

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M \setminus \{ \}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 10P

Gegeben sind die Punkte

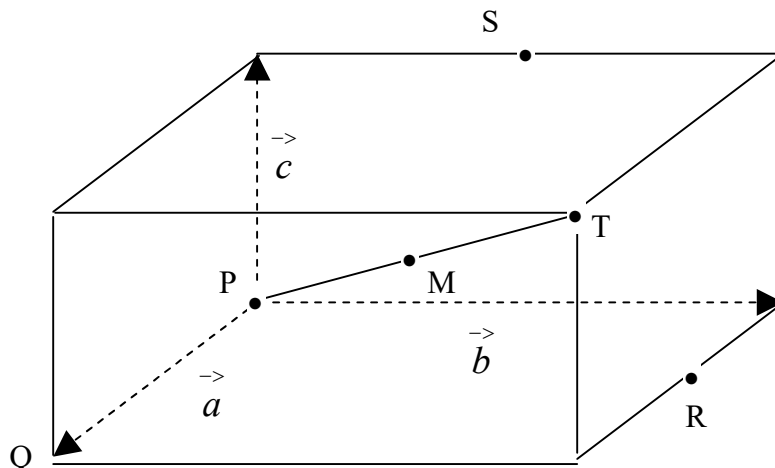
$A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(1 \mid 2 \mid 3)$, $C(4 \mid 0 \mid 4)$ und $D(3 \mid -2 \mid 1)$.

a) Zeichne die Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein.

b) Untersuche rechnerisch, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

Tipp: nutze die Eigenschaft der Parallelität von Vektoren.

2) 10P



R und S sind Kantenmitten eines Quaders. M ist die Mitte der durch P und T gehenden Diagonalen.

a) Stelle den Vektor \overrightarrow{RS} als Linearkombination der Vektoren \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} und \overrightarrow{c} dar.

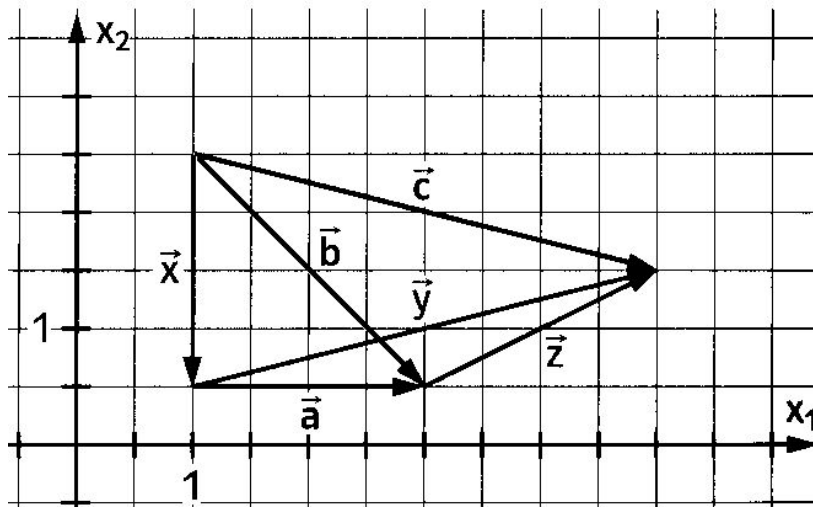
b) Stelle den Vektor \overrightarrow{SQ} als Linearkombination der Vektoren \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} und \overrightarrow{c} dar.

c) Stelle den Vektor \overrightarrow{PT} als Linearkombination der Vektoren \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} und \overrightarrow{c} dar.

d) Stelle den Vektor \overrightarrow{TM} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dar.

3)

10P



Stelle die Vektoren \vec{x} , \vec{y} und \vec{z} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} im zweidimensionalen Raum dar und berechne sie.

4)

20P

Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(4 \mid 4 \mid 2)$, $C(2,5 \mid 2,5 \mid 4)$ und $D(2 \mid 0 \mid 4)$.

a) Zeige rechnerisch (mit Hilfe der Vektorrechnung) : das Viereck ABCD ist ein Trapez und kein Parallelogramm.

