

1 0 2
0 1 4

$L = \{ (2; 4) \}$

3)

1 2 3

$L = \{ (x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \}$

4)

0 0 0

5)

a)

1 5 6

b)

1 0 2 3
0 1 4 5

c)

2 0 1 7
3 1 0 8

a) $L = \{ (x_1; x_2) \mid x_1 = 6 - 5x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \}$

b) $L = \{ (x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2x_3 \wedge x_2 = 5 - 4x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$

c) $L = \{ (x_1; x_2) \mid x_3 = 7 - 2x_1 \wedge x_2 = 8 - 3x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \}$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 4P

Geben Sie die "maximal mögliche" Definitionsmenge D an. Bestimmen Sie den Wertebereich W . Die Zielmenge ist $Z = \mathbb{R}$

$$f(x) = -x^2$$

Zeichnen Sie die zugehörige Kurve im folgenden Bereich in das Koordinatensystem:

auf der x-Achse: $[-2; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\};$

auf der y-Achse: $[-4; 4] = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 4\};$

2) 4P

Gegeben ist die Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = x^2 + x + \pi$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen!!!):

a) $h(2x + 1)$

b) $h\left(\frac{1}{x}\right)$

3) 3P

Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an:

$$(2x-1)^2 \cdot (x+5) \cdot (x-4) = 0$$

4) 6P

Ziehen Sie auf allen Seiten der folgenden Gleichung die Wurzel und geben Sie dann die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an:

$$(x - 7)^2 = 121$$

5)

12P

Bestimmen Sie die Lösungsmenge durch quadratische Ergänzung:
(Keine Dezimalzahlen sondern Brüche verwenden).

$$3x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

6)

9P

Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichung:

$$\frac{3x^2 + 25}{x^2 - 25} + \frac{5 - x}{5 + x} = \frac{2x}{x - 5}$$

7)

12P

Gegeben ist die folgende quadratische Gleichung:

$$2x^2 + 12x + 14 = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge durch Verwenden "Ihrer" Lieblings-Mitternachtsformel. Die einzelnen Lösungen müssen maximal vereinfacht werden, wie z.B:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Keine Dezimalzahlen sondern Brüche verwenden.

b) Machen Sie die Probe (exakte Rechnung, nicht mit genäherten Werten).

Lösungen:

1)

4P

$$D = \mathbb{R}$$

$$W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$$

Zeichnung: Nach unten geöffnete Normalparabel

2)

4P

$$a) h(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 2x + 1 + \pi$$

$$b) h\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right) + \pi$$

3)

3P

$$(2x-1)^2 \cdot (x+5) \cdot (x-4) = 0 \iff 2x-1 = 0 \vee x+5 = 0 \vee x-4 = 0$$

$$L = \{0,5; -5; 4\}$$

4)

6P

$$(x - 7)^2 = 121$$

$$|x - 7| = 11$$

$$x - 7 = 11 \vee x - 7 = -11$$

$$x = 18 \vee x = -4$$

$$L = \{-4; 18\}$$

5)

12P

$$3x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{5}{6} = 0 \quad | + \frac{5}{6}$$

$$x^2 - \frac{7}{6}x = \frac{5}{6}$$

$$x^2 - \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{5}{6} + \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 = \frac{5}{6} + \frac{49}{144}$$

$$\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 = \frac{120}{144} + \frac{49}{144}$$

$$\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$$

$$\left|x - \frac{7}{12}\right| = \frac{13}{12}$$

$$x - \frac{7}{12} = \frac{13}{12} \vee x - \frac{7}{12} = -\frac{13}{12}$$

$$x = \frac{5}{3} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$L = \left\{\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}\right\}$$

6)

9P

$$\frac{3x^2+25}{x^2-25} + \frac{5-x}{5+x} = \frac{2x}{x-5} \mid \cdot HN = 2(x-5)(x+5)$$

$$D = R \setminus \{5; -5\}$$

$$3x^2 + 25 + (5-x)(x-5) = 2x(x+5)$$

$$3x^2 + 25 - (x-5)(x-5) = 2x^2 + 10x$$

$$3x^2 + 25 - (x^2 - 10x + 25) = 2x^2 + 10x$$

$$3x^2 + 25 - x^2 + 10x - 25 = 2x^2 + 10x$$

$$0 = 0$$

$$L = R \setminus \{5; -5\}$$

7)

12P

$$2x^2 + 12x + 14 = 0 \mid : 2$$

$$x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$D = R$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$$

6

$$L = \{-3 + \sqrt{2}; -3 - \sqrt{2}\}$$

P

oder:

$$D = R$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 2 \cdot 14}}{2 \cdot 2} = \frac{-12 \pm \sqrt{32}}{4} = \frac{-12 \pm \sqrt{2 \cdot 16}}{4} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{2}}{4} = -3 \pm \sqrt{2}$$

$$L = \{-3 + \sqrt{2}; -3 - \sqrt{2}\}$$

b1)

3P

$$(-3 + \sqrt{2})^2 + 6(-3 + \sqrt{2}) + 7 =$$

$$9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 - 18 + 6\sqrt{2} + 7 =$$

$$9 - 6\sqrt{2} + 2 - 18 + 6\sqrt{2} + 7 =$$

$$0$$

b2)

3P

$$(-3 - \sqrt{2})^2 + 6(-3 - \sqrt{2}) + 7 =$$

$$9 - 2 \cdot 3 \cdot -\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 - 18 - 6\sqrt{2} + 7 =$$

$$9 + 6\sqrt{2} + 2 - 18 - 6\sqrt{2} + 7 =$$

$$0$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN1) 20P

Ein Bauer will für genau 100 Euro Pferde, Kühe und Hennen kaufen (kein Rückgeld). Eine Henne kostet 0,25Euro, eine Kuh 1 Euro und ein Pferd 15 Euro. Da er nur einen kleinen Bauernhof besitzt, muss die Anzahl der Pferde, Kühe und Hennen zusammen 100 ergeben. Der Bauer muss außerdem von jeder Tierart mindestens ein Tier kaufen. Benutzen Sie den Algorithmus von Gauss.

