Bestimmung des Marktgleichgewichts ohne Differentialgleichungen

1.1 Um was geht es

Beschreiben des dynamischen Verhalten der Preisentwicklung eines Marktes mit Hilfe der elementaren Grundrechenarten und ohne Verwendung höherer Mathematik anhand ausgewählter Übungsaufgaben und mit Unterstützung einer Tabellenkalkulation wie z.B. EXCEL.

1.2 Modellvorstellung

Bei einem Auktionsprozess ruft ein Auktionator einen Anfangsmarktpreis aus.
Dann melden sich Anbieter und Nachfrager. Die Differenz zwischen Nachfrage und Angebot bewirkt eine bestimmte Preisänderung. Je größer die Differenz, umso größer ist die Preisänderung.

Um diese Preisänderung wird dann der Preis verändert. Der Auktionator ruft dann einen neuen Preis aus. Dieser neue Preis bewirkt dann ein neues Angebot und eine neue Nachfrage, usw.
Wenn Angebot und Nachfrage gleich groß ist, wird das Geschäft abgeschlossen und der Auktionsprozess ist beendet.

1.2.1 Die verwendeten Parameter des Modells

Die volkswirtschaftlichen Größen, Preis p(t), Angebotsmenge a(n), Nachfragemenge n(t) werden zu den Zeitpunkten $0 \cdot \Delta t$, $1 \cdot \Delta t$, $2 \cdot \Delta t$, $3 \cdot \Delta t$, ... also allgemein nach dem Zeitpunkt $t_n = n \cdot \Delta t$ betrachtet.

Man definiert dann:
$p(t_n) = p_n$
$a(t_n) = a_n$
$n(t_n) = n_n$

1.2.1.1 Die Nachfrage

Es gilt zu jedem Zeitpunkt t (aus „volkswirtschaftlichen“ Gründen):
Je größer der Preis wird, umso geringer wird die Nachfrage der Kunden.
Dies kann durch eine Nachfragekurve mit negativer Steigung modelliert werden:
$a(t) = S \cdot p(t) + s$

1.2.1.2 Das Angebot

Je größer der Preis wird, umso größer wird das Angebot der Unternehmer auf dem Markt
Dies kann durch eine Angebotskurve mit positiver Steigung modelliert werden:
$n(t) = D \cdot p(t) + d$

1.2.1.3 Die Preisveränderung

Je größer die Differenz zwischen Nachfrage und Angebot wird, umso größer wird die Preisveränderung.
Dies wird durch eine Proportionalität modelliert:
$p'(t) = m(n(t) – a(t))$

1.2.1.4 Die Berechnung

Damit folgt:
$p'(t) = m(D \cdot p(t) + d – (S \cdot p(t) + s)) =$
$m(D \cdot p(t) + d – S \cdot p(t) - s) =$
$mD\cdot p(t) + md – mS \cdot p(t) - ms =$
$(mD-mS)\cdot p(t) + md – ms$

also:
$p'(t) = (mD-mS)\cdot p(t) + md – ms$

Damit gilt auch zu jedem Zeitpunkt t_n ($=n \cdot \Delta t$)
$p'(t_n) = (mD-mS)\cdot p(t_n) + md – ms$

oder anders geschrieben:
$p_n' = (mD-mS)\cdot p_n + md – ms$

Der Preis zum Zeitpunkt t_{n+1} (nach n+1 Zeitabschnitten Δt), kann mit folgender Formel nicht exakt berechnet, sondern nur **angenähert** werden, da die Preisänderung während des Zeitraums (Zeitabschnitts) Δt nicht konstant ist. Damit man aber eine gute Annäherung erreichen kann, muss man den Zeitraum Δt hinreichend klein wählen.
$p_{n+1} \approx p_n + p_n' \cdot \Delta t$
also:

$$\boxed{p_{n+1} \approx p_n + ((mD-mS)\cdot p_n + md – ms) \cdot \Delta t}$$

Damit kann man von einem beliebigen Anfangspreis p_0 ausgehend den Preis p_1 berechnen, dann den Preis p_2 , usw. usf.

Dazu eignet sich ein Tabellenkalkulationsprogramm wie z.B. Excel

Nur für Interessierte:

1.3 Exakte Berechnung

Der exakte Wert des Gleichgewichtspreises in Abhängigkeit von der Zeit t beträgt:

$$\boxed{p(t) = (p_0 + \frac{d-s}{D-S})e^{(mD-mS)t} - \frac{d-s}{D-S}}$$

Damit gilt:

$$\lim_{t-->00} p(t) = \lim_{t-->00} (p_0 + \frac{d-s}{D-S})e^{(mD-mS)t} - \frac{d-s}{D-S} = \frac{s-d}{D-S}$$

Damit gilt für den Gleichgewichtspreis p_g

$$\boxed{p_g = \frac{s-d}{D-S}}$$

Bemerkungen:

1)
Der Preis ist die unabhängige Größe. Diese wird in vielen VWL-Büchern auf der y-Achse abgetragen.

2)
Wie in der VVL Modelle systematisch falsch auf die Realität übertragen werden, um politische bestimmte vorgefasste Sichtweisen zu vermitteln, kritisiert der verstorbene Mathematiker Claus Peter Prof. Ortlieb an einigen konkreten Beispielen:

https://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/hb18MethFehlerVWL.pdf

https://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/