

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

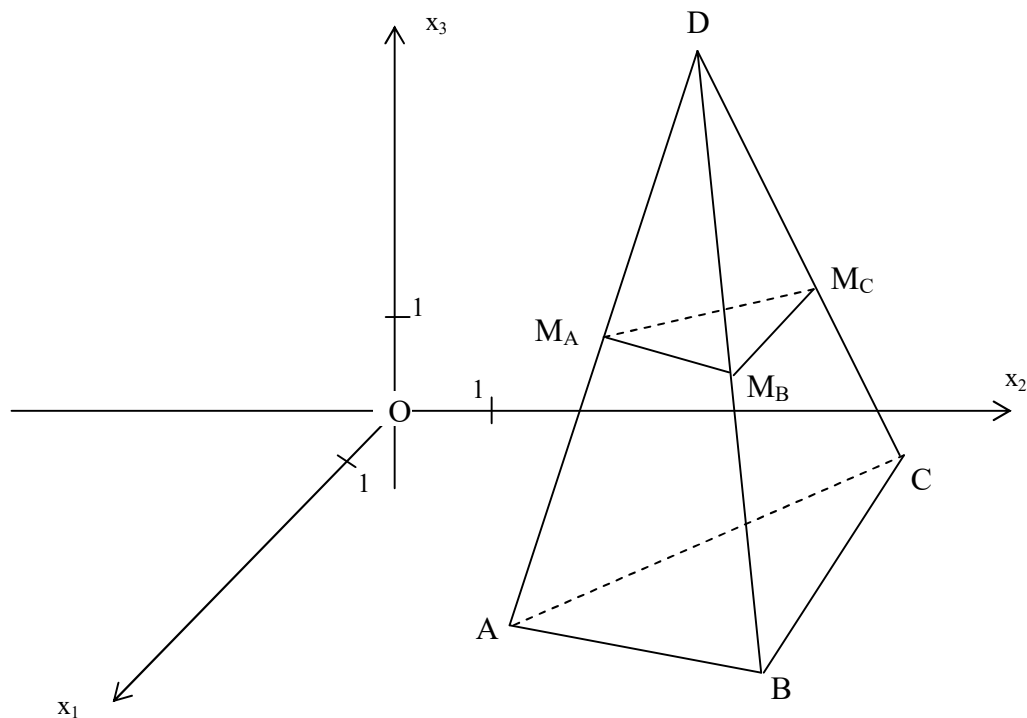
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN**1) Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide in einem räumlichen Koordinatensystem. (15P)**Mit M_A , M_B und M_C sind die Mittelpunkte der von D ausgehenden Kanten bezeichnet.

Berechnen Sie

- a) $\overrightarrow{OM_A}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OD}
- b) $\overrightarrow{OM_B}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OB} und \overrightarrow{OD}
- c) $\overrightarrow{OM_C}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OC} und \overrightarrow{OD}



2) Gegeben sei die Pyramide von Aufgabe 1) mit den Koordinaten (6P)

A(-2 | 4 | -6), B(2 | 0 | -4), C(6 | -6 | 2), D(8 | 12 | 16)

Berechnen Sie die Punkte (mit Angabe ihrer Koordinaten) M_A , M_B und M_C

3) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: (15P)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

4) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination folgender Vektoren dar: (15P)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

Lösungen:

1)

$$a) \overrightarrow{OM_A} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$b) \overrightarrow{OM_B} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$$

$$c) \overrightarrow{OM_C} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

2)

$$a) \overrightarrow{OM_A} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \implies M_A(3 \mid 8 \mid 5)$$

$$b) \overrightarrow{OM_B} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \implies M_B(5 \mid 6 \mid 6)$$

$$c) \overrightarrow{OM_C} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \implies M_C(7 \mid 3 \mid 9)$$