Tipp:

Es sei:

Anzahl der Hennen: x_1 Anzahl der Kühe: x_2 Anzahl der Pferde: x_3 2) 12P

Lösen Sie durch quadratische Ergänzung:

a) $-\frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{15}x + \frac{7}{6} = 0$

b) $x^2 - 17x + \frac{355}{4} = 0$

3) 18P

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 5$$

Die einzelnen Lösungen müssen maximal vereinfacht werden, wie z.B:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Keine Dezimalzahlen sondern Brüche verwenden.

b) Machen Sie die Probe (exakte Rechnung, nicht mit genäherten Werten).

Keine Dezimalzahlen sondern Brüche verwenden.

Lösungen:

1)

Es sei:

Anzahl der Hennen: x_1

Anzahl der Kühe: x_2

Anzahl der Pferde: x_3

Dann gilt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100 \quad (2P)$$

$$0,25 x_1 + x_2 + 15 x_3 = 100 \quad (6P)$$

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	1	1	100	G1	103
0,25	1	15	100	G2	116,25
1	1	1	100	G3=G1	103
1	4	60	400	G4=4G2	465
1	1	1	100	G5=G3	103
0	-3	-59	-300	G6=G3-G4	-362
3	0	-56	0	G7=3G6+G7	-53
0	-3	-59	-300	G8=G6	-362
1	0	-56/3	0	G9 =G7/3	-53
0	1	59/3	100	G10=G6/-3	-362

Es gilt:

$$x_1 = 56/3 \cdot x_3$$

$$x_2 = 100 - 59/3 \cdot x_3$$

damit: (6P)

$$L = \{ (x_1; x_2; x_3) \mid x_1=56/3 \cdot x_3 \wedge x_2=100-59/3 \cdot x_3 \wedge x_3 \in N_1 \wedge x_3 \geq 1 \wedge x_2 \in N_1 \wedge x_2 \geq 1 \wedge x_1 \in N_1 \wedge x_1 \geq 1 \}$$

wobei mit N_1 die natürlichen Zahlen größer oder gleich 1 bezeichnet werden.

Damit x_1 und x_2 ganzzahlig werden, muss x_3 ein Vielfaches von 3 sein.

Es bietet sich also an, es sofort mit $x_3 = 3$ zu probieren:

$$x_1 = 0 + 56/3 \cdot 3 = 56$$

$$x_2 = 100 - 59/3 \cdot 3 = 41$$

$$x_3 = 0 + 1 \cdot 3 = 3$$

(6P)

Damit weiß man sofort:

$$(56; 41; 3) \in L$$

2)

a)

$$\begin{aligned}
 &\underline{\underline{D = R}} \\
 &-\frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{15}x + \frac{7}{6} = 0 \quad | \cdot -30 \\
 &x^2 + 2x - 35 = 0 \\
 &x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x = 35 \\
 &x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 = 35 + 1^2 \\
 &(x+1)^2 = 36 \\
 &x+1 = 6 \vee x+1 = -6 \\
 &x_1 = 5 ; x_2 = -7 \\
 &\underline{\underline{L = \{5 ; -7\}}}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 &\underline{\underline{D = R}} \\
 &x^2 - 17x + \frac{355}{4} = 0 \\
 &x^2 - 2 \cdot \frac{17}{2}x = -\frac{355}{4} \\
 &x^2 - 2 \cdot \frac{17}{2} \cdot x + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{355}{4} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 \\
 &\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{355}{4} + \frac{289}{4} = -16,5 < 0 \\
 &\underline{\underline{L = \{\}}}
 \end{aligned}$$

3) a)

$$\begin{aligned}
 &\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 5 \quad | \cdot (x+2)(x-2) \\
 &D = R \setminus \{2; -2\} \\
 &(x-2)^2 + (x+2)^2 = 5(x+2)(x-2) \\
 &x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 = 5(x^2 - 4) \\
 &2x^2 + 8 = 5x^2 - 20 \\
 &-3x^2 = -28 \\
 &x^2 = \frac{28}{3} \\
 &L = \left\{-\sqrt{\frac{28}{3}} ; \sqrt{\frac{28}{3}}\right\}
 \end{aligned}$$

b)

1. Probe

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sqrt{\frac{28}{3}} - 2}{\sqrt{\frac{28}{3}} + 2} + \frac{\sqrt{\frac{28}{3}} + 2}{\sqrt{\frac{28}{3}} - 2} = 5 \quad | \cdot \left(\sqrt{\frac{28}{3}} + 2\right)\left(\sqrt{\frac{28}{3}} - 2\right) \\
 &\left(\sqrt{\frac{28}{3}} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{28}{3}} + 2\right)^2 = 5\left(\sqrt{\frac{28}{3}} + 2\right)\left(\sqrt{\frac{28}{3}} - 2\right) \\
 &\sqrt{\frac{28}{3}}^2 - 2 \cdot 2\sqrt{\frac{28}{3}} + 2^2 + \sqrt{\frac{28}{3}}^2 + 2 \cdot 2\sqrt{\frac{28}{3}} + 2^2 = 5\left(\sqrt{\frac{28}{3}}^2 - 2^2\right) \\
 &\frac{28}{3} - 4\sqrt{\frac{28}{3}} + 4 + \frac{28}{3} + 4\sqrt{\frac{28}{3}} + 4 = 5\left(\frac{28}{3} - 4\right) \\
 &\frac{56}{3} + 8 = \frac{140}{3} - 20 \quad | \cdot 3 \\
 &56 + 24 = 140 - 60 \\
 &80 = 80 \quad (\text{w})
 \end{aligned}$$