Tipp: nutze die Eigenschaft der Parallelität von Vektoren.

b) Bestimme rechnerisch (mit Hilfe der Vektorrechnung) die Koordinaten des Mittelpunkts der Diagonalen \overline{BD} .

Lösungen:

1)

b.) Untersuche rechnerisch, ob ABCD ein Parallelogramm ist.

A(0 | 0 | 0), B(1 | 2 | 3), C(4 | 0 | 4) und D(3 | -2 | 1).

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \vec{DC} &= \begin{pmatrix} 4-3 \\ 0-(-2) \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \vec{AD} &= \begin{pmatrix} 3-0 \\ -2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{BC} &= \begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

also: $\vec{AB} = \vec{DC}$ und $\vec{AD} = \vec{BC} \implies$ Parallelogramm

2)

$$\begin{aligned}\vec{RS} &= -\vec{a}/2 + \vec{c} - \vec{b}/2 & \vec{SQ} &= -\vec{b}/2 - \vec{c} + \vec{a} \\ \vec{PT} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} & \vec{TM} &= -\vec{PT}/2 = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})/2\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \vec{y} &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2-2+4 \\ 0-(-2)+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{z} &= -\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 2+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4)

a)

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{DC} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vec{AB} = 2 \vec{DC} \implies \vec{AB} \parallel \vec{DC} \\ \vec{AD} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \vec{AD} \text{ und } \vec{BC} \text{ sind nicht parallel}\end{aligned}$$

b)

Für den Mittelpunkt M gilt:

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OB} + \frac{1}{2} \vec{BD} \\ \vec{BD} &= \begin{pmatrix} 2-4 \\ 0-4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} & \vec{OM} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

also M(3 | 2 | 3)

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1)

50P

a)

Werden die 4 folgenden Punkte von P_1 bis P_4 hintereinander von einem Düsenjäger in der Luft durchflogen, bildet die weiße Spur ein Viereck.

$P_1(1 \mid 2 \mid 3)$, $P_2(5 \mid 10 \mid 0)$, $P_3(8 \mid 16 \mid 9)$, $P_4(2 \mid 4 \mid 6)$

Berechnen Sie alle Winkel dieses Vierecks und machen Sie die Probe (Summe aller Winkel in einem Viereck sind 360°)

b)

Berechnen Sie auf 2 verschiedene Arten den Flächeninhalt des Vierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$

Bemerkungen:

1) Ein Viereck besteht aus 2 Dreiecken

2) Ausführliche, leicht nachvollziehbare Darstellung (wie im Unterricht).

Alle Winkel über das Skalarprodukt berechnen (nicht über die Winkelsumme im Dreieck).

1. Lösung (Insiderwissen)

Dieses Viereck wurde so konstruiert, dass es auf folgendem Parallelogramm liegt und den 2/3 Flächeninhalt davon hat. A(0 | 0 | 0), B(3 | 6 | 9), C(8 | 16 | 9), D(5 | 10 | 0)

Das Parallelogramm besteht also aus den 6 Dreiecke

A(0 | 0 | 0), P(1 | 2 | 3), D(5 | 10 | 0)

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks APD

$\alpha = \angle PAD$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 10-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + 10^2 + 0^2}} = \frac{25}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{125}} = \frac{25}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5} \cdot 5} = \frac{5}{\sqrt{70}}$$

$$\alpha \approx 53,300774799510116989768226872627^\circ$$

also:

$$F_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin \alpha \approx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{125} \cdot 0,80178372573727315405366044263926 \approx$$

$$16,770509831248422723068802515479$$

Also:

$$F_{\text{Viereck}} = 4 \cdot F_{\text{Dreieck}} = 4 \cdot 16,770509831248422723068802515479 \approx$$

$$67,082039324993690892275210061916$$

I) Berechnung der Winkel:

1) Winkel $\alpha = \angle P_4 P_1 P_2$

$P_1(1 \mid 2 \mid 3)$, $P_2(5 \mid 10 \mid 0)$, $P_3(8 \mid 16 \mid 9)$, $P_4(2 \mid 4 \mid 6)$