3)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2-2+2 \\ 3+4+1 \\ 4-6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2x \\ 8x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff -2x = -4 \wedge 8x = 16 \wedge x = 3 \iff$$

$$x = 2 \wedge x = 2 \wedge x = 3, \text{ also } L = \{ \}$$

4)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ -1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -1 \wedge -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \wedge 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -2 \iff$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= -1 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 4 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 &= -2 \end{aligned} \quad (4P)$$

oder in Matritzenform:

(9P)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	-2	1	-1	G1	-1
-1	1	1	4	G2	5
1	1	-1	-2	G3	-1
1	-2	1	-1	G4=G1	-1
0	-1	2	3	G5=G1+G2	4
0	-3	2	1	G6=G1-G3	0
1	0	-3	-7	G7=-2G5+G4	-9
0	-1	2	3	G8=G5	4
0	0	-4	-8	G9=-3G5+G6	-12
-4	0	0	4	G10=-4G7+3G9	0
0	-2	0	-2	G11=G9+2G8	-4
0	0	-4	-8	G12=G9	-12
1	0	0	-1	G13=G10/-4	0
0	1	0	1	G14=G11/-2	2
0	0	1	2	G15=G12/-4	3

$$L = \{ (-1; 1; 2) \} \quad (2P)$$

also:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist eine Pyramide, deren Spitze sich im Ursprung $O(0|0|0)$ und deren Eckpunkte sich auf den Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems befinden.

Für die Länge der Seitenkanten gilt:

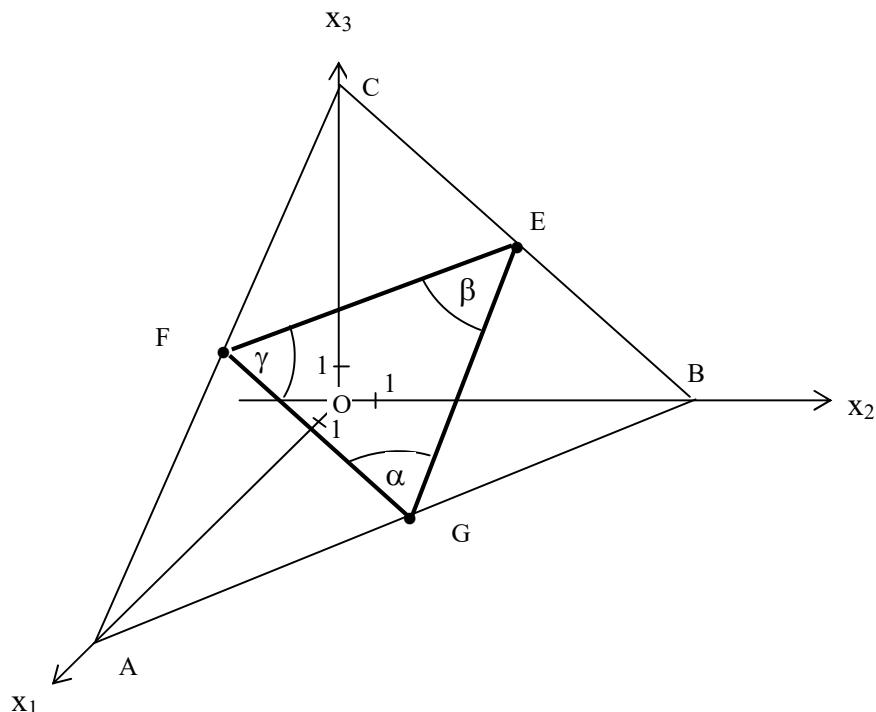
$$\left| \overrightarrow{OA} \right| = 8, \quad \left| \overrightarrow{OB} \right| = 4, \quad \left| \overrightarrow{OC} \right| = 2$$

Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke BC.

Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke AC.

Der Punkt G ist der Mittelpunkt der Strecke AB.