2. Probe:

$$\frac{\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)-2}{\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)+2} + \frac{\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)+2}{\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)-2} = 5$$

$$\frac{-\sqrt{\frac{28}{3}}-2}{-\sqrt{\frac{28}{3}}+2} + \frac{-\sqrt{\frac{28}{3}}+2}{-\sqrt{\frac{28}{3}}-2} = 5 \quad | \cdot \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}+2\right) \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}-2\right)$$

$$\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}-2\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}+2\right)^2 = 5 \left(\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}+2\right) \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}-2\right)\right)$$

$$\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)^2 - 2 \cdot 2 \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right) + 2^2 + \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)^2 + 2 \cdot 2 \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right) + 2^2 = 5 \left(\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)^2 - 2^2\right)$$

$$\frac{28}{3} + 4\sqrt{\frac{28}{3}} + 4 + \frac{28}{3} - 4\sqrt{\frac{28}{3}} + 4 = 5 \left(\frac{28}{3} - 4\right)$$

$$\frac{56}{3} + 8 = \frac{140}{3} - 20 \quad | \cdot 3$$

$$56 + 24 = 140 - 60$$

$$80 = 80 \quad (\text{w})$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 4P

Wie ist $|x|$ definiert ?

Formale Definition angeben, keine anschauliche Definition!

2) 4P

Geben Sie eine Äquivalenzumformung der folgenden Gleichung an:

$$x^2 = 25$$

3) 4P

Vereinfachen Sie, falls dies möglich ist (und so weit wie möglich):

$$\sqrt{z^2} =$$

4) 15P

Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an:

$$x^2 = -4$$

$$x^2 = 0$$

$$|x| = -5$$

$$x^2 = 0,25$$

$$|x| = x$$

5) 4P

Ist folgende Gleichung allgemeingültig? Begründen Sie (konkret)!

$$\sqrt{x^2} = x$$

6) 10P

Machen Sie die quadratische Ergänzung zum folgenden Term:

(Keine Dezimalzahlen, sondern Brüche verwenden. Exakte Lösung).

$$x^2 - \frac{7}{3\pi}x + \boxed{} = (\boxed{} - \boxed{})^2$$

7)

10P

Jemand behauptet, daß $x_1 = -10 - \sqrt{84}$ eine Lösung der Gleichung
 $-x^2 - 20x + 16 = 0$

ist.

Nehmen Sie zu der Aussage Stellung, indem Sie die Probe machen.

Lösungen:

1)

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$2) x^2 = 25 \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \iff |x| = 5 \iff x = 5 \vee x = -5$$

3)

$$\sqrt{z^2} = |z|$$

4)

$$x^2 = -4 \quad L = \{\}$$

$$x^2 = 0 \quad L = \{0\}$$

$$|x| = -5 \quad L = \{\}$$

$$x^2 = 0,25 \quad L = \{0,5; -0,5\}$$

$$|x| = x \quad L = \text{Menge aller positiven reellen Zahlen, einschließlich der } 0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$5) \sqrt{x^2} = x \quad \text{Setze für } x \text{ die Zahl } -3 \text{ ein. Dann folgt die falsche Aussage:}$$

$$\sqrt{(-3)^2} = -3$$

6)

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3\pi} x + ? = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6\pi} x + \left(\frac{7}{6\pi}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{6\pi}\right)^2$$

7)

$$-x^2 - 20x + 16 = 0$$

$$-(-10 - \sqrt{84})^2 - 20(-10 - \sqrt{84}) + 16 =$$

$$-(10 + \sqrt{84})^2 + 200 + 20\sqrt{84} + 16 =$$

$$-100 - 20\sqrt{84} - 84 + 200 + 20\sqrt{84} + 16 = 116 \neq 0$$

Also ist die Behauptung falsch.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht 0,333) angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 25P

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an:

- a) Funktion,
- b) Definitionsbereich
- c) Wertebereich,
- d) Lösungsmenge einer Gleichung
- e) Punktprobe

2) 3P

Welche 3 Möglichkeiten gibt es, eine Funktion darzustellen?

3) 9P

Vereinfachen Sie, falls dies möglich ist (und so weit wie möglich):

$$\sqrt{z^2} =$$

$$\sqrt{v^3} =$$

$$\sqrt{y^4} =$$

4) 2P

Geben Sie ein Schaubild an, das nicht zu einer Funktion gehört.

5) 12P

a) Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D der folgenden Funktion h an und bestimmen Sie außerdem den Wertebereich::

a) $h(x) = \frac{1}{x-10}$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

Lösungen:

15P

1)

a) Eine Funktion f ist eine Menge von geordneten Zahlenpaaren (x,y) .

