

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an:

1) Aussage

2) Aussageform

3) allgemeingültig

4) Teilmenge

5) Vereinigung zweier Mengen

6) Durchschnitt zweier Mengen

7) Term

8) Gleichung

9) Definitionsmenge

10) Lösungsmenge

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an und machen Sie dazu jeweils ein Beispiel:

- |                               |    |
|-------------------------------|----|
| 1) Teilmenge                  | 5P |
| 2) Vereinigung zweier Mengen  | 5P |
| 3) Durchschnitt zweier Mengen | 5P |
| 4) Term                       | 5P |
| 5) Gleichung                  | 5P |
| 6) Definitionsmenge           | 5P |
| 7) Lösungsmenge               | 5P |

8) Bestimmen Sie die "größt mögliche" Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen (Grundmenge =  $\mathbb{R}$ ):

- a)  $\frac{1}{x} = 0$
- b)  $3x = 3x$
- c)  $x^2 = -16$
- d)  $x = 2x$
- e)  $\frac{1}{0} = \frac{x}{x-5}$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

I) Bestimmen Sie die Mengen (keine Venn – Diagramme) (4P)

1) gegeben:  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

gesucht:  $A \cup B$

2) gegeben:  $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ ,  $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

gesucht:  $E \cap F$

II) Formen Sie die Terme so in **einfachere** Terme um, dass sich allgemeingültige Gleichungen ergeben.

3)  $17a - 23b + 35c - 9a - 41c + 30b$  (1P)      4)  $\frac{20a^2 + 15ab - 35ac}{5a}$  (2P)

5)  $\frac{38u^2 - 57uv}{2u - 3v}$  (2P)    6)  $\frac{ax - ay}{5x - 5y}$  (2P)    7)  $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1}$  (4P)    8)  $\frac{2x+1}{x} - \frac{x+1}{x}$  (4P)

III) Die Grundmenge ist  $G = \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen.

9)  $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1}$  (4P)    10)  $\frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2}$  (4P)    11)  $\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3}$  (6P)

12)  $\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16}$  (5P)    13)  $\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1}$  (7P)

14)  $\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6}$  (7P)

Lösungen:

1)  $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

2)  $E \cap F = \emptyset$

3)  $17a - 23b + 35c - 9a - 41c + 30b = 8a + 7b - 6c$

4)  $\frac{20a^2 + 15ab - 35ac}{5a} = \frac{20a^2}{5a} + \frac{15ab}{5a} - \frac{35ac}{5a} = 4a + 3b - 7c$

5)  $\frac{38u^2 - 57uv}{2u - 3v} = \frac{19u(2u - 3v)}{2u - 3v} = 19u$

6)  $\frac{ax - ay}{5x - 5y} = \frac{a(x-y)}{5(x-y)} = \frac{a}{5}$

7)  $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{b}{a} + \frac{a}{a}} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{b+a}{a}} = \frac{(a+b)a}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

8)  $\frac{2x+1}{x} - \frac{x+1}{x} = \frac{2x+1-(x+1)}{x} = \frac{2x+1-x-1}{x} = 1$

9)

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1} \mid \cdot (x+1)(x-1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$L = \{-5\}$$

10)

$$\frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \mid \cdot (2-x)(x-2)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$L = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

11)

$$\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$x = 3$$

$$L = \{\}$$

12)

$$\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \mid \cdot (x^2-16)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{4; -4\}$$

$$3(x-4) - 2(x+4) = 5x - 20$$

$$3x - 12 - 2x - 8 = 5x - 20$$

$$x - 20 = 5x - 20 \mid \cdot +20 \mid \cdot -5x$$

$$-4x = 0$$

$$L = \{0\}$$

13)

$$\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \mid \cdot (x-1)(x+1)(x+2)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; -2\}$$

$$4(x-1)(x+1) - 1(x+1)(x+2) = 3(x-1)(x+2)$$

$$4(x^2-1) - 1(x^2+2x+x+2) = 3(x^2+2x-x-2)$$

$$4x^2 - 4 - x^2 - 2x - x - 2 = 3x^2 + 6x - 3x - 6$$

$$3x^2 - 6 - 3x = 3x^2 + 3x - 6 \mid -3x^2 \mid +6 \mid -3x$$

$$-6x = 0 \mid : (-6)$$

$$x = 0$$

$$L = \{0\}$$

14)

