

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

I) Bestimmen Sie die Mengen (keine Venn – Diagramme) (4P)

1) gegeben: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

gesucht: $A \cup B$

2) gegeben: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

gesucht: $E \cap F$

II) Formen Sie die Terme so in **einfachere** Terme um, dass sich allgemeingültige Gleichungen ergeben (wie im Unterricht).

3) (3P)

$$(a+b)(4x-5y) - (a-b)(5x+3y)$$

4) (7P)

$$\frac{6b+2}{4y-8} + \frac{5b-3}{2y-4} - \frac{3b-1}{y-2}$$

5) (5P)

$$\frac{3x}{5(x-y)} \cdot \frac{20(x-y)}{21y}$$

6) (2P)

$$(-x-y)^2$$

7) (3P)

$$\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right) \cdot \frac{xy}{z}$$

III) Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

$$8) \frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \quad (3P)$$

$$9) \frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3} \quad (5P)$$

$$10) \frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \quad (5P)$$

$$11) \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \quad (7P)$$

$$12) \frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \quad (7P)$$

Lösungen

I)

(4P)

1) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

2) $E \cap F = \emptyset$

II)

3)

(3P)

$$\begin{aligned}(a+b)(4x-5y) - (a-b)(5x+3y) &= \\ 4ax - 5ay + 4bx - 5by - (5ax + 3ay - 5bx - 3by) &= \\ 4ax - 5ay + 4bx - 5by - 5ax - 3ay + 5bx + 3by &= \\ -ax - 8ay + 9bx - 2by\end{aligned}$$

4)

(7P)

$$\begin{aligned}\frac{6b+2}{4y-8} + \frac{5b-3}{2y-4} - \frac{3b-1}{y-2} &= \\ \frac{6b+2}{4y-8} + \frac{2(5b-3)}{2(2y-4)} - \frac{4(3b-1)}{4(y-2)} &= \\ \frac{6b+2}{4y-8} + \frac{2(5b-3)}{4y-8} - \frac{4(3b-1)}{4y-8} &= \\ \frac{6b+2+2(5b-3)-4(3b-1)}{4y-8} &= \\ \frac{6b+2+10b-6-12b+4}{4y-8} &= \\ \frac{4b}{4y-8} = \frac{4b}{4(y-2)} = \frac{b}{y-2}\end{aligned}$$

5)

(5P)

$$\begin{aligned}\frac{3x}{5(x-y)} \cdot \frac{20(x-y)}{21y} &= \\ \frac{3x \cdot 20(x-y)}{5(x-y) \cdot 21y} = \frac{3x \cdot 4(x-y)}{(x-y) \cdot 21y} &= \\ \frac{x \cdot 4(x-y)}{(x-y) \cdot 7y} = \frac{4x(x-y)}{7y(x-y)} &= \\ \frac{4x}{7y}\end{aligned}$$

6)

(2P)

$$\begin{aligned}(-x-y)^2 &= (-x+(-y))^2 = \\ (-x)^2 + 2(-x)(-y) + (-y)^2 &= \\ x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(-x-y)^2 &= (-(x+y))^2 = (x+y)^2 = \\ x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

7)

(3P)

$$\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right) \cdot \frac{xy}{z} =$$

$$\frac{axy}{xz} - \frac{bxy}{yz} =$$

$$\frac{ay}{z} - \frac{bx}{z} = \frac{ay - bx}{z}$$

III)

8) (3P)

$$\frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \quad | \cdot (2-x)(x-2)$$

$$D = R \setminus \{2\}$$

$$-3x + 6 = 6 - 3x$$

$$6 - 3x = 6 - 3x$$

$$L = D$$

9) (5P)

$$\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3}$$

$$D = R \setminus \{3\}$$

$$\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{-(x-3)}$$

$$\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{-(4-x)}{3-x} \quad | \cdot (3-x)$$

$$2-x-1(3-x) = -(4-x)$$

$$2-x-3+x = -4+x$$

$$-1 = x-4$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

10) (5P)

$$\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \quad | \cdot (x^2-16)$$

$$D = R \setminus \{4; -4\}$$

$$3(x-4) - 2(x+4) = 5x-20$$

$$3x-12-2x-8 = 5x-20$$

$$x-20 = 5x-20 \quad | \cdot +20 \quad | \cdot -5x$$

$$-4x = 0$$

$$L = \{0\}$$

11) (7P)

$$\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \quad | \cdot (x-1)(x+1)(x+2)$$

$$D = R \setminus \{-1; 1; -2\}$$

$$4(x-1)(x+1) - 1(x+1)(x+2) = 3(x-1)(x+2)$$

$$4(x^2-1) - 1(x^2+2x+x+2) = 3(x^2+2x-x-2)$$

$$4x^2-4-x^2-2x-x-2 = 3x^2+6x-3x-6$$

$$3x^2-6-3x = 3x^2+3x-6 \quad | -3x^2 \quad | +6 \quad | -3x$$

$$-6x = 0 \quad | :(-6)$$

$$x = 0$$

$$L = \{0\}$$

12) (7P)

$$\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \quad | \cdot 6(x-1)(x+1)$$

$$D = R \setminus \{1; -1\}$$

$$7(x-5)^2 = 2(5x-1)(x-1) - (3x-2)(x+1)$$

$$7(x^2-10x+25) = 2(5x^2-5x-x+1) - (3x^2+3x-2x-2)$$

$$7x^2-70x+175 = 10x^2-10x-2x+2-3x^2-3x+2x+2$$

$$7x^2-70x+175 = 7x^2-13x+4 \quad | -7x^2 \quad | +70x \quad | -4$$

$$171 = 57x \quad | :57$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

1) $\frac{2}{3x-4} - \frac{1}{20} = \frac{5}{6x-8}$ (4P)

2) $\frac{2}{x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{1}{x-1}$ (4P)

3) $\frac{2+x}{x-1} = \frac{3+2x}{x+1} - 1$ (4P)

4) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x+3} = x - 2$ (4P)

5) $\frac{-3x+6}{2x-4} + \frac{x}{x-2} = -\frac{7}{6}$ (4P)

6) $\frac{4}{x-1} + \frac{1}{5} = \frac{3}{1-x} + \frac{8}{5}$ (4P)

7) $x + \frac{2x}{x-1} = 0$ (4P)

8) $\frac{32}{8x+16} = \frac{5x}{2x+4}$ (4P)

9) $\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-2x}{1-x^2}$ (4P)