$\alpha = \angle P_4 P_1 P_2$

$$\overrightarrow{P_1 P_4} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 10-2 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot (-3)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{89}} = \frac{11}{\sqrt{1246}}$$

$$\alpha \approx 71,842752763507352515799192125869^\circ$$

2) Winkel $\beta = \angle P_1 P_2 P_3$

$P_1(1 \mid 2 \mid 3)$, $P_2(5 \mid 10 \mid 0)$, $P_3(8 \mid 16 \mid 9)$, $P_4(2 \mid 4 \mid 6)$

$$\overrightarrow{P_2 P_1} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 2-10 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_2 P_3} = \begin{pmatrix} 8-5 \\ 16-10 \\ 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right|} = \frac{(-4) \cdot 3 + (-8) \cdot 6 + 3 \cdot 9}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{126}} = \frac{-33}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{126}}$$

$$\frac{-33}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{9 \cdot 14}} = \frac{-33}{\sqrt{89} \cdot 3\sqrt{14}} = \frac{-11}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\beta \approx 108,15724723649264748420080787413^\circ$$

3) Winkel $\gamma = \angle P_2 P_3 P_4$

$P_1(1 \mid 2 \mid 3)$, $P_2(5 \mid 10 \mid 0)$, $P_3(8 \mid 16 \mid 9)$, $P_4(2 \mid 4 \mid 6)$

$$\overrightarrow{P_3 P_4} = \begin{pmatrix} 2-8 \\ 4-16 \\ 6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_3 P_2} = \begin{pmatrix} 5-8 \\ 10-16 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{(-6) \cdot (-3) + (-12) \cdot (-6) + (-3) \cdot (-9)}{\sqrt{189} \cdot \sqrt{126}} = \frac{117}{\sqrt{189} \cdot \sqrt{126}}$$

$$\frac{-117}{\sqrt{9 \cdot 21} \cdot \sqrt{9 \cdot 14}} = \frac{-117}{3\sqrt{21} \cdot 3\sqrt{14}} = \frac{-13}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\gamma \approx 40,696392151130934946607495379964^\circ$$

4) Winkel $\delta = \angle P_1 P_4 P_3$

$$\overrightarrow{P_4 P_1} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-4 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_4 P_3} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 16-4 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cos \delta = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-1 \cdot 6 + (-2) \cdot 12 + (-3) \cdot 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{189}} = \frac{-39}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{189}}$$

$$\delta \approx 139,30360784886906505339250462004^\circ$$

5)

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \approx$$

$$71,842752763507352515799192125869^\circ + 108,15724723649264748420080787413^\circ + 40,696392151130934946607495379964^\circ + 139,30360784886906505339250462004^\circ \approx 360^\circ$$

II) Berechnung der Flächen:

$$1) A_1 = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{P_1 P_4}| \cdot |\overrightarrow{P_1 P_2}| \cdot \sin \alpha \approx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{89} \cdot \sin 71,842752763507352515799192125869^\circ \approx$$
$$16,770509831248422723068802515485$$

$$2) A_2 = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{P_3 P_4}| \cdot |\overrightarrow{P_3 P_2}| \cdot \sin \gamma \approx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{189} \cdot \sqrt{126} \cdot \sin 40,696392151130934946607495379964^\circ$$
$$\approx 50,311529493745268169206407546454$$

also:

$$A_1 + A_2 \approx 16,770509831248422723068802515485 +$$
$$50,311529493745268169206407546454 \approx$$
$$67,082039324993690892275210061935$$

$$3) A_3 = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{P_4 P_1}| \cdot |\overrightarrow{P_4 P_3}| \cdot \sin \delta \approx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{189} \cdot \sin 139,30360784886906505339250462004^\circ$$
$$\approx 16,770509831248422723068802515485$$