$$\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \mid \cdot 6(x-1)(x+1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$7(x-5)^2 = 2(5x-1)(x-1) - (3x-2)(x+1)$$

$$7(x^2-10x+25) = 2(5x^2-5x-x+1) - (3x^2+3x-2x-2)$$

$$7x^2 - 70x + 175 = 10x^2 - 10x - 2x + 2 - 3x^2 - 3x + 2x + 2$$

$$7x^2 - 70x + 175 = 7x^2 - 13x + 4 \mid -7x^2 \mid +70x \mid -4$$

$$171 = 57x \mid : 57$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS an:

a) 6 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

b) 5 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

c) 13 P

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}$$

d) 13 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{array}$$

e) 13 P

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 9 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Bemerkung zur Aufgabe:

Wenn die Lösungsmenge aus unendlich vielen Elementen besteht, muß zusätzlich noch ein konkretes Element der Lösungsmenge angegeben werden (gibt jeweils 2 Punkte).

Bei der Auswahl eines konkreten Elements dürfen nicht alle frei wählbaren Parameter Null gesetzt werden.

Lösungen:

1)

$$a)L = \{(9;8;7)\}$$

$$b)L = \{\}$$

c)

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$$

$$L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$$

wähle:  $x_2 = 1$ , dann gilt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

$$\text{also: } (1; 1) \in L$$

d)

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 \wedge x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

e)

$$x_2 = 4 - 9 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1$$

$$x_4 = 5 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1$$

$$x_5 = 2 - 5 \cdot x_3 - 7 \cdot x_1$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \mid x_2 = 4 - 9 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1 \wedge x_4 = 5 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 \wedge x_5 = 2 - 5 \cdot x_3 - 7 \cdot x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle:  $x_1 = 1; x_3 = 1$ , dann gilt:

$$x_2 = 4 - 9 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -7$$

$$x_4 = 5 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -5$$

$$x_5 = 2 - 5 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -10$$

$$\text{also: } (1; -7; 1; -5; -10) \in L$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

### AUFGABEN

1) Wie ist  $|x|$  definiert ? (4 P)

Formale Definition angeben, keine anschauliche Definition!

2) Geben Sie eine Äquivalenzumformung der folgenden Gleichung an: (4 P)

$$x^2 = 25$$

3) Vereinfachen Sie, falls dies möglich ist (und so weit wie möglich):

$$\sqrt{z^2} = \quad (4)$$

4) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an: (15 P)

$$x^2 = -4$$

$$x^2 = 0$$

$$|x| = -5$$

$$x^2 = 0,25$$

$$|x| = x$$

5) Ist folgende Gleichung allgemeingültig? Begründen Sie (konkret)! (4P)

$$\sqrt{x^2} = x$$

6) Machen Sie die quadratische Ergänzung zum folgenden Term: (10P)

$$x^2 - \frac{7}{3}x + ? = (? - ?)^2$$

7) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichung durch Äquivalenzumformungen (nicht durch "Mitternachtsformel") (10P)

$$(x - 1)^2 = 16$$

Lösungen:

1)

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$2) x^2 = 25 \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \iff |x| = 5 \iff x = 5 \vee x = -5$$

3)

$$\sqrt{z^2} = |z|$$

4)

$$x^2 = -4 \quad L = \{\}$$

$$x^2 = 0 \quad L = \{0\}$$

$$|x| = -5 \quad L = \{\}$$

$$x^2 = 0,25 \quad L = \{0,5; -0,5\}$$

$$|x| = x \quad L = \text{Menge aller positiven reellen Zahlen, einschließlich der } 0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$5) \sqrt{x^2} = x \quad \text{Setze für } x \text{ die Zahl } -3 \text{ ein. Dann folgt die falsche Aussage:}$$

$$\sqrt{(-3)^2} = -3$$

6)

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} x + ? = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6} x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{6}\right)^2$$

7)

$$(x - 1)^2 = 16 \iff (\text{Wurzelziehen auf beiden Seiten})$$

$$|x - 1| = \sqrt{16} = 4 \iff$$

$$x - 1 = 4 \vee x - 1 = -4 \iff$$

$$x = 5 \vee x = -3 \iff$$

also:

$$L = \{-3; 5\}$$



**Kurztest 3    Mathematik 1    2BK11    Nachtermin    Zeit: 10 Minuten**

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

**AUFGABEN**

1) 10P

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an:

- a) Funktion,
- b) Punktprobe

2) 6P

Welche 3 Möglichkeiten gibt es, eine Funktion darzustellen?

