1 Nimm-Spiel

1.1 Spielbeschreibung

Auf dem Tisch liegt ein Haufen von anzahl = 5 Streichhölzern. Jeder Spieler muss eine Anzahl zwischen 1 und 3 Streichhölzern vom Tisch nehmen. Wer nicht mehr ziehen kann (weil kein Streichholz mehr da ist) hat verloren.
Man kann das Spiel auch verallgemeinern:
Statt maximal 3 Streichhölzer kann man maximal k Streichhölzer nehmen.

1.2 Beispiel

Möglicher Spielverlauf:

(2 , 3)	Spieler1 zieht 2 Streichhölzer, also aktuelle Anzahl 5-2 = 3
(1 , 2)	Spieler2 zieht 1 Streichholz, also aktuelle Anzahl 3-1 = 2
(2 , 0)	Spieler1 zieht 2 Streichhölzer, also aktuelle Anzahl 2-2 = 0

Spieler 2 ist am Zug und hat verloren, weil der Haufen leer ist.

1.3 Frage

Wie geht das Spiel aus, wenn der anziehende und der nachziehende Spieler jeweils den "besten Zug" machen ?

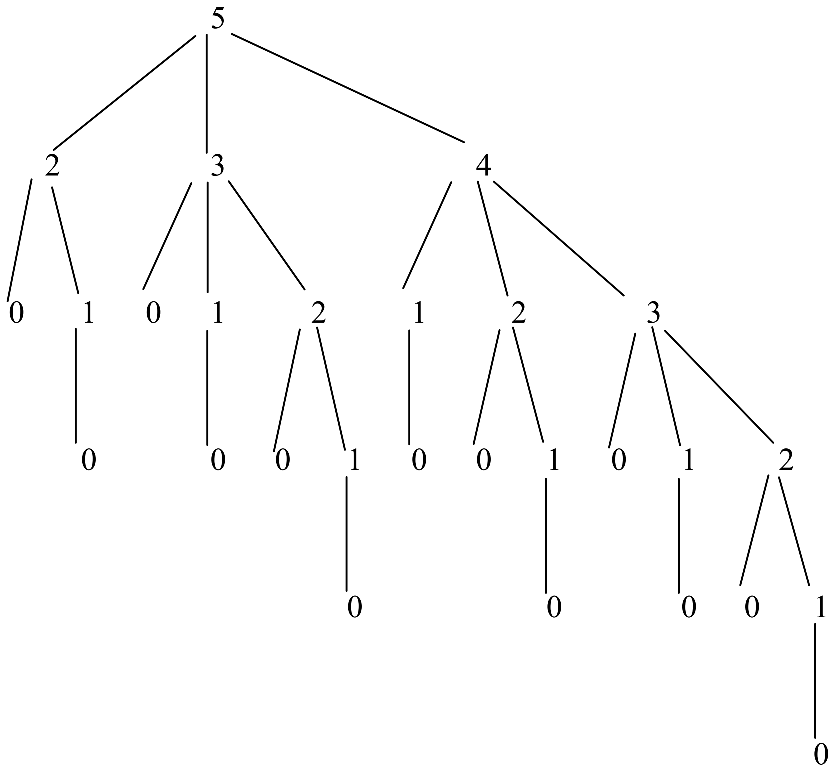
1.4 Fachbegriffe aus der mathematischen Spieltheorie

Nach dem Spielende von "Nimm-Spiel" gibt es für jeden Spieler in diesem sogenannten **Nullsummenspiel** (die Summe der Auszahlungen aller beteiligten Spieler ist Null) mit **vollständiger Information** (beide Spieler sind in jeder Phase des Spiels über die bestehende Situation genau informiert) eine **Auszahlung** (**payout**):
1 : bei Gewinn,
-1 : bei Niederlage
bzw. falls es Spiele mit unentschieden (beim Nimm-Spiel gibt es kein unentschieden) gibt:
Gewinn (1), Unentschieden (0), Niederlage (-1)

Diese Auszahlung hängt von den Spielzügen der einzelnen Spieler ab.
Für jeden Spieler in diesem Spiel gibt es eine **optimale Strategie** in dem Sinne, daß es einen Plan gibt, der eine höchstmögliche (maximale) Auszahlung sichert.
Um die optimale Strategie herauszufinden, kann man sämtliche möglichen Spiele in einem sogenannten **Spielbaum** (ähnlich dem Verzeichnisbaum des Window-Dateisystems) darstellen. Die Wurzel des Spielbaums ist die Ausgangsposition (Anfangsposition) des Spiels, also im oberen Beispiel (5).
Dann notiert man darunter baumförmig die möglichen weiteren Positionen. Dies wird so lange gemacht, bis man jeweils an eine Endposition kommt (d.h. wo entschieden werden kann, wie hoch die Auszahlung ist).
Zu den Positionen im Spielbaum sagt man auch **Knoten**. Ist ein Knoten eine Endposition, so ist dieser Knoten ein **Blatt**.