4)

$$A_4 = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{P_2 P_1}| \cdot |\overrightarrow{P_2 P_3}| \cdot \sin \beta \approx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{89} \cdot \sqrt{126} \cdot \sin 108,15724723649264748420080787413^\circ \approx$$
$$50,311529493745268169206407546454$$

also:

$$A_3 + A_4 \approx 16,770509831248422723068802515485 +$$
$$50,311529493745268169206407546454 \approx$$
$$67,082039324993690892275210061935$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

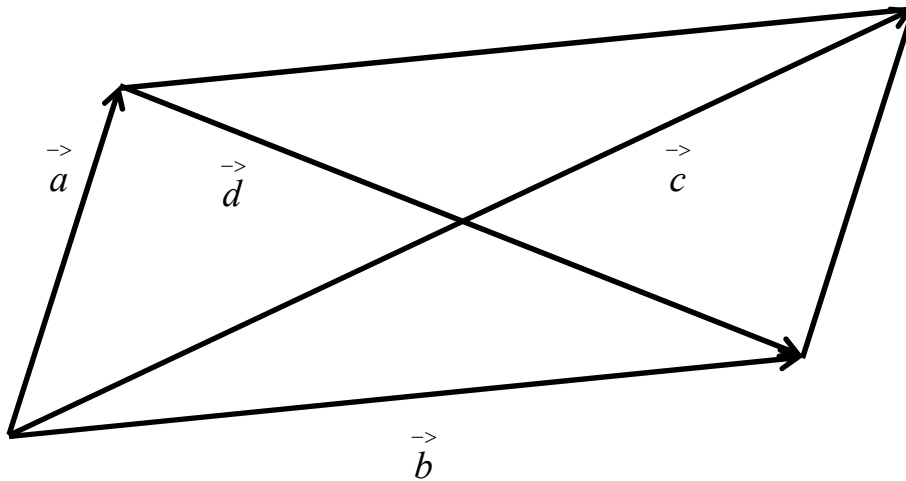
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1)

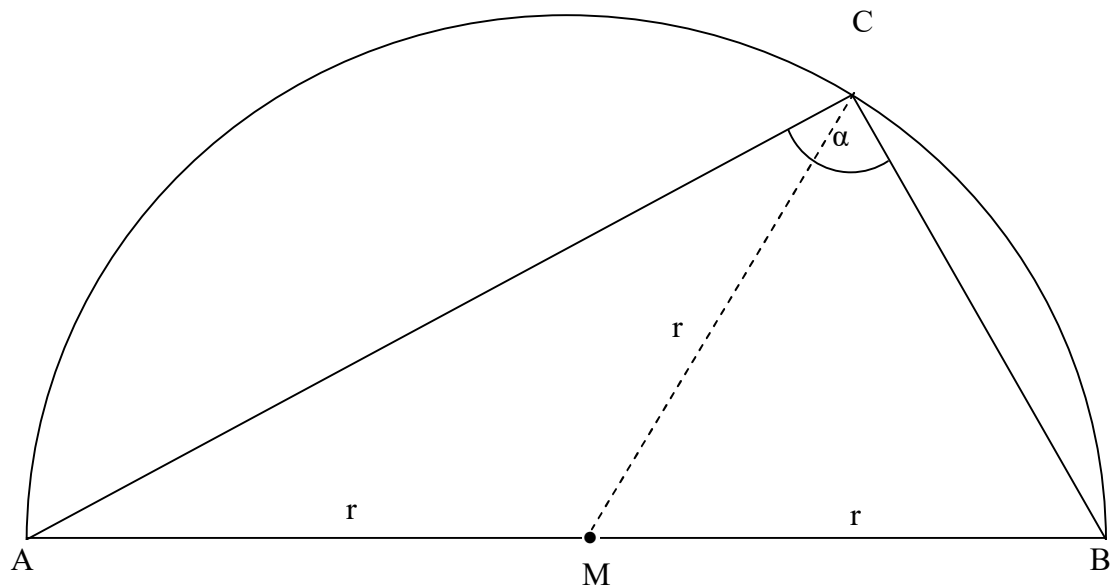
Gegeben ist das folgende Parallelogramm:



- a) Stelle Sie die Vektoren \vec{a} , \vec{b} als Linearkombination der Vektoren (Diagonalen) \vec{c} und \vec{d} dar.
- b) Berechnen Sie dann das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (in Abhängigkeit von \vec{c} und \vec{d})
- c) Zeigen Sie (mit Hilfe des bei b) berechneten Skalarprodukts), dass im Rechteck die Diagonalen gleich groß sind.