Dabei wird jedem Element $x \in D$ (Definitionsmenge) genau ein Element $y \in Z$ (Zielmenge) zugeordnet. Das zugeordnete Element y wird auch mit $f(x)$ bezeichnet.

b) Definitionsbereich sind die Elemente der Menge, die jedes x annehmen darf.

c) Wertebereich sind alle möglichen Werte, die y annehmen kann.

d) Die Lösungsmenge L einer Gleichung bzgl. der Grundmenge G ist die Menge aller Zahlen (aus der Definitionsmenge D), für die die Einsetzungen (in die Variablen) in die Gleichung wahre Aussagen ergeben.

Eine Gleichung lösen bedeutet, die Lösungsmenge L einer Gleichung zu bestimmen.

e) Gegeben ist eine Funktion f .

Liegt ein Punkt $P(x_p | y_p)$ auf dem Graphen K_f , so erfüllen seine Koordinaten x_p und y_p die Funktionsgleichung $y = f(x)$.

Also gilt:

$$y_p = f(x_p)$$

2) Funktionsgleichung, Wertetabelle, Paarmenge, Schaubild

2)

$$\sqrt{z^2} = |z|$$

$$\sqrt{v^3} \text{ nicht weiter vereinfachbar}$$

$$\sqrt{y^4} = y^2$$

$$4) y^2 = x^2$$

5)

$$a) D = \mathbb{R} \setminus \{10\} \text{ und } W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$b) D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \text{ und } W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

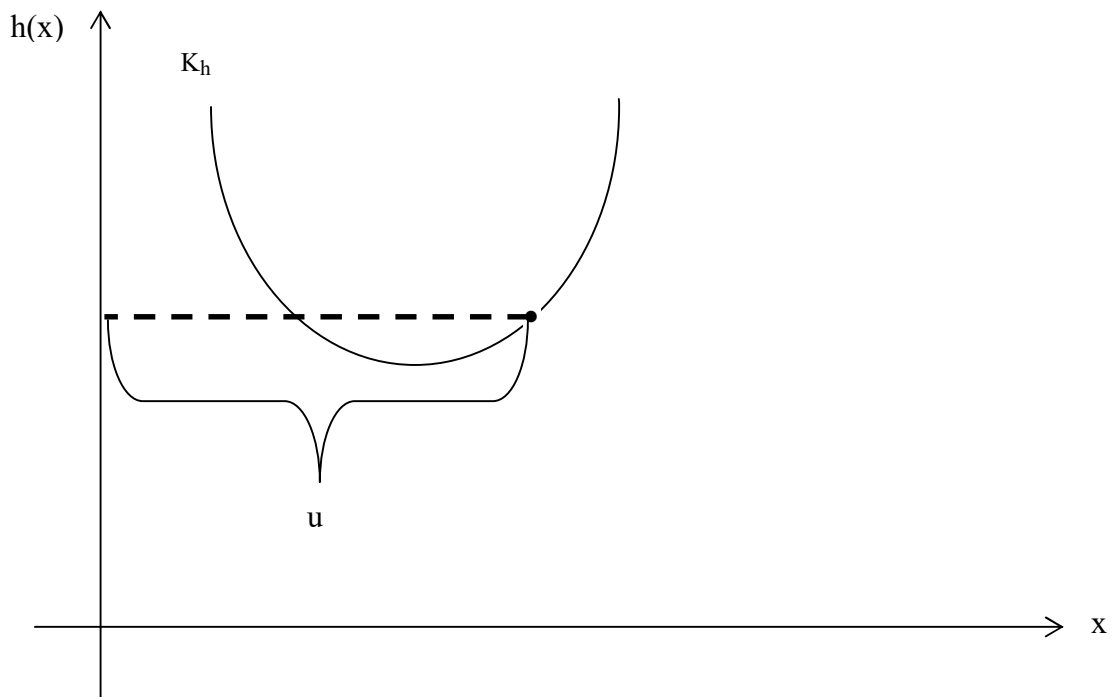
AUFGABEN

1)

6P

Gegeben sei eine Funktion h (mit dem Schaubild K_h).

Herr W.B. Gierig will wissen, wie groß $h(u)$ und $h'(u)$ ist. Zeichnen Sie deshalb $h(u)$ und $h'(u)$ in die folgende Zeichnung ein, so dass Herr W.B. Gierig diese Werte mit dem Geodreieck ablesen kann.



BITTE beachten Sie auch die Rückseite dieses zweiseitigen Blattes.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Ihre Mitarbeit.

2)

6P

Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitung den Scheitel der Parabel mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$$

3)

9P

Legen Sie an das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = \frac{1}{8}x^3$$

Tangenten parallel zur Gerade mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 1,5x$$

Bestimmen Sie den Berührungspunkt.

4)

19P

Legen Sie von $P(-2 | 1)$ aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{13}{4}$$

Bestimmen Sie die Berührungspunkte und die Funktionsgleichungen der Tangenten.