3) 4P

Zeichnen Sie ein Schaubild an, das nicht zu einer Funktion gehört.

4) 16P

Gegeben ist die Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung

a)  $g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

$g(x^2 + \pi)$

b) Gegeben sei die Funktion  $f(x) = 2x+1$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

$f(x^2)$ ,  $f(2x)$ ,  $f(x+1)$ ,  $f(\sin(x))$

5) 6P

Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge  $D$  und den Wertebereich der folgenden Funktion  $h$  an:

$h(x) = \frac{1}{x}$

6)

4P

Eine Parallele zur y-Achse geht durch den Punkt  $P(3 \mid 1)$ .  
Wie heißt die Gleichung dieser Geraden?

7)

4P

Wie heißt die Funktionsgleichung der Geraden, die identisch ist mit der x-Achse?

Lösung:

Lösungen:

1)a) Eine Funktion  $f$  ist eine Menge von geordneten Zahlenpaaren  $(x,y)$ .

Dabei wird jedem Element  $x \in D$  (Definitions Menge) genau ein Element  $y \in Z$  (Zielmenge) zugeordnet. Das zugeordnete Element  $y$  wird auch mit  $f(x)$  bezeichnet.

b) Gegeben ist eine Funktion  $f$ .

Liegt ein Punkt  $P(x_p | y_p)$  auf dem Graphen  $K_f$ , so erfüllen seine Koordinaten  $x_p$  und  $y_p$  die Funktionsgleichung  $y = f(x)$ .

Also gilt:

$$y_p = f(x_p)$$

2) Funktionsgleichung, Wertetabelle, Paarmenge, Schaubild

3) z.B: Kreis

4)

a)  $g(x^2 + \pi) = (\sin(x^2 + \pi) + \pi)^2 - \sqrt{x^2 + \pi}$

b)

$$f(x^2) = 2 * (x^2) + 1$$

$$f(2x) = 2 * (2x) + 1$$

$$f(x+1) = 2 * (x+1) + 1$$

$$f(\sin(x)) = 2 * \sin(x) + 1$$

5)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

6)  $x = 3$

7)  $y = 0$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

Bemerkung: Auf saubere Schreibweise und Syntax wird besonders Wert gelegt !!!!

1)

Gegeben sind die Funktionen  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  (Die Definitionsmenge und die Zielmenge ist jeweils  $\mathbb{R}$ ) mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = -\frac{5}{3}x + 1$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{2}x - 2$$

$$f_3(x) = \frac{2}{3}x - 1$$

1)

6P

Zeichnen Sie das Schaubild  $K_{f_1}$  von  $f_1$ , das Schaubild  $K_{f_2}$  von  $f_2$  und das Schaubild  $K_{f_3}$  von  $f_3$  in genau **ein** einziges rechtwinkliges Koordinatensystem (x-Achse:  $[-5; 4]$ , y-Achse:  $[-5; 5]$ ,  $LE = 1 \text{ cm}$ )

Geben Sie die Schnittpunkte  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  an (Koordinaten aus der Zeichnung ablesen).

2)

7P

Bestimmen Sie rechnerisch den (die) Schnittpunkt(e) der Geraden  $K_{f_1}$  mit  $K_{f_2}$ .

3)

7P

Die Parallele  $K_h$  zu  $K_{f_3}$  geht durch den Punkt  $P_1(-1,5 | 2)$ .

Wie heißt die Funktionsgleichung von  $K_h$ ?

Bitte  $K_h$  in das obige Koordinatensystem einzeichnen!

4)

4P

Prüfen Sie rechnerisch ob gilt:

$$Q(4 | 1,5) \in K_{f_3}$$

5)

2P

Wie lautet die Gleichung des Schaubilds, das parallel zur y-Achse ist und durch  $P_2(3 | 0)$  geht?