Skizze:



Bemerkungen:

1) Alle Berechnungen in der Aufgabe (Winkel) sind ausschließlich mit Hilfe der Vektorrechnung durchzuführen.

2) Zahlen auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

a) Geben Sie die Punkte A, B, C mit ihren Koordinaten an. (3P)

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte E, F, G (mit ihren Koordinaten) (15P)

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Winkel im Dreieck $\triangle EFG$. (30P)

Nehmen Sie die Punkte E, F, G wie folgt an:

$E(0 \mid 4 \mid 2)$, $F(8 \mid 0 \mid 2)$, $G(8 \mid 4 \mid 0)$

d) Probe machen (Winkelsumme !). (2P)

Lösungen:

a) A(8 | 0 | 0), B(0 | 4 | 0), C(0 | 0 | 2)

b)

$$\text{b1) } \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0+0 \\ 4+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies E(0 | 2 | 1)$$

$$\text{b2) } \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies F(4 | 0 | 1)$$

$$\text{b3) } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+4 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies G(4 | 2 | 0)$$

c)

c1)

9P

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 0-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 4-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{EG}|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{8 \cdot 8 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{8^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{64}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{68}} = \frac{8}{\sqrt{85}}$$

$$\approx 0,87$$

$$\text{also: } \beta \approx 29,81^\circ$$

c2)

9P

$$\vec{GE} = -\vec{EG} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{GF} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{GE} \cdot \vec{GF}}{|\vec{GE}| \cdot |\vec{GF}|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-8 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 2}{\sqrt{(-8)^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{68} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{85}}$$

$$\approx 0,11$$

$$\text{also: } \alpha \approx 83,77^\circ$$

c3)

9P

$$\vec{FE} = -\vec{EF} = -\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{FG} = -\vec{GF} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{FE} \cdot \vec{FG}}{|\vec{FE}| \cdot |\vec{FG}|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-8 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{20}} = 0,4$$

$$\text{also: } \gamma \approx 66,42^\circ$$

d) Probe (Winkelsumme):

3P

$$\beta + \alpha + \gamma \approx 29,81^\circ + 83,77^\circ + 66,42^\circ \approx 180^\circ \quad (\text{wahr})$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist ein Quader, dessen Seitenlängen sich wie folgt verhalten:

Breite : Länge : Höhe = $1 : 2 : 3$ (siehe Skizze unten).

Ein Eckpunkt des Quaders befindet sich im Ursprung $O(0|0|0)$, ein anderer Eckpunkt A auf der positiven x_1 -Achse, ein anderer Eckpunkt B auf der positiven x_2 -Achse, ein anderer Eckpunkt C auf der positiven x_3 -Achse.

a) Zeichnen (keine Skizze !!) Sie den Quader in ein rechtwinkliges, dreidimensionales Koordinatensystem ein. (5P)

x_2 -Achse und x_3 -Achse: $1LE = 2\text{ cm}$; x_1 -Achse mit Schrägbildwinkel 45° und $1LE = \sqrt{2}\text{ cm}$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Winkel (bitte alle dazu notwendigen Informationen in die Zeichnung eintragen, damit die Rechnung beim Korrigieren nachvollziehbar wird) zwischen der Raumdiagonale, die durch den Eckpunkt C des Quaders geht und der Projektion dieser Raumdiagonalen in die x_1 - x_2 -Ebene. (15P)

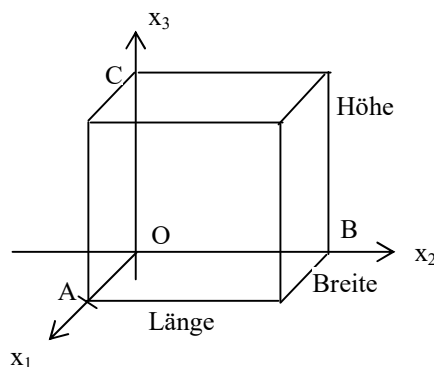
c) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Länge der Raumdiagonalen und die Länge der Projektion dieser Raumdiagonalen in die x_1 - x_2 -Ebene. (10P)

d) Zeigen Sie, dass das bei b) berechnete Ergebnis unabhängig von der Breite des Quaders ist. (10P)

e) Die Mitte der Raumdiagonale, die durch den Ursprung O und dem dem Ursprung gegenüberliegenden Eckpunkt D des Quaders liegt, wird mit M bezeichnet.