10) $\frac{5x-5}{x+1} + 2 = \frac{6x-3}{2x-1} + 4$ (4P)

11) $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-4}$ (4P)

12) $\frac{3-x}{x+1} - 4 = 0$ (4P)

13) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0$ (4P)

Lösungen:

$$L = \{-2\}$$

$$L = \{5/3\}$$

$$L = \{-2\}$$

$$L = \{\}$$

$$L = \{-1\}$$

$$L = \{6\}$$

$$L = \{0; -1\}$$

$$L = \{8/5\}$$

$$L = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$L = \{\}$$

$$L = \{1\}$$

$$L = \{-0,2\}$$

$$L = \{2/3\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

I) Formen Sie die Terme so in **einfachere** Terme um, dass sich allgemeingültige Gleichungen ergeben (wie im Unterricht).

$$1) \frac{1}{2a} - \frac{3}{4a} - \frac{a+b}{ab} = \quad (3P)$$

$$2) \frac{1}{k} - \frac{2}{x} + \frac{2k-x}{kx} = \quad (3P)$$

$$3) k+3 - \frac{k(k+3)}{k-3} = \quad (3P)$$

$$4) \frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} - \frac{6}{(2-x)^2} = \quad (3P)$$

$$5) \frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k} + \frac{2}{k^2-1} - 4 = \quad (3P)$$

$$6) \frac{\frac{x}{2}}{k} + \frac{3}{k} = \quad (3P)$$

$$7) \frac{\frac{k}{4} - \frac{k}{3}}{\frac{3k}{4} - \frac{k}{3}} = \quad (3P)$$

$$8) \frac{\frac{x}{k}}{2k} + \frac{4x}{k^2} = \quad (3P)$$

$$9) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k} + \frac{1}{k-1} = \quad (3P)$$

$$10) \frac{k+2 - \frac{k(k+2)}{k-1}}{2} = \quad (3P)$$

$$11) \frac{x}{x-1} : \frac{1}{x^2-x} = \quad (3P)$$

$$12) \frac{3x^2-3}{x^2+3x} - \frac{2x-2}{x+3} = \quad (3P)$$

$$13) \frac{ax^2+2x}{ax+2x^2} = \quad (3P)$$

$$14) \left(1 + \frac{k-1}{2}\right) : \left(k - \frac{k-1}{2}\right) = \quad (3P)$$

II) Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

$$15) \frac{2-x}{1-x} - x = 1 - x + \frac{1}{1-x} \quad (3P)$$

$$16) \frac{2x^2-3x+1}{x-2} = 2x+1 + \frac{3}{x-2} \quad (3P)$$

$$17) x^2 - x + 1 - \frac{3}{x+1} = \frac{x^3-2}{x+1} \quad (3P)$$

Lösungen:

$$1) \frac{1}{2a} - \frac{3}{4a} - \frac{a+b}{ab} = \frac{4a+5b}{4ab}$$

$$2) \frac{1}{k} - \frac{2}{x} + \frac{2k-x}{kx} = 0$$

$$3) k+3 - \frac{k(k+3)}{k-3} = \frac{-3(k+3)}{k-3}$$

$$4) \frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} - \frac{6}{(2-x)^2} = \frac{1}{x-2}$$

$$5) \frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k} + \frac{2}{k^2-1} - 4 = -4$$

$$6) \frac{\frac{x}{2}}{k} + \frac{3}{k} = \frac{x+6}{2k}$$

$$7) \frac{\frac{\frac{k}{4} - \frac{k}{3}}{3k} - \frac{k}{k}}{\frac{4}{4} - \frac{3}{3}} = -\frac{1}{5}$$

$$8) \frac{\frac{x}{k}}{2k} + \frac{4x}{k^2} = \frac{9x}{2k^2}$$

$$9) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k} + \frac{1}{k-1} = \frac{-1}{k-1}$$

$$10) \frac{k+2 - \frac{k(k+2)}{k-1}}{2} = -\frac{k+2}{2k-2}$$

$$11) \frac{x}{x-1} : \frac{1}{x^2-x} = x^2$$

$$12) \frac{3x^2-3}{x^2+3x} - \frac{2x-2}{x+3} = \frac{x-1}{x}$$

$$13) \frac{ax^2+2x}{ax+2x^2} = \frac{ax+2}{a+2x}$$

$$14) (1 + \frac{k-1}{2}) : (k - \frac{k-1}{2}) = 1$$

II) Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

$$15) \frac{2-x}{1-x} - x = 1 - x + \frac{1}{1-x} \quad L = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$16) \frac{2x^2-3x+1}{x-2} = 2x+1 + \frac{3}{x-2} \quad L = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$17) x^2 - x + 1 - \frac{3}{x+1} = \frac{x^3-2}{x+1} \quad L = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen: Rechnungen, Zeichnungen, Begründungen, usw. **genauso** wie im **Unterricht!!**

0) 3P

Bemerkung: Bug, IT-englisch bedeutet Fehler

Wegen laufender Überfüllung des V3-Freizeitparks muß eine Baugrube für das neue Jahrhundertprojekt V21, die Fortsetzung der V3-Gigapower-Tranquilizer-System-Projektierung, ausgehoben werden. Aus Kostengründen und aus Gründen des Umweltschutzes (Recycling) wird der Aushub durch die Firma Bugatti an einem Ende der Baugrube in dieser Baugrube abgeladen. Trotz modernster V3-Baggermotoren und PC-Einsatzes macht das Projekt keine Fortschritte. Der Betriebsinhaber plant deshalb Urlaubssperren und Überstunden für die Arbeiter einzuführen und die Einstellung eines hochdotierten ergebnisorientierten Sanierungs-Managements vorzunehmen, um das Projekt endgültig zum Absch(l)uss zu bringen. Baggerführer Buggi sagt, das wird ein "Milliardengrab". Nehmen Sie dazu Stellung und begründen Sie! .