5) Geben Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen an:

7P

(c, k sind **konstante** Werte)

a) $h_1(x) = g(x) + c$

b) $h_2(x) = k \cdot g(x)$

c) $h_3(x) = g(x) + h(x)$

d) $h_4(x) = 10 \cdot 5$

e) $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$

f) $h_6(x) = x$

g) $h_7(x) = k/c$

6)

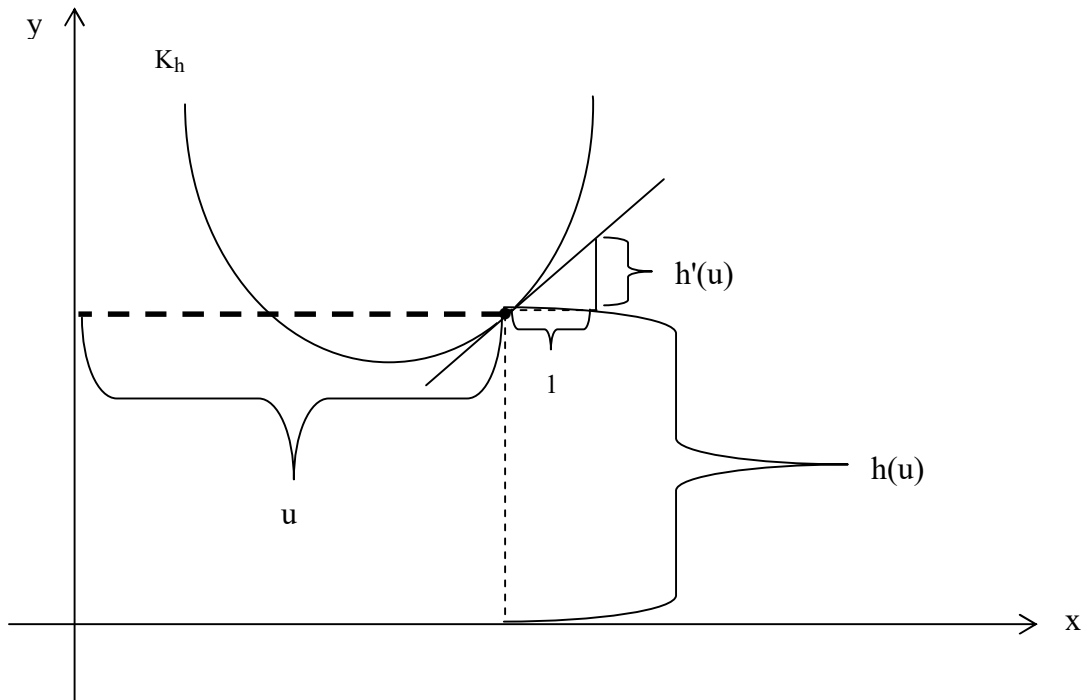
4P

Bilden Sie die erste Ableitung von

$$h(x) = (3x^2 - 7x + 10)^5$$

Lösung:

1)



2) Der Scheitel sei $S(x_s | y_s)$.

1 P

a) Berechnung des x-Koordinatenwerts des Punkts:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad 1 \text{ P}$$

Für den Scheitel $S(x_s | y_s)$ gilt:

$$0 = f'(x_s) = \frac{1}{2}x_s - 1 \quad 2 \text{ P}$$

$$0 = \frac{1}{2}x_s - 1$$

also:

$$x_s = 2 \quad 1 \text{ P}$$

b) Berechnung der y-Koordinate des Punkts:

$$y_s = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 - 2 = -3 \quad 1 \text{ P}$$

damit:

$S(2 | -3)$

3)

$$h'(x) = \frac{3}{8}x^2 \quad 1 \text{ P}$$

Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B | y_B)$. 1 P

Dort ist die Steigung 1,5

also gilt:

$$\frac{3}{2} = h'(x_B) = \frac{3}{8}x_B^2 \quad 2 \text{ P}$$

also gilt;

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{8}x_B^2 \quad 1 \text{ P}$$

damit:

$$x_B^2 = 4$$

$$x_{B1} = 2, \quad y_{B1} = 1 \quad 2 \text{ P}$$

$$x_{B2} = -2, \quad y_{B2} = -1 \quad 2 \text{ P}$$

also:

$$B_1(2 | 1)$$

$$B_2(-2 | -1)$$

4)

4.1) Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \boxed{1 \text{ P}}$$

4.2) Tangentenbedingung, kurz TB

Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{y_B - 1}{x_B - (-2)} = f'(x_B) \quad (\text{TB}) \quad \boxed{2 \text{ P}}$$

Es gilt aber:

$$y_B = -\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{3}{2}x_B - \frac{13}{4} \quad \text{und} \quad f'(x_B) = -\frac{1}{2}x_B - \frac{3}{2} \quad \boxed{2 \text{ P}}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{-\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{3}{2}x_B - \frac{13}{4} - 1}{x_B + 2} = -\frac{1}{2}x_B - \frac{3}{2} \iff -\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{3}{2}x_B - \frac{17}{4} = -\frac{1}{2}x_B^2 - \frac{3}{2}x_B - x_B - 3 \iff$$

$$\frac{1}{4}x_B^2 + x_B - \frac{5}{4} = 0 \iff x_B^2 + 4x_B - 5 = 0 \quad \boxed{4 \text{ P}}$$

also:

$$x_{B1} = -5, \quad y_{B1} = f(-5) = -2 \quad \boxed{2 \text{ P}}$$

$$x_{B2} = 1, \quad y_{B1} = f(1) = -5 \quad \boxed{2 \text{ P}}$$

damit:

$$B_1(-5 \mid -2)$$

$$B_2(1 \mid -5)$$

4.3) Berechnung der Tangentensteigungen

$$\text{Steigung der Tangente } t_1: \quad f'(-5) = -\frac{1}{2} \cdot (-5) - \frac{3}{2} = 1 \quad \boxed{1 \text{ P}}$$

$$\text{Steigung der Tangente } t_2: \quad f'(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2} = -2 \quad \boxed{1 \text{ P}}$$