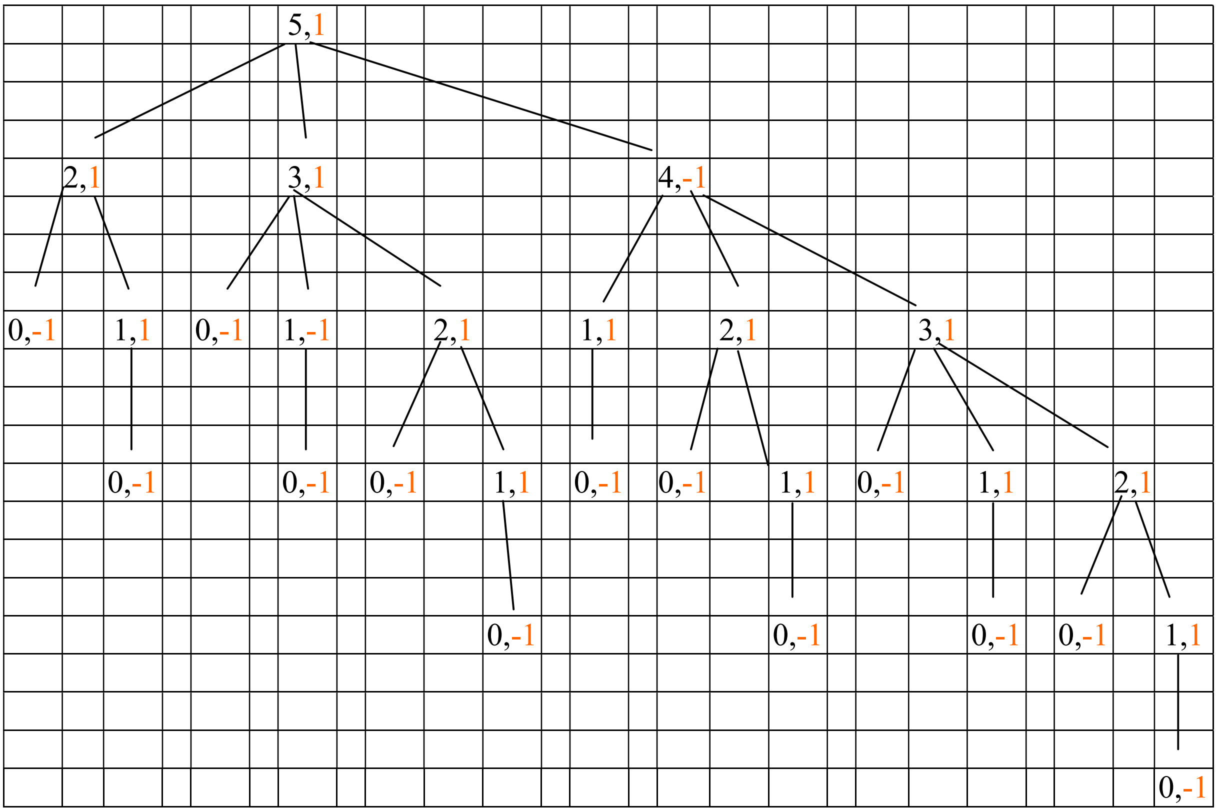
1.5 Spielbaum

Beispiel für anzahl=5, k=3
Man kann alle möglichen Spielzüge in einem Spielbaum darstellen



1.6 Gewinnermittlung

Wir beginnen bei den Blättern des Baums und notieren in jedem Knoten den Gewinn des Spielers, der gerade am Zug ist:
Spieler, der gerade am Zug ist gewinnt: 1 (d.h. payout p =1)
Spieler, der gerade am Zug ist verliert: -1 (d.h. payout p = -1)



Man beginnt bei den Blättern, gibt die Auszahlung des anziehenden Spielers an und betrachtet dann die Vorgängerknoten.