1) 4P

Gegeben ist die Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = x^2 + x + \pi$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen!!!):

a) $h(2x + 1)$ b) $h\left(\frac{1}{x}\right)$

2) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an: 6P

a) $x^2 = -4$ d) $x^2 = 0,25$
b) $x^2 = 0$ e) $|x| = x$
c) $|x| = -5$ f) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

3) 4P

Machen Sie die quadratische Ergänzung zum Term $x^2 - \frac{7}{3}x$, so daß man ihn in der

folgenden Form schreiben kann: $x^2 - \frac{7}{3}x + ? = (? - ?)^2$

4) 4P
Wird durch die folgende Gleichung eine Funktion (Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$) beschrieben?
Begründen Sie!
 $y^2 = 1 - x^2$

5) 7P
Geben Sie die Funktionsgleichung folgender Geraden an (falls es sie gibt):
a) Gerade, die auf der x-Achse liegt.
b) Gerade, die auf der y-Achse liegt.
c) 1. Winkelhalbierende.
d) Gerade, die senkrecht zur 1. Winkelhalbierenden ist und durch den Ursprung geht.
e) Gerade, die den y-Achsenabschnitt +1 und den x-Achsenabschnitt +1 hat.
f) Gerade, die nur im 1. Quadranten liegt.
g) Gerade, die im 1. Quadranten und gleichzeitig im 2. Quadranten liegt.

6) 4P
Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D und den Wertebereich der folgenden Funktion h an:

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

7) 6P
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung durch Äquivalenzumformungen (nicht durch "Mitternachtsformel").
 $(x - 1)^2 = 16$

8) 5P
Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an:
 $(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-5) = 0$

9) 7P
Gegeben sind die Funktionen f und g (Die Definitionsmenge und die Zielmenge ist jeweils \mathbb{R}) mit den Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \frac{-2}{3}x - 3 \quad g(x) = \frac{4}{-6}x + 1$$

a) Zeichnen Sie die Schaubilder K_f und K_g in genau ein einziges rechtwinkliges Koordinatensystem (LE = 1 cm)
b) Bestimmen Sie rein rechnerisch den (die) Schnittpunkt(e) der Geraden K_f mit K_g .

Lösungen:

1) 4P

a) $h(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 2x + 1 + \pi$

b) $h\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right) + \pi$

2) 6P

a) $x^2 = -4$ $L = \{\}$

b) $x^2 = 0$ $L = \{0\}$

c) $|x| = -5$ $L = \{\}$

d) $x^2 = 0,25$ $L = \{0,5; -0,5\}$

e) $|x| = x$ $L = \text{Menge aller positiven reellen Zahlen, einschließlich der } 0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

f) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ $L = \mathbb{R}$

3) 4P

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} x + ? = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6} x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{6}\right)^2$$

4) 4P

nein, da

$x=0 \rightarrow y=-1$

$x=0 \rightarrow y=1$

5) 7P

a) $y = 0$ b) $x = 0$ c) $y = x$ d) $y = -x$ e) $y = -x + 1$

f) gibt es nicht g) $y = 2$

6) 4P

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

7) 6P

$(x - 1)^2 = 16 \iff (\text{Wurzelziehen auf beiden Seiten})$

$|x - 1| = \sqrt{16} = 4 \iff$

$x - 1 = 4 \vee x - 1 = -4 \iff$

$x = 5 \vee x = -3 \iff$

also:

$L = \{-3; 5\}$

8) 5P

$D = \mathbb{R}$ $L = \{1; -2; 5\}$

9) 7P

Schnittpunkt $S(x_S \mid y_S)$ von K_f und K_g

$$-\frac{2}{3}x_S - 3 = y_S = \frac{4}{-6}x_S + 1 \iff -\frac{2}{3}x_S - 3 = y_S = -\frac{2}{3}x_S + 1 \iff$$

$$-\frac{2}{3}x_S + -\frac{2}{3}x_S = 4, \text{ also } L = \{\}, \text{ also kein Schnittpunkt}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1)

Geben Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden LGS an:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2)

Bestimmen Sie den Scheitel der folgenden Parabel:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4}$$

Lösungen:

1)

$$a) L = \{(9; 8; 7)\}$$

$$b) L = \{\}$$

c)

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$$

$$L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_2 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

$$\text{also: } (1; 1) \in L$$

d)

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 \wedge x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_3 = 0$, dann gilt:

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 = 7 - 4 \cdot 0 = 7$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 = 9 - 5 \cdot 0 = 9$$

$$\text{also: } (7; 9; 0) \in L$$

wähle: $x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 = 7 - 4 \cdot 1 = 3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 = 9 - 5 \cdot 1 = 4$$

$$\text{also: } (3; 4; 0) \in L$$

e)

$$x_2 = 2 - 5 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1$$

$$x_4 = 3 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_2 = 2 - 5 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1 \wedge x_4 = 3 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_1 = 0 \wedge x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_2 = 2 - 5 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1 = 2 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -3$$

$$x_4 = 3 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 = 3 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = -3$$

$$\text{also: } (0; -3; 1; -3) \in L$$

wähle: $x_1 = 2 \wedge x_3 = 3$, dann gilt:

$$x_2 = 2 - 5 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1 = 2 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = -19$$

$$x_4 = 3 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 = 3 - 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -23$$

$$\text{also: } (0; -19; 1; -23) \in L$$

2)

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3x - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \left(x^2 + \frac{2}{3} \cdot 3x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} \left(x^2 + 2x - \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{2} \left(x^2 + 2x + 1 - 1 - \frac{1}{6} \right) =$$

$$\frac{3}{2} \left(x^2 + 2x + 1 - 1 - \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{2} \left((x+1)^2 - \frac{7}{6} \right) = \frac{3}{2} (x+1)^2 - \frac{7}{4} \implies S \left(-1 \mid -\frac{7}{4} \right)$$

KLAUSUR 2 Mathematik 2BKI1 Nachtermin 2 Zeit: 45 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 10P

Eine Klassenarbeit wird durch einen linearen Punkteschlüssel korrigiert:

Das bedeutet, dass 50 Punkte mit der Note 1 und 0 Punkte mit der Note 6 bewertet werden.

a) Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem auf der senkrechten Achse die Note y und auf der horizontalen Achse die Anzahl x der erreichten Punkte eingetragen werden.

(x -Achse: $[-1; -11]$, y -Achse: $[-1; -7]$, LE: 5 Punkte = 1 cm, Eine Note = 1 cm).

Verbinden Sie die Punkte $N_1(50, 1)$ und $N_6(0, 6)$ durch die Gerade g .

b) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g ?

Bem: Das Ergebnis $y = (60 - x) / 10$ muß bei 2c) und 2d) verwendet werden.

c) Welche Note ergeben 28 erreichte Punkte.

Berechnen Sie dies mit Hilfe der Funktionsgleichung der Geradengleichung.

d) Wieviel Punkte bekommt man für die Note 2,4 ?

Berechnen Sie dies mit Hilfe der Funktionsgleichung der Geradengleichung.