Bitte auch Rückseite beachten !!

2) Gegeben ist der Halbkreis (siehe Zeichnung).



- Stellen Sie \vec{CA} und \vec{CB} als Linearkombination der Vektoren \vec{CM} und \vec{MA} dar.
- Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ (in Abhängigkeit von \vec{CM} und \vec{MA})
- Zeigen Sie damit, daß der Winkel α im Halbkreis ein rechter Winkel ist.

Lösungen:

1)

a)

$$\vec{a} = \vec{c}/2 - \vec{d}/2$$

$$\vec{b} = \vec{c}/2 + \vec{d}/2$$

b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{c}/2 - \vec{d}/2) \cdot (\vec{c}/2 + \vec{d}/2) = \left(\frac{\vec{c}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\vec{d}}{2}\right)^2 = \frac{\vec{c}^2 - \vec{d}^2}{4}$$

c)

$$0 = \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{c}^2 - \vec{d}^2}{4}$$

also:

$$0 = \frac{\vec{c}^2 - \vec{d}^2}{4} \implies \vec{c}^2 - \vec{d}^2 = 0 \implies \vec{c}^2 = \vec{d}^2 \implies$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 \implies |\vec{c}| = |\vec{d}|$$

2)

$$\vec{CA} = \vec{CM} + \vec{MA}$$

$$\vec{CB} = \vec{CM} - \vec{MA}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (\vec{CM} + \vec{MA}) \cdot (\vec{CM} - \vec{MA}) = \vec{CM}^2 - \vec{MA}^2 = |\vec{CM}|^2 - |\vec{MA}|^2$$

Da laut Voraussetzung gilt: $|\vec{MA}| = r = |\vec{CM}|$ folgt:

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

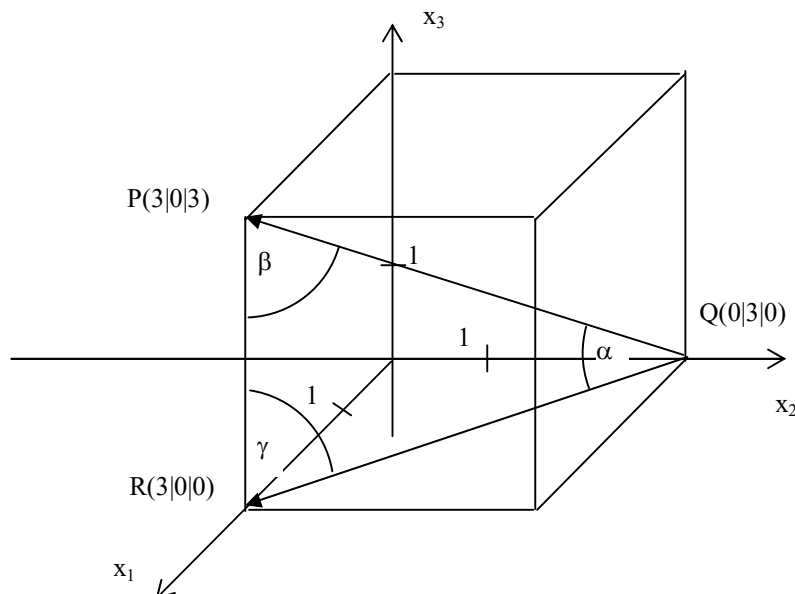
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

a) Berechnen Sie den Winkel α zwischen der Raumdiagonale eines Würfels und seiner Projektion in die x_1 - x_2 -Ebene und außerdem noch die anderen Winkel in dem Dreieck (siehe Skizze).