- 6) 4P  
Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Geraden  $K_{f3}$  mit der x-Achse.
- 7) 9P  
Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Senkrechten  $K_{f3S}$  auf  $K_{f3}$ , die außerdem auf einem Punkt  $P_4 \in K_{f3}$  liegt, dessen x-Koordinate 3 ist.  
 $K_{f3S}$  in das Koordinatensystem einzeichnen!
- 8) 2P  
Geben Sie die Lösung der Aufgabe 7 durch die PSF an.  
Nur Ansatz machen, nicht Gleichung auflösen.

Lösungen:

1) Zeichnung 6P

2) 7P

Schnittpunkt  $S_1(x_S | y_S)$  von  $K_{f1}$  und  $K_{f2}$  (2P)

(oder etwas mathematischer formuliert:  $K_{f1} \cap K_{f2} = S_1(x_S | y_S)$ ):

$$-\frac{5}{3}x_S + 1 = y_S = -\frac{1}{2}x_S - 2$$

$$-\frac{5}{3}x_S + 1 = -\frac{1}{2}x_S - 2$$

$$x_S = \frac{18}{7} \quad (3P)$$

$$y_S = -\frac{23}{7} \quad (1P)$$

$$S_1\left(\frac{18}{7} \mid -\frac{23}{7}\right) \approx S_1(2,6 \mid -3,3) \quad (1P)$$

3) 7P

Die Parallele  $K_h$  zu  $K_{f3}$  geht durch den Punkt  $P_1(-1,5 \mid 2)$ .

Sei  $h$  die zu  $K_h$  gehörige Funktion.

Da  $K_h$  eine Parallele zu  $K_{f3}$  ist, hat sie die gleiche Steigung wie  $K_{f3}$ . Der y-Achsenabschnitt von  $K_h$  sei  $b$ . Die Funktionsgleichung von  $h$  ist also:

$$h(x) = \frac{2}{3}x + b \quad (1P)$$

Punktprobe für  $P_1$ : (2P)

Da  $P_1(-1,5 \mid 2) \in K_h$ , gilt:

$$2 = \frac{2}{3} \cdot (-1,5) + b \quad (2P)$$

$b = 3$ , also:

$$h(x) = \frac{2}{3}x + 3 \quad (1P)$$

Zeichnung (1P)

4) 4P

Sei  $Q_3(4 \mid 1,5) \in K_{f3}$ , dann gilt: (2P)

$$1,5 = \frac{2}{3} \cdot 4 - 1 \quad (\text{falsch}) \quad (1P)$$

also:  $Q_3(4 \mid 1,5) \notin K_{f3}$  (1P)

5) 2P

$x = 3$

6) 4P

Schnittpunkte  $S_x(x_S \mid 0)$  mit der x-Achse:  $S_x(x_S \mid 0) \in K_{f3}$ , also: (2P)

$$0 = \frac{2}{3}x_S - 1$$

$$x_S = 1,5 \quad (1P)$$

$$S_x(1,5 \mid 0) \quad (1P)$$

7)

9P

y-Koordinate des Punkts  $P_4$  berechnen:

$$f_3(3) = \frac{2}{3} \cdot 3 - 1 = 1, \text{ also } P_4(3 \mid 1) \quad (1P)$$

Steigung  $m$  der zu  $K_{f3}$  senkrechten Geraden  $K_{f3s}$  (1P)

$$m = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

Damit gilt für die Funktionsgleichung von  $K_{f3s}$ 

$$f_{3s}(x) = -\frac{3}{2}x + b \quad (1P)$$

Punktprobe für  $P_4$ Da  $P_4(3 \mid 1) \in K_{f3s}$  gilt: (2P)

$$1 = -\frac{3}{2} \cdot 3 + b$$

$$b = \frac{11}{2}, \text{ also:} \quad (2P)$$

$$f_{3s}(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \quad (1P)$$

Zeichnung (1P)

8)

2P

$$\frac{y-1}{x-3} = -\frac{3}{2}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) 15P  
Legen Sie an das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = \frac{1}{2}x^5 + 3x^4 + 4$$

Tangenten parallel zur Gerade mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 7x$$

Bestimmen Sie rechnerisch den Berührungspunkt.