Ergebnis:
Wenn man das Minimum aller maximalen Gewinnerwartungen der direkten Nachfolgerknoten kennt, ist der negative Wert dieses Minimums gleich der maximalen Gewinnerwartung des Vorgängerknotens!
Konkret an einem Beispiel:
4 hat die Nachfolgeknoten (mit maximaler Gewinnerwartung)
(1,1) (2,1) (3,1)
Da alle Nachfolgeknoten die maximale Gewinnerwartung 1 haben (also gewinnen), verliert der Knoten 4, also (4,-1)

1.6.1 Aufgaben

I)

1) Geben Sie die Auszahlung (payout) des anziehenden Spielers mit anzahl = 0 an.
Siehe Unterbaum von oben (mit anzahl = 0)

2) Geben Sie die Auszahlung (payout) des anziehenden Spielers mit anzahl = 1 an.
Siehe Unterbaum von oben (mit anzahl = 1)

3) Geben Sie die **möglichen** Auszahlungen (payout) des anziehenden Spielers mit anzahl = 2 an.
Siehe Unterbaum von oben (mit anzahl = 2)

4) Angenommen, man würde die maximale Auszahlung (payout) p1max, p2max, p3max aller möglichen Spielzüge (Nachfolgeknoten) des Gegners kennen.
Wie berechnet man daraus die maximale Auszahlung pmax des Vorgängerknotens?
Tun Sie so, als ob Sie die maximale Auszahlungen des Gegners kennen und schreiben Sie diese an die Nachfolgeknoten. Überlegen Sie dann, wie man die maximale Auszahlung berechnet und schreiben diese an den Vorgängerknoten.

Der Spieler zieht so, dass der nachfolgende Spieler eine minimale Auszahlung bekommt.
Da diese ein Nullsummenspiel ist, ist die maximale Spielauszahlung des Spielers, das negative Minimum der Auszahlungen aller nachfolgenden Spieler.

Füllen Sie dazu folgende Tabelle aus.

p1max	p2max	p3max	pmax
-1	-1	-1	1
-1	-1	1	1
-1	1	-1	1
-1	1	1	1
1	-1	-1	1
1	-1	1	1
1	1	-1	1
1	1	1	-1

Geben Sie die Funktion pmax(p1max, p2max, p3max) an, die pmax in Abhängigkeit von p1max, p2max und p3max berechnet.

Ergebnis:
pmax = - Minimum(p1max, p2max, p3max)

II)
1) Schreiben Sie ein Programm, das pmax des anziehenden Spielers in Abhängigkeit des Haufens berechnet (iterativ und rekursiv)

2) Schreiben Sie ein Programm, in dem ein Spieler gegen den Computer spielt (Nimm-Spiel). Der Computer gibt nach jedem Zug seine maximale Gewinnauszahlung aus und kann damit also schon lange **vor Spielende** dem Gegner mitteilen, dass der Computer gewonnen hat.

1.6.2 Lösung mittels Induktion-Rekursion

1.6.2.1 Regelnkurznotation für das Spiel

$$\frac{\emptyset}{(0\,;\,-1)}$$

$$\frac{(z_1\,,\,e_1),\ \dots,\ (z_n\,,\,e_n)}{(z, g(e_1,\dots,e_n))} \qquad \text{falls } z_1, \dots, z_n \text{ Nachfolger von } z$$

wobei
$g(e_1,\dots,e_n) = -\,\text{Minimum}(e_1,\dots,e_n)$
und e soll die Bedeutung Erlös assoziieren.
Die Nachfolger von z (= Anzahl der Streichölzer) sind die Streichhölzer, die nach allen möglichen Zügen noch übrig bleiben können, als z.B: Nachfolger von 1000 ist die Menge {997 ; 998; 999 }

1.6.2.2 Konstruktion der induktiv definierten Menge

Durch die Regeln wird eine sogenannte "induktiv definierte Menge" (die aus 2-er Tupeln besteht) konstruiert, die ausgehend von der leeren Menge mit Hilfe der obigen Regeln bebastelt wird:
$D_0 := \emptyset$
$D_1 := \{ (0 ; -1) \}$
$D_2 := \{ (0 ; -1) ; (1 ; 1) \}$
$D_3 := \{ (0 ; -1) ; (1 ; 1) ; (2 ; 1) \}$
$D_4 := \{ (0 ; -1) ; (1 ; 1) ; (2 ; 1) ; (3 ; 1) \}$
...