Wie läßt sich \vec{OM} als Linearkombination von \vec{OA} , \vec{OB} und \vec{OC} darstellen ? (10P)

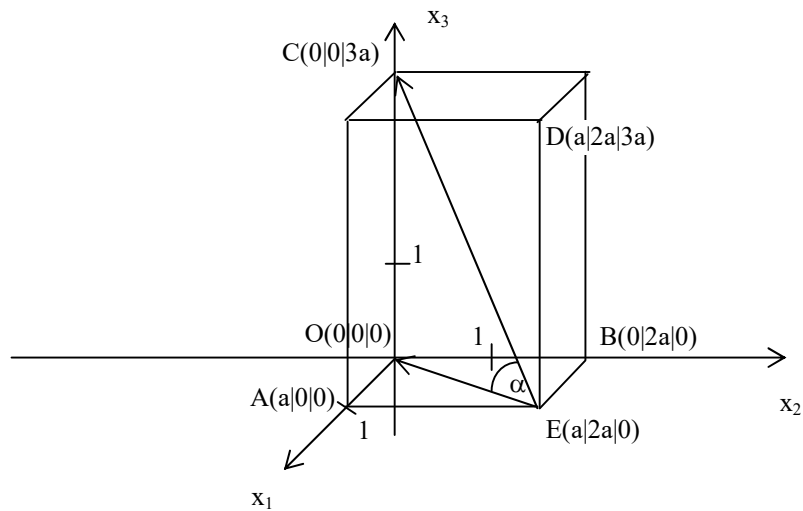
Skizze:



Lösungen:

1)

a) allgemeiner Nachweis für einen **beliebigen** Quader mit den oben gegebenen **Seitenverhältnissen**:



b)

$$\overrightarrow{EO} = \begin{pmatrix} 0-a \\ 0-2a \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 0-a \\ 0-2a \\ 3a-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 3a \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EO}| \cdot |\overrightarrow{EC}|} = \frac{a^2 + 4a^2}{\sqrt{5a^2} \cdot \sqrt{14a^2}} = \frac{5a^2}{\sqrt{70}a^4} = \frac{5}{\sqrt{70}}$$

$$\alpha \approx 53,30^\circ$$

=====

c)

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

=====

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorna me muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist die Gerade durch die folgenden 2 Punkte:

A (1 | 2 | 3)

B (11 | -18 | -17) 3 P

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung (in Parameterform) der Geraden $g = (AB)$ 3 P

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt Q (19 | -34 | -33) auf der Geraden g liegt. 8 P

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte P_1 und P_2 , die von A die Entfernung 120 LE (Längeneinheiten) haben und auf der Geraden g liegen. 13P

d) Durch die Punkte A und Q ist die Strecke \overline{AQ} gegeben.

Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte T_1 und T_2 , so dass die Strecke \overline{AQ} in 3 gleiche Teile geteilt wird. 8 P

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Gerade h, die senkrecht auf g steht und durch den Punkt R(5 | 1 | 6) geht. 13 P

f) Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand des Punktes R(5 | 1 | 6) von der Geraden g. 1 P

g) Bestimmen Sie rechnerisch einen Punkt C, so dass die Gerade $i = (BC)$ durch den Ursprung $O(0|0|0)$ geht und $B \neq C$ und $C \neq O(0|0|0)$ ist. 5 P

Lösungen:

a)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11-1 \\ -18-2 \\ -17-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

b)