**Den Ansatz machen und dann rechnen, bis man eine Gleichung mit einer Unbekannten hat. Nicht komplett durchrechnen !!**

2) 15P  
Gegeben ist die Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung:

$$f(x) = 5x^2 - 3x - 1$$

Legen Sie die Tangenten in den Punkten  $B_1(-4 | ?)$  und  $B_2(8 | ?)$  der Kurve  $K_f$  und bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Tangenten.

**Wie gehen Sie vor?**

**Nicht rechnen, sondern verbale Beschreibung, wie man die Lösung rechnerisch erreicht!**

3) 20P  
Legen Sie von  $P(-4 | -2)$  aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -4x^2 + 5x - 9$$

Bestimmen Sie rechnerisch die Berührungspunkte und die Funktionsgleichungen der Tangenten.

**Den Ansatz machen und dann rechnen, bis man eine Gleichung mit einer Unbekannten hat. Nicht komplett durchrechnen !!**



Lösungen:

1)

$$h'(x) = \frac{5}{2}x^4 + 12x^3$$

Der gesuchte Berührungspunkt sei  $B(x_B | y_B)$ .

Dort ist die Steigung 7

also gilt:

$$7 = h'(x_B) = \frac{5}{2}x_B^4 + 12x_B^3$$

also gilt;

$$7 = \frac{5}{2}x_B^4 + 12x_B^3$$

2)

a) y-Koordinatenwerte der Berührungspunkte berechnen, indem man die x-Koordinatenwerte der Berührungspunkte in die Funktionsgleichung von f einsetzt. Damit hat man die Berührungspunkte.

b) Steigungen an den Berührungspunkte berechnen, indem man die x-Koordinatenwerte der Berührungspunkte in die Ableitungsfunktion f' einsetzt. Damit hat man die Steigungen.

c) Mit der PSF die Funktionsgleichungen der Tangenten berechnen.

d) Durch "Gleichsetzen" der Funktionsgleichungen der Tangenten den Berührungspunkt berechnen.

3)

Tangentenbedingung, kurz TB

Der gesuchte Berührungspunkt sei  $B(x_B, y_B)$ .

$$f'(x) = -8x + 5$$

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{y_B + 2}{x_B + 4} = f'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$y_B = -4x_B^2 + 5x_B - 9 \quad \text{und} \quad f'(x_B) = -8x_B + 5$$

Setze dies in (TB) ein, dann kommt in dieser Gleichung nur noch eine Unbekannte vor.

$$\frac{-4x_B^2 + 5x_B - 9 + 2}{x_B + 4} = -8x_B + 5$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

- 1) 50P
- Zeichnen Sie das Schaubild der folgenden Funktion, in jeweils dem Bereich, in dem interessante Punkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte) vorkommen. Untersuchen Sie rechnerisch das Schaubild folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$$

bezüglich:

- a) Symmetrie
- b) Achsenschnittpunkte
- c) Ableitungen
- d) Extrempunkte
- e) Wendepunkte und Wendetangenten

Bemerkungen:

- 1) Aufgabe genau nach dem Schema der im Unterricht behandelten Musteraufgaben lösen.
- 2) Rechnungen ausführlich (z.B. Mitternachtsformel nicht mit TR lösen) darstellen.
- 3) TR nur zur Probe benutzen.

## Lösungen

$$14) f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$$

a) Symmetrie

$$a1) f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - 3(-x)^2 + 9(-x) = -\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 - 9x \neq f(x)$$

Das Schaubild  $K_f$  ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$a2) -f(-x) = -\left(\frac{1}{4}(-x)^3 - 3(-x)^2 + 9(-x)\right) = \frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 9x \neq f(x)$$

Das Schaubild  $K_f$  ist nicht punktsymmetrisch bzgl.  $O(0|0)$ .

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte  $S_y(0|y_s)$  mit der y-Achse:  $S_y(0|y_s) \in K_f$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$$

$S_y(0|0)$

b2) Schnittpunkte  $S_x(x_s|0)$  mit der x-Achse:  $S_x(x_s|0) \in K_f$

$$0 = \frac{1}{4}x_s^3 - 3x_s^2 + 9x_s \quad | \cdot 4$$

$$0 = x_s^3 - 12x_s^2 + 36x_s \iff 0 = x_s(x_s^2 - 12x_s + 36)$$

$$\text{Fall 1: } 0 = x_s^2 - 12x_s + 36$$

$$\text{Fall 2: } x_s = 0$$

$$x_{s2} = 0$$

$$x_{s1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_{s1} = 6$$

damit Nullstellen von f:

$S_{x1}(0|0), S_{x2}(6|0)$

c) Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2}$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte  $E(x_e|y_e)$ :  $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{3}{4}x_e^2 - 6x_e + 9 \quad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$0 = x_e^2 - 8x_e + 12$$

$$x_{e1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2$$

$$x_{e1} = 2$$

$$x_{e2} = 6$$

$$f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 6 = -3 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$f''(6) = \frac{3}{2} \cdot 6 - 6 = 3 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8$$

$$y_{e2} = f(6) = \frac{1}{4} \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + 9 \cdot 6 = 0$$

damit

H(2 | 8) Hochpunkt, T(6 | 0) Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte  $W(x_w|y_w)$ :  $f''(x_w) = 0$

$$0 = \frac{3}{2}x_w - 6 \quad | \cdot 2$$

$$0 = 3x_w - 12$$

$$x_w = 4$$

$$f'''(4) = \frac{3}{2} \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_w = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 = 4$$

damit:

W(4 | 4) Wendepunkt

f) Wendetangenten

Gleichung der Wendetangente in W(4 | 4):

$$f'(4) = \frac{3}{4} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 9 = -3, \text{ damit gilt nach der PSF:}$$

$$-3 = \frac{y-4}{x-4} \iff y-4 = -3(x-4) \iff y = -3x+16$$

$$t: y = -3x+16$$

# KLAUSUR 3    Mathematik 1    2BKI1    Nachtermin    Zeit: 30 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

Eine Parabel 3. Ordnung geht durch  $O(0 \mid 0)$  und hat ihren Wendepunkt in  $P(1 \mid -2)$ . Die Wendetangente schneidet die x-Achse in  $Q(2 \mid 0)$ . Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel?

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

a)  $O(0 \mid 0) \in K_f$

$$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$

$$d = 0$$

b)  $P(1 \mid -2) \in K_f$

$$-2 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$$

$$-2 = a + b + c + d \quad (G1)$$

c)  $P(1 \mid -2)$  ist Wendepunkt

$$f''(1) = 0$$

$$6a \cdot 1 + 2b = 0$$

$$6a + 2b = 0$$

$$3a + b = 0 \quad (G2)$$

d) Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt  $Q(2 \mid 0)$

Steigung  $m$  der Wendetangente (durch  $P(1 \mid -2)$  und  $Q(2 \mid 0)$ )

$$m = \frac{-2 - 0}{1 - 2} = 2 \quad (\text{Steigungsdreieck})$$

andererseits:

$$2 = m = f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c$$

$$2 = 3a + 2b + c \quad (G3)$$

e)  $d = 0$  eingesetzt in (G1) ergibt:

$$-2 = a + b + c \quad (G4)$$

$$3a + b = 0 \quad (G2)$$

$$2 = 3a + 2b + c \quad (G3)$$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus

(G2), (G3) und (G4):

$$a = -4, \quad b = 12, \quad c = -10$$

g) Ergebnis:

$$f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 10x$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) 7P

Geben Sie die Bedingungen für einen Hochpunkt  $H(x_H, y_H)$  an (kein VZW verwenden)

2) 7P

Geben Sie die Bedingungen für einen Hochpunkt an  $H(x_H, y_H)$  (VZW verwenden)

3) 7P

Geben Sie die Bedingungen für einen Tiefpunkt  $T(x_T, y_T)$  an (kein VZW verwenden)

4) 7P

Geben Sie die Bedingungen für einen Tiefpunkt an  $T(x_T, y_T)$  (VZW verwenden)

5) 7P

Begründen Sie, ob das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^5$  an  $P(0 | 0)$  einen Extrempunkt hat.

6) 7P

Begründen Sie, ob das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^6$  an  $P(0 | 0)$  einen Extrempunkt hat.

7) 8P

Begründen Sie, ob das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^7$  an  $P(0 | 0)$  einen Wendepunkt hat.

Lösungen:

1)  $f'(x_H) = 0 \wedge f''(x_H) < 0 \implies H(x_H, y_H)$  ist Hochpunkt

2)  $H(x_H, y_H)$  ist Hochpunkt  $\iff f'$  macht an  $x_H$  eine VZW von + nach -

3)  $f'(x_T) = 0 \wedge f''(x_T) > 0 \implies T(x_T, y_T)$  ist Tiefpunkt.