1.6.2.3 Die Rekursion

Mit N(z) wird der zu z zugehörige Erlös berechnet, also die 2. Komponente im 2-er Tupel. N ist eine Abkürzung für Nachbar der 1. Komponente.
Man kann sich anschaulich überlegen oder auch mathematisch beweisen (siehe Skript von mir), daß allgemein gilt:

$$N(z) = \begin{cases} -1, & \text{falls } z \text{ die 1. Komponente eines 2-er Tupels in } D_1 \text{ ist.} \\ & \text{(hier muss also } z = 0 \text{ sein)} \\ g\,(\,(N(z_1), \dots, N(z_r)\,) & \text{falls } z_1, \dots, z_r \text{ Nachfolger von } z \text{ sind} \end{cases}$$

1.6.2.4 Programmieren

Diese Formel kann dann - ohne großen Aufwand - implementiert werden
Alternativ könnte man - statt der Rekursion - aufeinanderfolgend (iterativ) die einzelnen 2-er Tupel programmtechnisch berechnen und dadurch dann z.B. den Nachbarn von 3, also den Erlös 1 ermitteln.

2 Würfelkippen

2.1 Spielbeschreibung

Beim Spielbeginn wird eine zu erreichende Summe (Sollsumme) festgelegt. Diese muß größer oder gleich 6 sein.
Dann wird ein Spielwürfel geworfen und die oben liegende Zahl als aktuelle Summe (Istsumme) notiert. Die beiden Spieler kippen nun abwechselnd den Würfel um eine der 4 Grundkanten und erhöhen die aktuelle Summe um die jeweils nach oben gelangte Augenzahl. (Das heißt, daß ein Spieler die vor dem Ziehen oben liegende Zahl und die Zahl auf der Gegenseite nicht ziehen kann !)
Erreicht ein Spieler durch seinen Zug diese Sollsumme, hat er gewonnen und der andere verloren. Ein Spieler darf durch seinen Zug auf keinen Fall die Sollsumme überschreiten. Kann er diese durch keinen Zug erreichen, ist das Spiel unentschieden.

Bemerkung:
Das Spiel kann dadurch noch modifiziert werden, daß die erste aktuelle Summe nicht gleich der ersten gezogenen Augenzahl ist, sondern eine beliebig vorgegebene sein kann.

2.2 Beispiel

Eine Partie des Spiels könnte zum Beispiel so ablaufen:

Sollsumme = 10
Erste gewürfelte Augenzahl = 2
Istsumme = 2

Dies kann man kurz darstellen als: (2 , 2)

Möglicher Spielverlauf:

(2 , 2)	
(4 , 6)	4 gezogen, also Summe 4 + 2 = 6
(2 , 8)	2 gezogen, also Summe 2 + 6 = 8
(1 , 9)	1 gezogen, also Summe 1 + 8 = 9

Das Spiel endet unentschieden, da der nachziehende Spieler nur noch die Zahlen zwischen 2 und 5 ziehen kann und damit die Sollsumme überschreiten würde.

2.3 Aufgaben

Erstellen Sie einen Spielbaum für

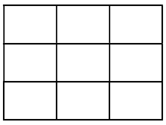
a) Sollsumme = 8	Erste gewürfelte Augenzahl = 4
b) Sollsumme = 7	Erste gewürfelte Augenzahl = 1
c) Sollsumme = 15	Erste gewürfelte Augenzahl = 6

Geben Sie jeweils die maximale Auszahlung des anziehenden Spielers aus.

Lösungen:
Siehe Excel-Tabellen

3 Tic Tac Toe

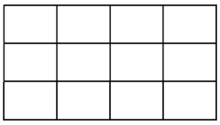
Wer zuerst 3 zusammenhängende Steine in einer Zeile, Spalte oder Diagonale hat, hat gewonnen.



Analysieren Sie das Spiel!

4 Zick Zack Zoo

Wer zuerst 4 zusammenhängende Steine in einer Zeile hat, oder 3 zusammenhängende in einer Spalte bzw. Diagonale, hat gewonnen.



Analysieren Sie das Spiel!