2) 12P

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel, die durch die folgenden Punkte gehen:

$P_1(-3 | -3,5)$, $P_2(1 | -7,5)$, $P_3(-4 | -5)$

b) 8P
Bestimmen Sie außerdem (rechnerisch) den Scheitel dieser Parabel.

Lösungen:

1) b) ZPF mit $N_1((50, 1) \in g, N_6(0, 6) \in g$:

$$\begin{aligned}\frac{y-6}{x-0} &= \frac{1-6}{50-0} \iff \\ \frac{y-6}{x-0} &= \frac{-5}{50} \iff \frac{y-6}{x-0} = -\frac{1}{10} \iff y-6 = -\frac{1}{10} \cdot x \iff \\ y &= 6 - \frac{1}{10} \cdot x\end{aligned}$$

$$\text{c) } y(28) = 6 - \frac{1}{10} \cdot 28 = 6 - 2,8 = 3,2$$

$$\text{d) } y = 6 - \frac{1}{10} \cdot x \iff$$

$$y-6 = -\frac{1}{10} \cdot x \iff x = (y-6) \cdot (-10) \iff x = -10y + 60 \iff$$

$$x = 60 - 10y, \text{ also:}$$

$$x(2,4) = 60 - 10 \cdot 2,4 = 36$$

2)

$$\text{a) } f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P_1(-3 | -\frac{7}{2}) \in K_f:$$

$$-\frac{7}{2} = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c$$

$$-\frac{7}{2} = 9a - 3b + c \iff 18a - 6b + 2c = -7 \text{ (G1)}$$

$$P_2(1 | -\frac{15}{2}) \in K_f:$$

$$-\frac{15}{2} = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$-\frac{15}{2} = a + b + c \iff 2a + 2b + 2c = -15 \text{ (G2)}$$

$$P_3(-4 | -5) \in K_f:$$

$$-5 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c$$

$$-5 = 16a - 4b + c \text{ (G3)}$$

Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2), (G3):

$$a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = -5$$

Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 5$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 5 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = -\frac{1}{2}(x^2 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 5) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 10) \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 10) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 - 4 + 10) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 + 6) = -\frac{1}{2}((x+2)^2 + 6) \\
&= -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 3 \implies S(-2 \mid -3)
\end{aligned}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Austausch JEDLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

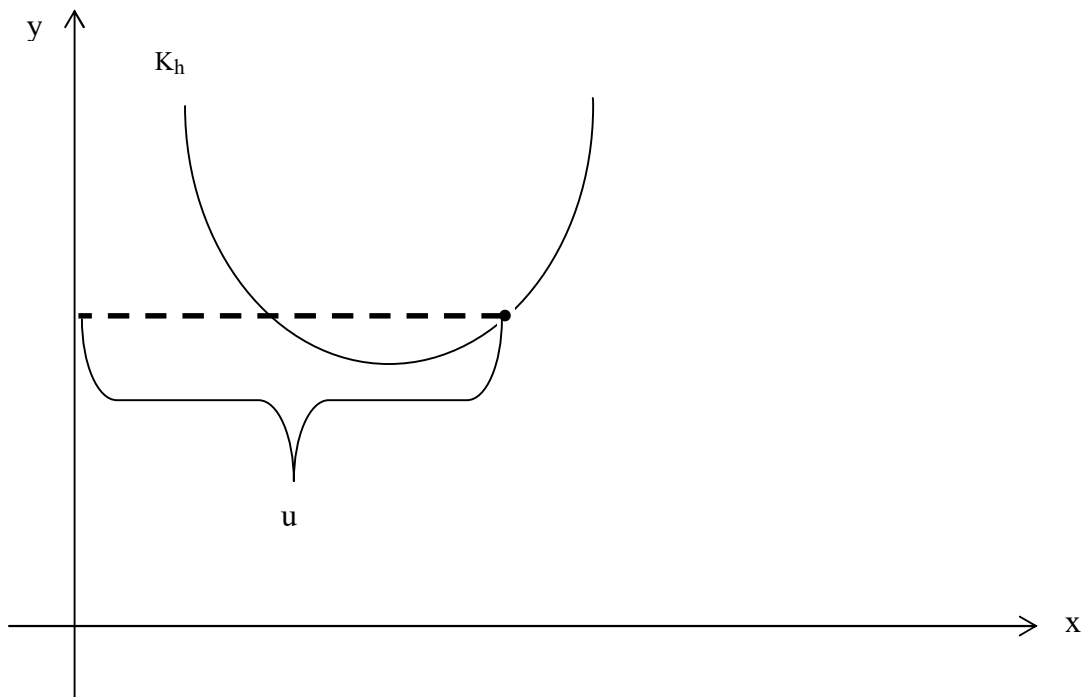
Bemerkungen: Rechnungen, Zeichnungen, Begründungen, usw. **genauso** wie im **Unterricht!!**

1)

6P

Gegeben sei eine Funktion h (mit dem Schaubild K_h).

Herr W.B. Gierig will wissen, wie groß $h(u)$ und $h'(u)$ ist. Zeichnen Sie deshalb $h(u)$ und $h'(u)$ in die folgende Zeichnung ein, so dass Herr W.B. Gierig diese Werte mit dem Geodreieck ablesen kann.



BITTE beachten Sie auch die Rückseite dieses zweiseitigen Blattes.

Vielen Dank !!!!!

2)

20P

Geben Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an:

(c, k sind **konstante** Werte)

a) $h_1(x) = g(x) + c$

b) $h_2(x) = k \cdot g(x)$

c) $h_3(x) = g(x) + h(x)$

d) $h_4(x) = 10 \cdot 5$

e) $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$

f) $h_6(x) = x$

g) $h_7(x) = k/c$

h) $h_8(x) = 0$

i) $h_9(x) = 10^5$

j) $h_{10}(x) = k - c$

3)

6P

In welchen Punkten hat das Schaubild K_g der Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = x^3$$

eine negative Steigung.

Genau zeichnerische und rechnerische Begründung!