4.4) Berechnung der Funktionsgleichungen der Tangenten

a) Nach der PSF gilt für t_1 :

$$\frac{y - (-2)}{x - (-5)} = 1 \iff y = x + 3, \text{ also:} \quad \boxed{2 \text{ P}}$$

$$t_1: y = x + 3$$

b) Nach der PSF gilt für t_2 :

$$\frac{y - (-5)}{x - 1} = -2 \iff y = -2x - 3, \text{ also:} \quad \boxed{2 \text{ P}}$$

$$t_2: y = -2x - 3$$

5) 7P

$$a) h_1'(x) = g'(x)$$

$$b) h_2'(x) = k \cdot g'(x)$$

$$c) h_3'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$d) h_4'(x) = 0$$

$$e) h_5'(x) = 21 \cdot x^6$$

$$f) h_6'(x) = 1$$

$$g) h_7'(x) = 0$$

6) 4P

$$h(x) = (3x^2 - 7x + 10)^5$$

$$h'(x) = 5(3x^2 - 7x + 10)^4 \cdot (6x - 7)$$

KLAUSUR 3 Mathematik 1 2BKI1 Nachtermin 1 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Zeichnen Sie das Schaubild der folgenden Funktion, in jeweils dem Bereich, in dem interessante Punkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte) vorkommen. Untersuchen Sie die Schaubilder jeweils bzgl:

- a) Symmetrie
- b) Achsenschnittpunkte
- c) Ableitungen
- d) Extrempunkte
- e) Wendepunkte und Wendetangenten

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$$

Lösungen:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$$

a) Symmetrie

$$a1) f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - 3(-x)^2 + 9(-x) = -\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 - 9x \neq f(x)$$

Das Schaubild K_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$a2) -f(-x) = -\left(\frac{1}{4}(-x)^3 - 3(-x)^2 + 9(-x)\right) = \frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 9x \neq f(x)$$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. $O(0|0)$.

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0|y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0|y_s) \in K_f$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$$

$S_y(0|0)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s|0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s|0) \in K_f$

$$0 = \frac{1}{4}x_s^3 - 3x_s^2 + 9x_s \quad | \cdot 4$$

$$0 = x_s^3 - 12x_s^2 + 36x_s \iff 0 = x_s(x_s^2 - 12x_s + 36)$$

Fall 1: $0 = x_s^2 - 12x_s + 36$

Fall 2: $x_s = 0$

$x_{s2} = 0$

$$x_{s1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_{s1} = 6$$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(0|0), S_{x2}(6|0)$

c) Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2}$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{3}{4}x_e^2 - 6x_e + 9 \quad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$0 = x_e^2 - 8x_e + 12$$

$$x_{e1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2$$

$$x_{e1} = 2$$

$$x_{e2} = 6$$

$$f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 6 = -3 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$f''(6) = \frac{3}{2} \cdot 6 - 6 = 3 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8$$

$$y_{e2} = f(6) = \frac{1}{4} \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + 9 \cdot 6 = 0$$

damit

H(2 | 8) Hochpunkt, T(6 | 0) Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$0 = \frac{3}{2}x_w - 6 \quad | \cdot 2$$

$$0 = 3x_w - 12$$

$$x_w = 4$$

$$f'''(4) = \frac{3}{2} \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_w = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 = 4$$

damit:

W(4 | 4) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(4 | 4):

$$f'(4) = \frac{3}{4} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 9 = -3, \text{ damit gilt nach der PSF:}$$

$$-3 = \frac{y-4}{x-4} \iff y-4 = -3(x-4) \iff y = -3x+16$$

$$t: y = -3x+16$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 6P
a) Ist die zur Funktionsgleichung $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ zugehörige Kurve K_f punktsymmetrisch zum Ursprung? Begründen Sie rein mathematisch oder über einen entsprechenden Satz.

b) Berechnen Sie mathematisch oder begründen verbal:

$$\int_{-2}^2 (x^5 - 2x^3 + x) dx =$$

2) 7P
Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und die x -Achse begrenzen über dem Intervall $[0;a]$ eine Fläche (mit $a>0$). Wie muss a gewählt werden, damit der Flächeninhalt 4,5 Flächeneinheiten beträgt ?

3) 8P
Bestimmen Sie die Fläche zwischen den Kurven mit folgender Funktionsgleichung:
 $f(x) = (x-2)(x+2)$
 $h(x) = \frac{1}{2}(2-x)(x+2)$

4)

6P

Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

a) $\log_{10}(a \cdot a)$

b) $\ln(x - y)$

c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

d) $\log_a((a^n)^m)$

e) $\log_a \frac{a^n}{a^m}$

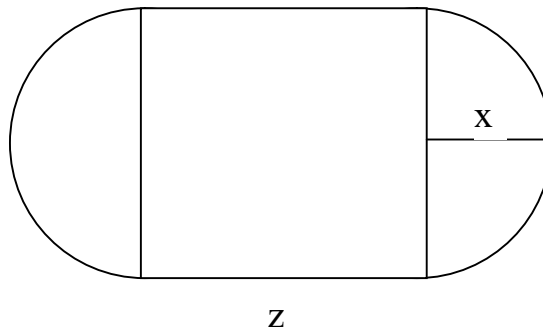
5)

12P

Eine Parabel 4. Ordnung hat in $O(0 \mid 0)$ eine waagrechte Tangente und in $P(-2 \mid 2)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente. Geben Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel an.

6)

12P



Eine 400 m Laufbahn besteht aus 2 parallelen Strecken mit zwei angesetzten Halbkreisen. Für welchen Radius x der Halbkreise wird die rechteckige Spielfläche maximal?