4)  $T(x_T, y_T)$  ist Tiefpunkt  $\iff f'$  macht an  $x_T$  eine VZW von - nach +

5)

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$f'(0) = 0$  und  $f''(0) = 0$ , also keine Aussage möglich.

Da aber  $f'(x)$  an der Stelle  $x = 0$  keinen VZW macht, hat die Funktion  $f$  keinen Extrempunkt.

6)

$$f(x) = x^6$$

$$f'(x) = 6x^5$$

$$f''(x) = 30x^4$$

$f'(0) = 0$  und  $f''(0) = 0$ , also keine Aussage möglich.

Da aber  $f'(x)$  an der Stelle  $x = 0$  einen VZW von - nach + macht, hat die Funktion  $f$  dort einen Tiefpunkt.

7)

$$f(x) = x^7$$

$$f'(x) = 7x^6$$

$$f''(x) = 42x^5$$

$$f'''(x) = 210x^4$$

$f'(0) = 0$  und  $f''(0) = 0$ , also keine Aussage möglich.

Da aber  $f''(x)$  an der Stelle  $x = 0$  einen VZW macht, hat die Funktion  $f$  dort einen Wendepunkt.



**Kurztest 5    Mathematik 1    2BKI1    12.4.2011    Zeit: 15 Minuten**

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkung:

Taschenrechner dürfen nicht verwendet werden!!!

**AUFGABEN**

1) Lösen Sie die Gleichung  $r^x = s$  (wobei  $r > 0$ ,  $r \neq 1$ ,  $s > 0$ ) auf nach:

- a)  $x$  1P
- b)  $r$  1P

2) Berechnen Sie:

- a)  $\ln e^7$  1P
- b)  $\ln 1$  1P
- c)  $\ln e$  1P

3) Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

- a)  $\log_{10}(a \cdot a)$  2P
- b)  $\ln(x - y)$  2P
- c)  $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$  2P
- d)  $\log_a 1$  1P
- e)  $\log_a a$  1P
- f)  $\log_a a^x$  2P
- g)  $\log_a ((a^n)^m)$  3P
- h)  $\log_a \frac{a^n}{a^m}$  3P

Lösungen:

1)

a)  $x = \log_r s$

b)  $r = \sqrt[x]{s} = s^{1/x}$

2)

a)  $\ln e^7 = \log_e e^7 = 7$

b)  $\ln 1 = \log_e 1 = 0$

c)  $\ln e = \log_e e = 1$

3)

a)  $\log_{10}(a \cdot a) = \log_{10} a^2 = 2 \log_{10} a$

b)  $\ln(x - y)$  "keine Umformung möglich"

c)  $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 \ln e = -2$

d)  $\log_a 1 = 0$

e)  $\log_a a = 1$

f)  $\log_a a^x = x$

g)  $\log_a ((a^n)^m) = \log_a (a^{nm}) = nm \cdot \log_a a = nm$

h)  $\log_a \frac{a^n}{a^m} = \log_a a^{n-m} = (n-m) \log_a a = n-m$

*Name, Vorname:*Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

**AUFGABEN**1) 16PDer Graph einer Exponentialfunktion  $h$  mit  $f(x) = \frac{3}{2}e^{x-1} - c$  geht durch  $P(2 \mid \frac{e}{2})$ Geben Sie den den vollständigen Funktionsterm von  $f$  an (bitte mit formaler Herleitung).2) 17PGegeben ist die Funktion  $h(x) = 5^{\frac{1}{4}x} + 2$ Die Funktion  $g$  entsteht aus der Funktion  $h$  durch Spiegelung an der  $y$ -Achse.Wie lautet die Funktionsgleichung  $g(x)$  in Wurzelschreibweise ? (gilt nur mit Herleitung)3) 18P

Berechnen Sie folgende Terme:

- a)
- $\ln e^5$
- b)
- $\ln(\frac{1}{e^3})$
- c)
- $\ln(e^{-a})$
- d)
- $\ln(-2e)$
- e)
- $e^{\ln 3}$
- f)
- $2 \ln e - 5$