4)

18P

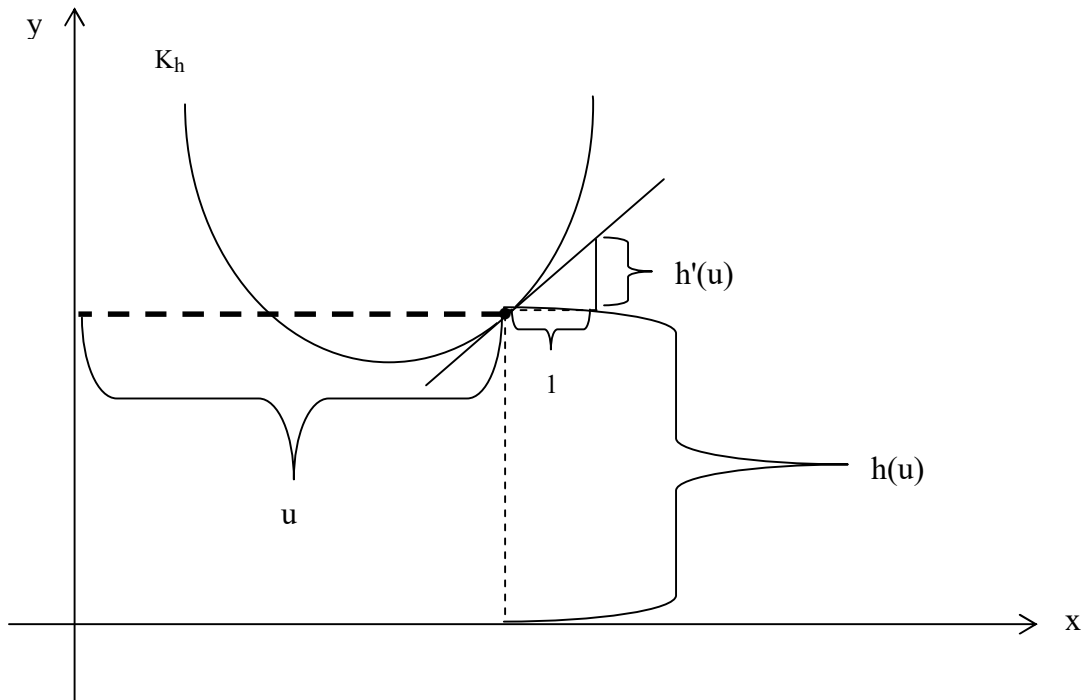
Bilden Sie (rein rechnerisch, ohne geometrische Begründung) von der folgenden Funktion h mit Hilfe der **Limesbildung** die Ableitungsfunktion von

$$h(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R} \text{ und } c \in \mathbb{R}$$

Lösungen:

1)

6P



2)

20P

- a) $h_1'(x) = g'(x)$
- b) $h_2'(x) = k \cdot g'(x)$
- c) $h_3'(x) = g'(x) + h'(x)$
- d) $h_4'(x) = 0$
- e) $h_5'(x) = 21 \cdot x^6$
- f) $h_6'(x) = 1$
- g) $h_7'(x) = 0$
- h) $h_8'(x) = 0$
- i) $h_9'(x) = 0$
- j) $h_{10}'(x) = 0$

3)

6P

- a) $g'(x) = 3x^2 \geq 0$, da $x^2 \geq 0$
- b) Alle Tangenten haben positive Steigung

4)

18P

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2ax + a\Delta x + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2ax + a\Delta x + b = 2ax + b
 \end{aligned}$$

KLAUSUR 3 Mathematik 2BK11 Nachtermin Zeit: 45 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen: Rechnungen, Zeichnungen, Begründungen, usw. **genauso** wie im **Unterricht!!**

1) 10P

a) In welchen Punkten hat die Kurve K_f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 0,5 x^3$$

die Steigung 6?

b) wie viele Punkte muß es geben?

Rein anschauliche Begründung an Hand der Kurve

2) 20P

Gegeben ist die Kurve K_f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{4} x^2$$

Bestimmen Sie rein rechnerisch den Schnittpunkt $S(x_s | y_s)$ der Tangenten der Kurve K_f in den Punkten $P(4 | ?)$ und $Q(-2 | ?)$

Bitte Zeichnung machen.

3) 20P

Gegeben ist die Kurve K_h mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = -\frac{1}{4} x^2$$

Bestimmen Sie die Punkte $R(-a | ?)$ und $T(a | ?)$, so daß die Tangenten der Kurve K_h senkrecht aufeinander stehen.

Bitte Zeichnung machen.

Lösung:

1)

a) $f(x) = 0,5 x^3$

$f'(x) = 1,5 x^2$

Der gesuchte Punkt sei $P(x_u | y_u)$.

a) Berechnung des x- Koordinatenwerts des Punkts:

Er hat die Steigung 6. Also gilt:

$$f'(x_u) = 6 = 1,5x_u^2$$

$$x_u^2 = 4$$

$$x_{u1} = 2 \quad \text{und} \quad x_{u2} = -2$$

Berechnung der y-Koordinate der Punkte:

$$y_{u1} = f(2) = 0,5 \cdot 2^3 = 4 \quad y_{u2} = f(-2) = 0,5 \cdot (-2)^3 = -4$$

also: $P_1(2 | 4)$ und $P_2(-2 | -4)$

b) Da die Kurve punktsymmetrisch zu $O(0 | 0)$ ist und die Steigung immer positiv ist, gibt es 2 Punkte.

2)

Berechnung der y-Koordinaten von Q und P

$$f(-2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1, \text{ also } Q(-2 | 1)$$

$$f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4, \text{ also } P(4 | 4)$$

Berechnung der Tangentensteigungen

$$\text{Steigung der Tangente } t_1: \quad f'(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

$$\text{Steigung der Tangente } t_2: \quad f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Berechnung der Funktionsgleichungen der Tangenten

a) Nach der PSF gilt für t_1 :

$$\frac{y-1}{x-(-2)} = -1 \iff y-1 = -x-2 \quad \text{also:}$$

$$t_1: y = -x - 1$$

b4) Nach der PSF gilt für t_2 :

$$\frac{y-4}{x-4} = 2 \iff y-4 = 2x-8, \text{ also:}$$

$$t_2: y = 2x - 4$$

4) Schnittpunkte $S(x_s | y_s)$ von t_1 und t_2

(oder etwas mathematischer formuliert: $t_1 \cap t_2 = S(x_s | y_s)$:

$$-x_s - 1 = y_s = 2x_s - 4$$

$$\iff 3x_s = 3 \iff x_s = 1, \text{ also}$$

$$y_s = -x_s - 1 = -1 - 1 = -2, \text{ also:}$$

$$S(1 | -2)$$

weitere Ersatzaufgaben

x1)

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $h_1(x) = 3 \cdot (2x+5)^7 + 10$

b) $h_2(x) = 3 \cdot (4x^2+5x+5)^9 + 23$

Lösung:

$$h_1'(x) = 3 \cdot (2x+5)^7 + 10 = 21(2x+5)^6 \cdot 2 = 42(2x+5)^6$$

$$h_2'(x) = 27 \cdot (4x^2+5x+5)^9 (8x + 5)$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen: Rechnungen, Zeichnungen, Begründungen, usw. **genauso** wie im **Unterricht!!**
Bei Geschmier, fehlendem Text bzw. fehlender Argumentation massiver Punkteabzug !!