Sei $Q \in g$, dann existiert ein t_s mit:

$$\begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_s \\ 2-20t_s \\ 3-20t_s \end{pmatrix} \Leftrightarrow (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \Leftrightarrow t_s=1,8$$

$\Rightarrow Q \in g$

c) Gesucht: t_x mit

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = 120$$

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = \left| \begin{pmatrix} 10t_x \\ -20t_x \\ -20t_x \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(10t_x)^2 + (-20t_x)^2 + (-20t_x)^2} = \sqrt{900t_x^2} = 30\sqrt{t_x^2}$$

$$30\sqrt{t_x^2} = 120 \Leftrightarrow \sqrt{t_x^2} = 4 \Leftrightarrow |t_x| = 4 \Leftrightarrow t_{x1} = 4, t_{x2} = -4$$

also:

$$\vec{OP}_1 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -78 \\ -77 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_2 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 82 \\ 83 \end{pmatrix}, \quad \text{also } P_1(41 | -78 | -77), P_2(-39 | 82 | 83)$$

d)

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 19-1 \\ -34-2 \\ -33-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AT}_2 = \vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AT}_1 = \vec{OA} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

also:

$$T_1(7 | -10 | -9) \quad T_2(13 | -22 | -21)$$

e)

$F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F})$ sei der Punkt, der auf g und h liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_F \\ 2-20t_F \\ 3-20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1F} & = & 1+10t_F \\ x_{2F} & = & 2-20t_F \\ x_{3F} & = & 3-20t_F \end{matrix}$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \overset{\rightarrow}{FR} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 - x_{1F} \\ 1 - x_{2F} \\ 6 - x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 - (1 + 10t_F) \\ 1 - (2 - 20t_F) \\ 6 - (3 - 20t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 - 10t_F \\ -1 + 20t_F \\ 3 + 20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 - 10t_F \\ -1 + 20t_F \\ 3 + 20t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot (4 - 10t_F) + -20 \cdot (-1 + 20t_F) + -20 \cdot (3 + 20t_F) = 0 \Leftrightarrow 40 - 100t_F + 20 - 400t_F - 60 - 400t_F = 0 \Leftrightarrow -900t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = 0$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{also: } F(1|2|3)$$

Dann gilt:

$$\overset{\rightarrow}{FR} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 1 - 2 \\ 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und damit:}$$

$$\text{h: } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

f)

$$|\overset{\rightarrow}{FR}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$

g)

1. Lösung:

O ist ein Aufpunkt und \vec{OB} ein Richtungsvektor dieser Geraden i. Also gilt:

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11-0 \\ -18-0 \\ -17-0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix}$$

wähle z.B: $t = 2$, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{1C} \\ x_{2C} \\ x_{3C} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -36 \\ -34 \end{pmatrix} \text{ und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

2. Lösung (nicht so elegant):

Sei $C(x_{1C} | x_{2C} | x_{3C}) \in i$, dann ist B ist ein Aufpunkt und \vec{BC} ein Richtungsvektor dieser Geraden i. Also gilt:

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} - (-18) \\ x_{3C} - (-17) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix}$$

Da $0 \in i$, existiert ein t_s mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} 0 = 11 + t_s \cdot x_{1C} - 11 t_s \\ 0 = -18 + t_s \cdot x_{2C} + 18 t_s \\ 0 = -17 + t_s \cdot x_{3C} + 17 t_s \end{matrix} \iff$$

$$x_{1C} = (-11 + 11 t_s) / t_s$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 t_s) / t_s$$

$$x_{3C} = (17 - 17 t_s) / t_s$$

wähle z.B: $t_s = -1$, dann gilt:

$$x_{1C} = (-11 + 11 \cdot (-1)) / (-1) = 22$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 \cdot (-1)) / (-1) = -36 \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