Lösungen:

$$1) P(2 \mid \frac{e}{2}) \in K_f: \frac{e}{2} = \frac{3}{2}e^{2-1} - c \iff \frac{e}{2} = \frac{3}{2}e^1 - c \iff c = \frac{3}{2}e - \frac{e}{2} = e$$

2)

$$g(x) = h(-x) = 5^{\frac{1}{4}(-x)} + 2 = 5^{-\frac{x}{4}} + 2 = \frac{1}{5^{\frac{x}{4}}} + 2 = \frac{1}{\sqrt[4]{5^x}} + 2$$

3)

$$a) \ln e^5 = 5$$

$$b) \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = \ln(e^{-3}) = -3 \cdot \ln e = -3$$

$$c) \ln(e^{-a}) = -a \cdot \ln e = -a$$

$$d) \ln(-2e) \text{ nicht definiert.}$$

$$e) e^{\ln 3} = 3$$

$$f) 2 \ln e - 5 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

**AUFGABEN**

1) 10P

Um das wie vielfache seines Anfangskapitals vervielfacht sich dieses bei einem Jahreszinssatz von 3% (wenn die Zinsen auf der Bank gelassen werden) nach 10 Jahren?

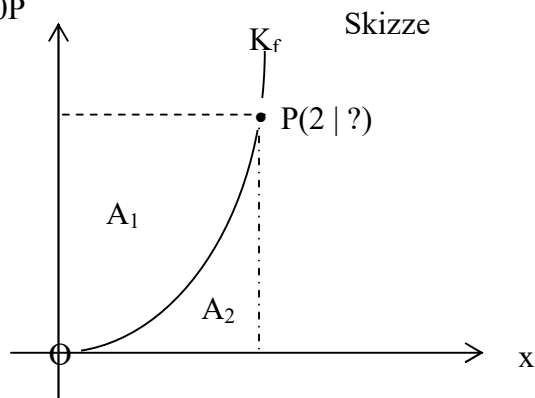
2) 10P

In Abhängigkeit der Zeit gilt beim Entladevorgang des Kondensators:

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}; \text{ wobei } U_0 \neq 0, R \neq 0, C \neq 0$$

Lösen Sie diese Gleichung nach  $t$  auf (umformen nach  $t$ ).

3) 30P



$K_f$  ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^2$

Die Fläche  $A_1$  wird durch  $K_f$ , die  $y$ -Achse und die waagrechte Gerade, die durch  $P$  geht, begrenzt. Die Fläche  $A_2$  wird durch  $K_f$ , die  $x$ -Achse und die senkrechte Gerade, die durch  $P$  geht, begrenzt.

a) Begründen Sie anschaulich, warum  $A_1 > A_2$  ist.

b) Um das wie vielfache ist  $A_1$  größer als  $A_2$  ?

c) Um das wie vielfache ist  $A_1$  größer als  $A_2$  , wenn  $P(a | ?) \in K_f$  ein beliebiger Punkt ist ( $a > 0$ ) ?

## Lösungen

1)

a)  $q = 1,03$

5P

$$K_{10} = K_0 \cdot q^{10}$$

$$\frac{K_{10}}{K_0} = \frac{10000 \cdot q^{10}}{10000} = q^{10} = 1,03^{10} \approx 1,34$$

b)  $q = 1,03$

5P

$$K_{10} = K_0 \cdot q^{10}$$

$$\frac{K_{10}}{K_0} = \frac{K_0 \cdot q^{10}}{K_0} = q^{10} = 1,03^{10} \approx 1,34$$

2)

10P

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad | : U_0$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0}$$

$$-\frac{t}{RC} = \log_e \frac{U}{U_0} = \ln \frac{U}{U_0}$$

$$t = -RC \cdot \ln \frac{U}{U_0}$$

3) 5P

a) Sei  $A_R$  die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da  $K_f$  unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt:  $A_1 > A_R/2 > A_2$

Damit gilt dann:

$$A_1 > A_2$$

b) 10P

$$A_2 = \int_0^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = 2 \cdot f(2) - A_2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16/3}{8/3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung  $A_1$ ):

$$A_1 = \int_0^2 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 (f(2) - x^2) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

c) 15P

$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{3} a^3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung  $A_1$ ):

$$A_1 = \int_0^a (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^a (f(a) - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