1) 20P

Eine Parabel 3. Ordnung hat in $P(1 \mid 4)$ eine waagrechte Tangente und in $Q(0 \mid 2)$ einen Wendepunkt. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ? Bitte angeben !

Probe machen ! Wer keine Probe macht, hat bei fehlerhafter Rechnung nachteilige Bewertung.

2) 16P

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 9$. Die Punkte $A(-u \mid 0)$, $B(u \mid 0)$, $C(u \mid f(u))$ und $D(-u \mid f(u))$, wobei $0 < u < 3$, bilden ein Rechteck.

Für welches u wird der Umfang des Rechtecks ABCD maximal?

Wie groß ist der maximale Umfang?

3) 8P

Die x -Achse, die Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = a$ ($a \geq 0$) und das Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2$$

begrenzen eine Fläche mit dem Flächeninhalt 36 FE (Flächeneinheiten).

Wie groß ist a ?

4) 6P

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = mx$ und die x -Achse begrenzen über dem Intervall $[1;2]$ eine Fläche. Wie muss m gewählt werden, damit der Flächeninhalt 6 Flächeneinheiten beträgt ?

Lösungen

1)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad 2P$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

a) $P(1 \mid 4) \in K_f$

$$4 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \quad 3P$$

$$4 = a + b + c + d \quad (G1)$$

b) $P(1 \mid 4)$ hat eine waagrechte Tangente

3P

$$f'(1) = 0$$

$$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0$$

$$3a + 2b + c = 0 \quad (G2)$$

c) $Q(0 \mid 2) \in K_f$

3P

$$2 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$

$$d = 2$$

d) $Q(0 \mid 2)$ ist Wendepunkt

3P

$$f''(0) = 0$$

$$6a \cdot 0 + 2b = 0$$

$$b = 0$$

e) $d = 2$ und $b = 0$ eingesetzt in (G1) und (G2) ergibt:

$$4 = a + c + 2$$

$$2 = a + c \quad (G3)$$

$$3a + c = 0 \quad (G4)$$

f)

5P

Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus (G3) und (G4):

$$a = -1, \quad c = 3$$

g) Ergebnis:

1P

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

2)

3) Reduktion auf 1 Variable:

4P

$U(u)$ ist der Umfang des Rechtecks.

$$U(u) = 4u + 2 \quad f(u) = 4u + 2(9 - u^2) = 4u + 18 - 2u^2$$

$$U(u) = -2u^2 + 4u + 18$$

4) Ableitungen:

2P

$$U'(u) = -4u + 4$$

$$U''(u) = -4$$

5) Definitionsbereich: 2P

Da $f(3) = 0$, gilt:

$$D =]0 ; 3[$$

6) Lokale Extremwerte $E(u_e | A_e): A'(u_e) = 0$: 5P

$$-4u_e + 4 = 0$$

$$u_e = 1$$

$$U''(1) = -4 < 0$$

also: relatives Minimum bei $u_e = 1$

$$U(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 18 = 20$$

7) Randwertuntersuchung: 2P

$$U(0) = -2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 18 = 18$$

$$U(3) = -2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 18 = 12$$

8) Ergebnis: 1P

Der Umfang erreicht bei $u_e = 1$ LE seinen Maximalwert $U_e = 20$ LE

3) 8P

$$A = \int_0^a \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^a = \frac{a^3}{12} - \frac{0^3}{12} = \frac{a^3}{12}$$

4P

andererseits gilt

$$A = 36$$

also:

$$\frac{a^3}{12} = 36$$

1P

$$a^3 = 36 \cdot 12 \iff a = \sqrt[3]{36 \cdot 12} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{6^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$$

2P

also:

$$a = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$$

1P

4) 6P

$$\int_1^2 m x dx = 6$$

3P

$$\left[\frac{m}{2} \cdot x^2 \right]_1^2 = 6 \iff \frac{m}{2} \cdot 2^2 - \frac{m}{2} \cdot 1^2 = 6 \iff 2m - \frac{m}{2} = 6 \iff \frac{3m}{2} = 6 \iff$$

3P

$$m = 4$$

KLAUSUR 4 Mathematik 2BK11 Nachtermin Zeit: 60 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen: Rechnungen, Zeichnungen, Begründungen, usw. **genauso** wie im **Unterricht!!**
Bei Geschmier, fehlendem Text bzw. fehlender Argumentation massiver Punkteabzug !!

1) 36P
Eine bzgl. $O(0 | 0)$ punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in $P(-1 | 1)$ eine Wendetangente mit der Steigung 3. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

2) 14P
Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$$

- Berechnen Sie $f(2)$
- Begründen Sie mathematisch, warum K_f punktsymmetrisch bzgl. $O(0|0)$ ist.
- Berechnen Sie die tatsächliche Fläche zwischen K_f und der x-Achse.
- Welche Wert hat die bilanzierte Fläche zwischen K_f und der x-Achse.
Begründen (nicht rechnen) Sie!

Bemerkungen:

- Begründung und Argumentation bei allen Aufgaben wie im Unterricht!!
- Ergebnisse exakt und gerundet angeben!

Lösungen

1)

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$

4P

$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

a) $P(-1 | 1) \in K_f$

8P

$$1 = a \cdot (-1)^5 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)$$

$$1 = -a - b - c \quad (G1)$$

b) $P(-1 | 1)$ ist Wendepunkt

8P

$$f''(-1) = 0$$

$$20a \cdot (-1)^3 + 6b(-1) = 0$$

$$-20a - 6b = 0$$

$$-10a - 3b = 0 \quad (G2)$$

c) Wendetangente in $P(-1 | 1)$ hat die Steigung 3

8P

$$f'(-1) = 3$$

$$5a \cdot (-1)^4 + 3b \cdot (-1)^2 + c = 3$$

$$5a + 3b + c = 3 \quad (G3)$$

d) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

8P

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = 5, \quad c = -\frac{9}{2}$$

e) Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 5x^3 - \frac{9}{2}x$$

2)

$$a) f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 = 0$$

$$b) -f(-x) = -\left(-\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)\right) = -\frac{1}{2} \cdot x^3 + 2x = f(x)$$