$$x_{3C} = (17 - 17 \cdot (-1)) / (-1) = -34$$

2. Lösung von f)

Für alle Punkte $P(x_1 | x_2 | x_3)$, die sich frei auf der Gerade g bewegen und diese durchlaufen, gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t \\ 2-20t \\ 3-20t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 & = & 1+10t \\ x_2 & = & 2-20t \\ x_3 & = & 3-20t \end{matrix}$$

also:

$$\vec{RP} = \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+10t) - 5 \\ (2-20t) - 1 \\ (3-20t) - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t - 4 \\ -20t + 1 \\ -20t - 3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{RP}| = \sqrt{(10t-4)^2 + (-20t+1)^2 + (-20t-3)^2} =$$

$$\sqrt{100t^2 - 80t + 16 + 400t^2 - 40t + 1 + 400t^2 + 120t + 9} =$$

$$\sqrt{26 + 900t^2}$$

Wann wird dieser Wert minimal ?

Für $t = 0$!

also:

$$|\vec{RF}| = \sqrt{26}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorna me muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist die Gerade g durch die folgende Parameterform

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \quad 25P$$

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Gerade h, die senkrecht auf g steht und durch den Punkt $R(5 \mid 1 \mid 6)$ geht.

Benutzen Sie dazu die im Unterricht verwendete Lösungsmethode.

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand des Punktes $R(5 \mid 1 \mid 6)$ von der Geraden g. 25P
Benutzen Sie dazu die in der Musterlösung (die angeblich von allen intensivst durchgearbeitet wurde) benutzte Lösungsmethode, d.h:

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $R(5 \mid 1 \mid 6)$ von einem beliebigen Punkt P auf der Geraden g und überlegen Sie wann dieser Abstand minimal wird.

Lösungen:

a)

$F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F})$ sei der Punkt, der auf g und h liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_F \\ 2-20t_F \\ 3-20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1F} & = & 1+10t_F \\ x_{2F} & = & 2-20t_F \\ x_{3F} & = & 3-20t_F \end{matrix}$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{FR} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5-x_{1F} \\ 1-x_{2F} \\ 6-x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5-(1+10t_F) \\ 1-(2-20t_F) \\ 6-(3-20t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4-10t_F \\ -1+20t_F \\ 3+20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4-10t_F \\ -1+20t_F \\ 3+20t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot (4-10t_F) + (-20) \cdot (-1+20t_F) + (-20) \cdot (3+20t_F) = 0 \Leftrightarrow 40 - 100t_F + 20 - 400t_F - 60 - 400t_F = 0 \Leftrightarrow$$
$$-900t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = 0$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{also: } F(1 | 2 | 3)$$

Dann gilt:

$$\overrightarrow{FR} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und damit:}$$

$$h: x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

Für alle Punkte $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$, die sich frei auf der Gerade g bewegen und diese durchlaufen, gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t \\ 2-20t \\ 3-20t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 & = & 1+10t \\ x_2 & = & 2-20t \\ x_3 & = & 3-20t \end{matrix}$$

also:

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+10t) - 5 \\ (2-20t) - 1 \\ (3-20t) - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t - 4 \\ -20t + 1 \\ -20t - 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{RP}| &= \sqrt{(10t-4)^2 + (-20t+1)^2 + (-20t-3)^2} = \\ &= \sqrt{100t^2 - 80t + 16 + 400t^2 - 40t + 1 + 400t^2 + 120t + 9} = \\ &= \sqrt{26 + 900t^2} \end{aligned}$$

Wann wird dieser Wert minimal ?

Für $t = 0$!

also:

$$|\overrightarrow{RF}| = \sqrt{26}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorna me muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Wenn das Ergebnis falsch ist und keine Probe gemacht wurde, gibt es massiv Punkteabzug.

1) Gegeben ist die Gerade g durch die folgende Parameterform

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 25P$$

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Gerade h , die senkrecht auf g steht und durch den Punkt $R(14 \mid -6 \mid 15)$ geht.