Bemerkung zu dieser Aufgabe

Bitte folgendes Schema benutzen:

a) Zielfunktion:

b) Nebenbedingung:

c) Reduktion auf 1 Variable:

d) Ableitungen:

e) Definitionsbereich:

f) Lokale Extremwerte $E(x_e \mid V_e): V'(x_e) = 0$:

g) Randwertuntersuchung:

h) Ergebnis:

Lösungen

1)

a) Da das Polynom nur aus ungeraden Hochzahlen besteht, ist es punktsymmetrisch bzgl. dem Ursprung.

$$b) \int_{-2}^2 (x^5 - 2x^3 + x) dx = \left[\frac{x^6}{6} - 2 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{2^6}{6} - 2 \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} - \left(\frac{2^6}{6} - 2 \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} \right) = 0$$

andere Begründung: Da K_f punktsymmetrisch, muß die bilanzierte Fläche 0 sein.

2)

$$\int_0^a \frac{1}{2} x^2 dx = 4,5$$

$$\left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^a = 4,5 \iff \frac{1}{6} a^3 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 4,5 \iff \frac{1}{6} a^3 = 4,5$$

$$\iff a^3 = 27 \iff a = \sqrt[3]{27} \iff$$

$$a = 3$$

3)

8P

a) Berechnung der Nullstellen:

$N(x_S | 0)$ sei der Schnittpunkt.

$$(x_S - 2)(x_S + 2) = \frac{1}{2} (2 - x_S) (x_S + 2)$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) = -\frac{1}{2} (x_S - 2) (x_S + 2)$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) + \frac{1}{2} (x_S - 2) (x_S + 2) = 0$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) \left[1 + \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) \cdot 1,5 = 0 \quad | : 1,5$$

$$(x_S - 2)(x_S + 2) = 0$$

$$x_{S1} = -2 \quad x_{S2} = -2$$

Alternative Lösung:

$$(x_S - 2)(x_S + 2) = \frac{1}{2} (2 - x_S) (x_S + 2)$$

$$x_S^2 - 4 = -\frac{1}{2} (x_S^2 - 4) \quad | + \frac{1}{2} (x_S^2 - 4)$$

$$\frac{3}{2} (x_S^2 - 4) = 0 \quad | : \frac{3}{2}$$

$$x_S^2 - 4 = 0$$

$$x_S^2 = 4$$

$$|x_S| = 2$$

$$x_{S1} = -2 \quad x_{S2} = -2$$

$$b) A = \int_{-2}^2 (Ok(x) - Uk(x)) dx = \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} - (x^2 - 4) \right) dx = \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} - x^2 + 4 \right) dx = \int_{-2}^2 \left(6 - \frac{3x^2}{2} \right) dx =$$

$$\left[6x - \frac{x^3}{2} \right]_{-2}^2 = \left[6x - \frac{x^3}{2} \right]_{-2}^2 = (6 \cdot 2 - 2^3/2) - (6 \cdot (-2) - (-2)^3/2) = 12 - 4 - (-12 + 4) = 8 + 8 = 16$$

4)

a) $\log_{10}(a \cdot a) = \log_{10} a^2 = 2 \log_{10} a$

b) $\ln(x - y)$ "keine Umformung möglich"

c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 \ln e = -2$

d) $\log_a((a^n)^m) = \log_a(a^{nm}) = nm \cdot \log_a a = nm$

e) $\log_a \frac{a^n}{a^m} = \log_a a^{n-m} = (n-m) \log_a a = n-m$

5)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

a) $O(0 \mid 0) \in K_f$

2P

$$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$$

$$e = 0$$

b) $e = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ergibt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

c) $O(0 \mid 0)$ hat eine waagrechte Tangente

2P

$$f'(0) = 0$$

$$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$$

$$d = 0$$

d) $d = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ ergibt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

e) $P(-2 \mid 2) \in K_f$

$$2 = a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2$$

$$2 = 16a - 8b + 4c$$

$$1 = 8a - 4b + 2c \quad (G1)$$

f) $P(-2 \mid 2)$ ist Wendepunkt, also $f''(-2) = 0$

$$12a \cdot (-2)^2 + 6b \cdot (-2) + 2c = 0$$

$$48a - 12b + 2c = 0$$

$$24a - 6b + c = 0 \quad (G2)$$

g) $P(-2 \mid 2)$ hat eine waagrechte Tangente

$$f'(-2) = 0$$

$$4a \cdot (-2)^3 + 3b \cdot (-2)^2 + 2c \cdot (-2) = 0$$

$$-32a + 12b - 4c = 0$$

$$-8a + 3b - c = 0 \quad (G3)$$

h) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$$a = \frac{3}{8}, \quad b = 2, \quad c = 3$$

i) Ergebnis:

$$f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2$$

6)

a) Zielfunktion:

$$A(x, z) = 2x \cdot z$$

b) Nebenbedingung:

$$400 = 2z + 2\pi x$$

$$200 = z + \pi x$$

$$z = 200 - \pi x$$

c) Reduktion auf 1 Variable:

$$A(x) = 2x(200 - \pi x) = 400x - 2\pi x^2$$

d) Ableitungen:

$$A'(x) = 400 - 4\pi x$$

$$A''(x) = -4\pi$$

e) Definitionsbereich: $D = [0; \frac{200}{\pi}]$

f) Lokale Extremwerte $E(x_e | A_e)$:

$$A'(x_e) = 0:$$

$$0 = 400 - 4\pi x_e$$

$$x_e = 100/\pi \approx 31,83$$

$$x_e \in D$$

$$A\left(\frac{100}{\pi}\right) = 400 \cdot \frac{100}{\pi} - 2\pi \frac{10000}{\pi^2} = \frac{20000}{\pi} \approx 6366,2$$

g) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 0 \qquad A\left(\frac{200}{\pi}\right) = 2 \cdot \frac{200}{\pi} \left(200 - \pi \frac{200}{\pi}\right) = 0$$

h) Ergebnis:

Die maximale Fläche wird für $x = 100/\pi$ mit $A_e \approx 6366,2$ erreicht.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1)

7P

Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge L der Gleichung

$$5 \cdot 25^{2x} = 5^{4x+1}$$

2)

6P

Herr A legt sein Anfangskapital K_0 zu $p\%$ Jahreszinssatz bei der Bank an (mit Zinseszins, d.h. er läßt die Zinsen auf der Bank).