Da K_f punktsymmetrisch ist und laut a) $f(2) = 0$ ist, gilt auch:

$$f(-2) = -f(-(-2)) = -f(2) = -0 = 0 \text{ und auch } f(0) = 0$$

$$c) I = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2} \cdot x^3 + 2x\right) dx = \left[-\frac{x^4}{8} + x^2\right]_{-2}^0 = -\frac{0^4}{8} + 0^2 - \left(-\frac{(-2)^4}{8} + (-2)^2\right) = -2$$

Da K_f punktsymmetrisch ist, gilt:

$$A = 2 \cdot |I| = 4$$

d) Die bilanzierte Fläche ist 0, da K_f punktsymmetrisch bzgl. $O(0 | 0)$ ist und damit der Teil unter der Kurve auf der negativen x-Achse deckungsgleich ist mit dem Teil unter der Kurve auf der positiven x-Achse.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen: Rechnungen, Zeichnungen, Begründungen, usw. **genauso** wie im **Unterricht!!**
Bei Geschmier, fehlendem Text bzw. fehlender Argumentation massiver Punkteabzug !!

1) 7P
In wie viel Jahren vermehrt sich das Anfangskapital A Euro bei einer jährlichen Verzinsung von 5 % Jahreszinssatz auf das Doppelte ? Exakten Wert und gerundeten Wert angeben

2) 6P
In Abhängigkeit der Zeit gilt für den Spannungsverlauf beim Aufladen eines Konensators:

$$U = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \text{ wobei } U_0 \neq 0, R \neq 0, C \neq 0$$

Formen Sie die Gleichung nach t um.

3) 15P
Von einer radioaktiven Substanz sind nach einer Stunde noch 400 mg, nach 2 Stunden noch 300 mg vorhanden. Wie lautet das Zerfallsgesetz ?

4) 8P
Das Schaubild der Funktion f mit:
 $f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$
die Gerade mit der Gleichung $x = a$, die y-Achse und die x-Achse schließen für $a > 0$ im 1.Quadranten eine Fläche ein, die von a abhängt.
a) Berechnen Sie diese Fläche.

b) Welchen Wert hat die Fläche, wenn a gegen unendlich strebt?
Berechnen Sie.

5)

10P

Gegeben ist die Funktion h mit:

$$h(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Schaubild ist K_h

- a) Geben Sie die Nullstellen von h an (Begründung!)
- b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse.
- c) Zeigen Sie, dass K_h keine Hoch-, Tief- und Wendepunkte besitzt.
Rechnerische Begründung!

6)

5P

Leiten Sie auf

$$\int (7 \cdot e^{5x} + 3) dx =$$

Lösungen:

1)

7P

n ist die Anzahl der Zeitabschnitte, nach denen sich das Kapital verdoppelt hat.

Der Wachstumsfaktor ist $q = 1 + 0,05 = 1,05$

$$K_n = K_0 \cdot 1,05^n$$

$$K_n = 2 \cdot K_0$$

also:

$$K_0 \cdot 1,05^n = 2K_0 \iff 1,05^n = 2 \iff n = \log_{1,05} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1,05}$$

$$n \approx 14,21$$

2)

6P

$$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad | : U_0$$

$$1 - e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0} \quad | -1$$

$$-e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0} - 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U}{U_0} + 1$$

$$-\frac{t}{RC} = \log_e \left(-\frac{U}{U_0} + 1 \right) = \ln \left(1 - \frac{U}{U_0} \right)$$

$$t = -RC \cdot \ln \left(1 - \frac{U}{U_0} \right)$$

3)

15P

Für das Wachstumsgesetz gilt:

gegeben:

$$m(t) = m_0 \cdot q^t \quad (t \text{ in Stunden, } m \text{ in mg})$$

gesucht:

q und m_0

Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, also:

$$m(1) = 400 \quad \text{und}$$

$$m(1) = m_0 \cdot q^1$$

damit:

$$400 = m_0 \cdot q^1 \quad \text{bzw. vereinfacht:}$$

$$(G1) \quad 400 = m_0 \cdot q$$

Nach 2 h sind noch 300 mg vorhanden, also:

$$m(2) = 300 \quad \text{und}$$

$$m(2) = m_0 \cdot q^2$$

damit:

$$(G2) \quad 300 = m_0 \cdot q^2$$

Man hat also 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Jeweils auflösen nach m_0 :

$$m_0 = \frac{400}{q}$$

$$m_0 = \frac{300}{q^2}$$

gleichsetzen ergibt:

$$\frac{400}{q} = \frac{300}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$400 q = 300$$

ergibt:

$$q = 3/4 \text{ und}$$

$$m_0 = \frac{400}{q} = \frac{400}{0,75} = \frac{1600}{3}$$

Damit:

$$m(t) = \frac{1600}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$$

Probe machen !!

4)

8P

$$A = \int_0^a e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^a = -e^{-a} - (-e^{-0}) = -e^{-a} + 1 = 1 - e^{-a}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} A = \lim_{a \rightarrow \infty} (1 - e^{-a}) = 1$$

5)

10P

$$h'(x) = 2e^{2x}$$

$$h''(x) = 4e^{2x}$$

a) Schnittpunkte mit der x-Achse

Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s | 0) \in K_h$

$e^{2x_s} = 0 \iff L = \emptyset \implies$ Es gibt keinen Schnittpunkt, da $e^u > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$

b) Schnittpunkte mit der y-Achse

Schnittpunkte $S_y(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 | y_s) \in K_h$

$$y_s = h(0) = e^{2 \cdot 0} = e^0 = 1$$

also: $S_y(0 | 1)$

c) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e | y_e)$: $h'(x_e) = 0$

$$2e^{2x_e} = 0 \iff e^{2x_e} = 0 \iff L = \emptyset$$

Es gibt also keine Extrempunkte

d) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w | y_w)$: $h''(x_w) = 0$

$$4e^{2x_w} = 0 \iff e^{2x_w} = 0 \iff L = \emptyset$$

Es gibt also keine Wendepunkte

6)

5P

$$\int (7 \cdot e^{5x} + 3) dx = 7 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} + 3x = \frac{7}{5} e^{5x} + 3x$$

KLAUSUR 6 Mathematik 1 2BK11 7.7.2015 Zeit: 60 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 11P
Für welche Winkel x zwischen -2π und 3π gilt: (Probe machen)

$$\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{Bemerkung: } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Achtung: Gesuchte Winkel im Gradmaß angeben!