Weitere mögliche Standard-Aufgaben:

- b) Berechnen Sie nochmals alle Winkel in einem Würfel mit der Seitenlänge a.
- c) Berechnen Sie die Winkel zwischen den Raumdiagonalen und den Achsen
- d) Berechnen Sie die Winkel zwischen den Raumdiagonalen



Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1)

Gegeben sind die Punkte $A(-13 \mid -3 \mid 17)$ und $B(-7 \mid 6 \mid 5)$.

a)

4P

Berechnen Sie den Abstand zwischen A und B (exaktes Ergebnis und Näherung)

Wurzelausdruck vereinfachen (partiellles Wurzelziehen)!

b)

12P

Teilen Sie die Strecke \overline{AB} in 3 gleiche Teile und bestimmen die Teilpunkte dieser Strecke.

c)

4P

Wie groß ist jeweils einer dieser 3 Teile ? (exaktes Ergebnis und Näherung)

2)

a)

5P

Geben Sie eine Gerade g (Geradengleichung in Parameterform) an, die durch die Punkte

$A(1 \mid -2 \mid 5)$, $B(4 \mid 6 \mid -2)$ geht

b)

5P

Geben Sie eine (andere als bei a)) Geradengleichung in Parameterform derselben Geraden g an.

c)

5P

Geben Sie eine Gerade h_1 (Geradengleichung in Parameterform) an, die parallel, aber nicht identisch zu g ist (mit Begründung).

d)

15P

Geben Sie eine Gerade h_2 (Geradengleichung in Parameterform) an, die senkrecht zu g ist und durch A geht (mit Begründung).

Lösungen

1)

a)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-7 - (-13))^2 + (6 - (-3))^2 + (5 - 17)^2} = \sqrt{6^2 + 9^2 + (-12)^2} = \sqrt{36 + 81 + 144} = \sqrt{261} = \sqrt{9 \cdot 29} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{29} = 3 \cdot \sqrt{29} \approx 16,16$$

b)

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} -7 - (-13) \\ 6 - (-3) \\ 5 - 17 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} \implies T_1(-11 \mid 0 \mid 13)$$

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OA} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \implies T_2(-9 \mid 3 \mid 9)$$

c)

$$e = \frac{d}{3} = \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{3} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

2)

a) $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$, also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 6 - -2 \\ -2 - 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

b)

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ -14 \end{pmatrix}$$

c)

$$\text{h}_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Begründung:

c1) Da die 2 Richtungsvektoren gleich sind, sind die Geraden parallel.

c2) Der Stützvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$ ist das zweifache des Stützvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Damit sind die 2 zugehörigen Aufpunkte verschieden. Damit sind die Geraden nicht gleich.

d)

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt:

Der Vektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$, also gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$3v_1 + 8v_2 - 7v_3 = 0 \iff v_1 = \frac{7v_3 - 8v_2}{3}$$

Wähle z.B: $v_2 = -1$ und $v_3 = 1$, dann gilt: $v_1 = 5$

Damit:

$$h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

KLAUSUR 3 Mathematik 2 2BK11 Nachtermin 1 Zeit: 45 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 12P

Gegeben sind die Punkte $A(7 \mid -2 \mid 5)$, $B(-1 \mid 4 \mid 3)$ und $C(-4 \mid 3 \mid -1)$.

Liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden ? (rechnerischer Beweis)

2) 12P

Geben Sie 2 Geraden an (Geradengleichung in Parameterform), die identisch sind.

Die zwei Geradengleichung in Parameterform müssen verschieden sein.

Begründen Sie!

3) 13P

Geben Sie zwei windschiefe Geraden an (Geradengleichung in Parameterform).

Begründen Sie, daß diese windschief sind (keinen Schnittpunkt und nicht parallel).

Begründen Sie!

4) 13P

Geben Sie alle Spurpunkte in alle Koordinatenebenen der Geraden g an:

Rechnerische und anschauliche Begründung !

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN1) 15PGegeben ist der Punkt $M(-2 \mid -3 \mid 1)$ und die Gerade g mit der Parameterform:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Warum liegt M auf der Geraden g ?b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Punkte A, B auf g die von M den Abstand 6 LE haben.2) 15PGegeben sind die Geraden g und h :

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Sind die Geraden parallel (rechnerische Begründung) ?