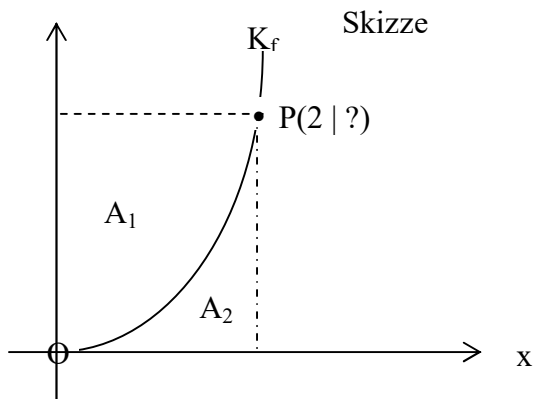
Herr B macht genau das Gleiche, außer daß er sein Geld 7 Jahre länger auf der Bank läßt als Herr A.

Das Wievielfache von Herr A besitzt dann Herr B ?

Zeigen Sie daß das Ergebnis nur von p abhängt, d.h. in der gefunden Formel p vorkommt.

3)

15P



K_f ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$

Die Fläche A_1 wird durch K_f , die y-Achse und die waagrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt. Die Fläche A_2 wird durch K_f , die x-Achse und die senkrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt.

- Begründen Sie anschaulich, warum $A_1 > A_2$ ist.
- Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 ?
- Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 , wenn $P(a | ?) \in K_f$ ein beliebiger Punkt ist ($a > 0$) ?

4)

7P

- Berechnen Sie $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v e^{-2x} dx$

- Was bedeutet das Ergebnis anschaulich?

5)

15P

Legen Sie von $P(1 | 0)$ aus die Tangente(n) an das Schaubild K_h der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$h(x) = e^{2x+1}$$

Bestimmen Sie die bzw. den Berührungspunkt(e) und die Funktionsgleichungen der Tangente(n).

Lösungen:

1)

7P

$$5 \cdot 25^{2x} = 5^{4x+1} \quad | \ln$$

$$\ln(5 \cdot 25^{2x}) = \ln(5^{4x+1})$$

$$\ln 5 + \ln 25^{2x} = (4x+1) \cdot \ln 5$$

$$\ln 5 + 2x \cdot \ln 25 = (4x+1) \cdot \ln 5$$

$$\ln 5 + 2x \cdot \ln 5^2 = 4x \cdot \ln 5 + \ln 5 \quad | -\ln 5$$

$$2x \cdot 2 \ln 5 = 4x \cdot \ln 5 \quad | : 4 \ln 5$$

$$x = x$$

$$L = \mathbb{R}$$

2)

6P

$$K_n = K_0 \cdot (1+p/100)^n$$

$$K_{n+7} = K_0 \cdot (1+p/100)^{n+7}$$

$$\frac{K_{n+7}}{K_n} = \frac{k_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^{n+7}}{k_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n} = (1 + \frac{p}{100})^{n+7-n} = (1 + \frac{p}{100})^7$$

3)

15P

a) Sei A_R die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da K_f unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt: $A_1 > A_R/2 > A_2$

Damit gilt dann:

$$A_1 > A_2$$

b) 5P

$$A_2 = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = 2 \cdot f(2) - A_2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16/3}{8/3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^2 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 (f(2) - x^2) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

c) 6P

$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{3} a^3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^a (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^a (f(a) - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

4)

7P

$$a) \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v e^{-2x} dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^v = \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-2v}}{-2} - \frac{e^{-2 \cdot 0}}{-2} \right] = \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-2v}}{-2} - \frac{1}{-2} \right] =$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-2v} - 1}{-2} \right] = 0,5$$

b) Die Fläche, die von der Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x) = e^{-2x}$, der x-Achse und der y-Achse begrenzt wird ist 0,5

5)

15P

a) Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{h(x_B) - 0}{x_B - 0} = h'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$h(x_B) = e^{2x_B + 1} \text{ und } h'(x_B) = 2e^{2x_B + 1}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{e^{2x_B + 1} - 0}{x_B - 1} = 2e^{2x_B + 1}$$

$$\frac{e^{2x_B + 1}}{x_B - 1} = 2e^{2x_B + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_B - 1} = 2 \Leftrightarrow x_B - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_B = 1,5$$

$$y_B = h(1,5) = e^{2 \cdot 1,5 + 1} = e^4$$

also: $B(1,5 | e^4)$

Funktionsgleichung der Tangente:

$$\frac{y - 0}{x - 1} = \frac{e^4 - 0}{1,5 - 1} \Leftrightarrow \frac{y}{x - 1} = \frac{e^4}{0,5} \Leftrightarrow \frac{y}{x - 1} = 2e^4 \Leftrightarrow y = 2e^4(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = 2e^4x - 2e^4$$