2) 5P
gegeben: Sinuskurve mit der Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot \sin(k(x - x_0)) + y_0$ mit $k > 0$
gesucht: Abstand b (bzgl. der x -Richtung) von einem Wendepunkt und einem nächsten Extrempunkt

3) 5P
gegeben:
Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$
Kurve K_g entsteht durch Verschiebung der Kurve K_f um $+7$ in x -Richtung.

gesucht:
Funktionsgleichung der Kurve K_g
Funktionsgleichung muß nicht vereinfacht werden!

4)

6P

gegeben:

Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = \sin(x)$

K_g ist achsensymmetrisch (bzgl. der x-Achse) zu K_f

K_h entsteht durch Verschiebung der Kurve K_g um $-\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung.

gesucht:

Funktionsgleichung der Kurven K_g und K_h

5)

10P

a) Berechnen Sie mathematisch für $k > 0$:

$$\int_0^{2\pi/k} \cos(kx) dx$$

b) Ermitteln Sie rein anschaulich (ohne Rechnung) das Ergebnis. Begründen Sie!

6)

5P

Bilden Sie die 1. Ableitung von $h(x)$.

$$h(x) = 4 \sin(5x-6) + 7$$

7)

12P

Bestimmen Sie A , p , y_0 , $x_{\min R}$, $x_{\min L}$ der Kurve K_f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - 13\pi)\right) - 9$$

Lösung:

1) 11P

c) $x_1 = 15^\circ$, $x_2 = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$, $x_3 = 360^\circ + 15^\circ = 375^\circ$, $x_4 = 540^\circ - 15^\circ = 525^\circ$
 $x_5 = -180^\circ - 15^\circ = -195^\circ$, $x_6 = -360^\circ + 15^\circ = -345^\circ$,

2) 5P

$$b = \frac{\frac{2\pi}{k}}{4} = \frac{\pi}{2k}$$

3) 5P

$$g(x) = 2(x-7)^3 - 4(x-7)^2 + 5(x-7) - 6$$

4) 6P

$$g(x) = -\sin(x)$$
$$h(x) = -\sin(x + \pi/2)$$

5) 10P

$$\int_0^{2\pi/k} \cos(kx) dx = \left[\frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^{2\pi/k} = \frac{1}{k} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{k}\right) - \frac{1}{k} \sin(0) = \frac{1}{k} \sin(2\pi) - \frac{1}{k} \sin(0) = 0$$

Anschaulich: Bilanzierte Fläche ist aus Gründen der Symmetrie gleich 0.

6) 5P

$$h'(x) = 20 \cos(5x-6)$$

7) 12P

$$A = |-4| = 4 \quad p = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi \quad y_0 = -9$$

$$f(x) = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x-13\pi)\right) - 9 = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x+12\pi-13\pi)\right) - 9 = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right) - 9$$
$$= -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x+4\pi-\pi)\right) - 9 = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x+3\pi)\right) - 9$$

$$x_{\min R} = \pi$$

$$x_{\min L} = 3\pi$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 20P

Die Funktion f ist vom Typ

$$f(x) = e^{ax} + b, \quad x \in \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$$

Untersuchen Sie, ob es eine Funktion dieses Typs mit jeweils folgenden Eigenschaften gibt:

- a) der Punkt $P(0 \mid 3)$ liegt auf dem Schaubild von f und es gilt $f'(0) = \frac{1}{2}$
- b) Das Schaubild von f geht durch die Punkte $A(-2 \mid 4)$ und $B(1 \mid 4)$.
- c) Das Schaubild von f verläuft ganz im ersten Quadranten.

2) 30P

Gegeben ist die Funktion f mit:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von f ist K .

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
- b) Zeigen Sie, dass K keine Hoch-, Tief- oder Wendepunkte besitzt.
- c) Ist das Schaubild von f rechts- oder linksgekrümmt? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein rechnerisches Argument.

Lösungen:

1) a)

$$f'(x) = ae^{ax}$$

$P(0 | 3) \in K_f$:

$$3 = e^{a \cdot 0} + b \iff 3 = e^0 + b \iff 3 = 1 + b \iff b = 2$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} :$$

$$0,5 = f'(0) = ae^{a \cdot 0} \iff \frac{1}{2} = ae^{a \cdot 0} \iff \frac{1}{2} = ae^0 \iff a = 0,5$$

$$\text{also: } f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + 2$$

b) $A(-2 | 4) \in K_f$:

$$4 = e^{a \cdot (-2)} + b \iff 4 = e^{-2a} + b \iff b = 4 - e^{-2a}$$

$B(1 | 4) \in K_f$:

$$4 = e^{a \cdot 1} + b \iff 4 = e^a + b \iff b = 4 - e^a$$

$$\text{also: } 4 - e^{-2a} = 4 - e^a \quad | -4$$

$$-e^{-2a} = -e^a \quad | \cdot (-1)$$

$$e^{-2a} = e^a \quad | : e^a$$

$$\frac{e^{-2a}}{e^a} = 1 \iff e^{-2a-a} = 1 \iff e^{-3a} = 1 \iff -3a = \ln 1 \iff -3a = 0 \iff a = 0$$

Laut Voraussetzung ist aber $a \neq 0$

c) Die Definitionsmenge der Funktion $f'(x) = ae^{ax}$ ist die Menge der reellen Zahlen, also kann das Schaubild nicht im 1. Quadranten verlaufen.

2) a) Schnittpunkte mit der x-Achse

a1) Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s | 0) \in K_f$

$$0 = e^{\frac{1}{2}x_s} - 3$$

$$\iff e^{\frac{1}{2}x_s} = 3 \iff -\frac{1}{2}x_s = \ln 3 \iff x_s = -2 \ln 3$$

a2) Schnittpunkte mit der y-Achse

Schnittpunkte $S_y(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 | y_s) \in K_f$

$$y_s = e^{\frac{1}{2} \cdot 0} - 3 = 1 - 3 = -2$$

also:

$$S_y(0 | -2)$$

b)

b1) Extrempunkte

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

Extrempunkte $E(x_e | y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x_e}$$

$$\iff 0 = e^{-\frac{1}{2}x_e} \iff L = \emptyset$$

b2) Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x}$$

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $h''(x_w) = 0$

$$0 = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x_w} \iff 0 = e^{-\frac{1}{2}x_w} \iff L = \emptyset$$

c)

Da $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ und $\frac{1}{4} > 0$, gilt $f''(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x} > 0$. Damit ist Kf linksgekrümmt.