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden g und h .3) 20PBestimmen Sie rechnerisch die Gerade h , die senkrecht auf g steht und durch den Punkt $R(8 \mid -9 \mid 4)$ geht.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

1)

a) Setze $t = 1$ in die Parameterform der Geradengleichung ein:

5P

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \implies M(-2 \mid -3 \mid 1) \in g$$

b) Sei \vec{m}_0 der Einheitsvektor des Richtungsvektors von g . Dieser hat die Länge 1. Es gilt:

$$\vec{m}_0 = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} \\ \frac{-4}{6} \end{pmatrix} \quad 4P$$

Damit gilt:

$$\vec{0A} = \vec{0M} + 6 \cdot \vec{m}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} \\ \frac{-4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ also } A(2 \mid -1 \mid -3) \quad 3P$$

$$\vec{0B} = \vec{0M} - 6 \cdot \vec{m}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} \\ \frac{-4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } B(-6 \mid -5 \mid 5) \quad 3P$$

2)

a)

5P

Wenn die 2 Richtungsvektoren parallel wären, müßte sich einer davon als Vielfaches des anderen darstellen lassen. Es gäbe also ein $k \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} 4 = 5k \\ -5 = -4k \\ 1 = -k \end{matrix} \iff k = 4/5 \wedge k = 5/4 \wedge k = -1$$

Das wäre aber ein Widerspruch. Also sind die Geraden nicht parallel.

b) Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} \mid x_{2S} \mid x_{3S})$. Dann gibt es ein t_s und r_s mit:

3P

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 4t_s &= 4 + 5r_s \\ 2 - 5t_s &= -5 - 4r_s \\ 4 + t_s &= 1 - r_s \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 4t_s - 5r_s &= 3 \\ -5t_s + 4r_s &= -7 \\ t_s + r_s &= -3 \end{aligned}$$

3P

4P

t_s	r_s	b	Op	KS
4	-5	3	G1	2
-5	4	-7	G2	-8
1	1	-3	G3	-1
4	-5	3	G4=G1	2
0	-9	-13	G5=5G1+4G2	-22
0	9	-15	G6=-G1+4G3	-6
			G7=...	...
0	-9	-13	G8=G5	-22
0	0	-27	G9=G5+G6	8

$$L = \{ \}$$

3)

$F(x_{1F} | x_{F2} | x_{F3})$ sei der Punkt, der auf g und h liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 4t_F \\ -5 + 2t_F \\ 5 - 4t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_{1F} &= -6 + 4t_F \\ x_{2F} &= -5 + 2t_F \\ x_{3F} &= 5 - 4t_F \end{aligned} \quad 5P$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{FR} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 8 - x_{1F} \\ -9 - x_{2F} \\ 4 - x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 8 - (-6 + 4t_F) \\ -9 - (-5 + 2t_F) \\ 4 - (5 - 4t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad 5P$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 14 - 4t_F \\ -4 - 2t_F \\ -1 + 4t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 - 4t_F \\ -4 - 2t_F \\ -1 + 4t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad 5P$$

$$4 \cdot (14 - 4t_F) + 2 \cdot (-4 - 2t_F) + (-4) \cdot (-1 + 4t_F) = 0 \Leftrightarrow 56 - 16t_F - 8 - 4t_F + 4 - 16t_F = 0 \Leftrightarrow 52 - 36t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = -13/9$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{19}{9} \\ -\frac{7}{9} \end{pmatrix}, \quad \text{also: } F\left(-\frac{2}{9} \mid -\frac{19}{9} \mid -\frac{7}{9}\right) \quad 3P$$

Dann gilt: $\vec{FR} = \begin{pmatrix} 8 - (-\frac{2}{9}) \\ -9 - (-\frac{19}{9}) \\ 4 - (-\frac{7}{9}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{74}{9} \\ -\frac{62}{9} \\ \frac{43}{9} \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{74}{9} \\ -\frac{62}{9} \\ \frac{43}{9} \end{pmatrix}$ 3P