Benutzen Sie dazu die im Unterricht verwendete Lösungsmethode.

b) Bestimmen Sie wie folgt rechnerisch den Abstand des Punktes $R(14 \mid -6 \mid 15)$ von der Geraden g : 25P

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $R(14 \mid -6 \mid 15)$ von allen Punkten P , die sich auf der Geraden g bewegen und diese durchlaufen und überlegen Sie wann dieser Abstand minimal wird (Extremwertaufgabe).

Benutzen Sie dazu die im Unterricht verwendete Lösungsmethode.

Lösungen:

a)

$F(x_{1F} \mid x_{2F} \mid x_{3F})$ sei der Punkt, der auf g und h liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3t_F \\ -7+2t_F \\ 5-t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} x_{1F} & = & 2+3t_F \\ x_{2F} & = & -7+2t_F \\ x_{3F} & = & 5-t_F \end{array}$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{FR} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 14-x_{1F} \\ -6-x_{2F} \\ 15-x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 14-(2+3t_F) \\ -6-(-7+2t_F) \\ 15-(5-t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 12-3t_F \\ 1-2t_F \\ 10+t_F \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12-3t_F \\ 1-2t_F \\ 10+t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot (12-3t_F) + 2 \cdot (1-2t_F) + (-1) \cdot (10+t_F) = 0 \Leftrightarrow 36 - 9t_F + 2 - 4t_F - 10 - t_F = 0 \Leftrightarrow$$

$$28 - 14t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = 2$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also: } F(8 \mid -3 \mid 3)$$

Dann gilt:

$$\overrightarrow{FR} = \begin{pmatrix} 14-8 \\ -6-(-3) \\ 15-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ und damit:}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 12 = 18 - 6 - 12 = 0 \Rightarrow h \text{ senkrecht zu } g$$

$$2) \vec{FR} = \begin{pmatrix} 14-8 \\ -6-(-3) \\ 15-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \implies |\vec{FR}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 12^2} = \sqrt{189} \text{ (siehe b))}$$

b)

b1) Für alle Punkte $P(x_1 | x_2 | x_3)$, die sich frei auf der Gerade g bewegen und diese durchlaufen, gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3t \\ -7+2t \\ 5-t \end{pmatrix}$$

also:

$$\vec{RP} = \begin{pmatrix} x_1 - 14 \\ x_2 - (-6) \\ x_3 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3t-14 \\ -7+2t+6 \\ 5-t-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12+3t \\ -1+2t \\ -10-t \end{pmatrix}$$

$$d(t) = |\vec{RP}| = \sqrt{(-12+3t)^2 + (-1+2t)^2 + (-10-t)^2} = \sqrt{144 - 72t + 9t^2 + 1 - 4t + 4t^2 + 100 + 20t + t^2} = \sqrt{245 - 56t + 14t^2}$$

$d(t) = |\vec{RP}|$ wird minimal, wenn man einen Wert für t findet, so dass der Wert $f(t) = 245 - 56t + 14t^2$ minimal wird.

Das bedeutet, dass wir die Extrempunkte der Funktion f bestimmen müssen.

b2) Ableitungen

$$f(t) = 245 - 56t + 14t^2$$

$$f'(t) = -56 + 28t$$

$$f''(t) = 28$$

b3) Extrempunkte $E(t_e|y_e)$: $f'(t_e) = 0$

$$-56 + 28t_e \iff t_e = 2$$

$f''(2) = 28 > 0$, d.h. Tiefpunkt, also Minimum

$H(2 | ?)$ ist TP

also:

$$d(2) = |\vec{RP}| = \sqrt{(-12+3 \cdot 2)^2 + (-1+2 \cdot 2)^2 + (-10-2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-12)^2} = \sqrt{36+9+144} = \sqrt{189}$$

also:

$$|\vec{RF}| = \sqrt{189}$$