1 Klassische Kurvendiskussion

Lösen Sie die folgenden Aufgaben durch Programmieren von Funktionen.
Machen Sie zuerst das **Design** der Funktionen, d.h. überlegen Sie die **Input**- und **Output** Parameter der Funktionen.

1.1 absolute Extremwerte

a) Berechnen Sie im Intervall [-2, 1] das absolute Minimum (Maximum) des folgenden Polynoms 3-ten Grades:
$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$

Bemerkung (Lösungsidee zu einem Näherungsverfahren):
Unterteilen Sie das Intervall [a, b] in z.B. 1000 Unterintervalle und berechnen Sie dort jeweils am Ende des Unterintervalls den Funktionswert. Bestimmen Sie dann das Minimum (Maximum) dieser Funktionswerte.

b) Verallgemeinern Sie die Lösung für ein Polynom n-ten Grades (im Intervall [a, b] und für n Unterintervalle).

.

1.2 relative Extremwerte

Berechnen Sie für ein Polynom n-ten Grades (im Intervall [a, b] und für n Unterintervalle) die relativen Extremwerte.

1.3 Symmetrie

a) Erstellen Sie ein C-Programm, das feststellt, ob ein Polynom Polynoms n-ten Grades (z.B. 4. Grades) achsensymmetrisch zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Bemerkung (Lösungsidee zu einem Näherungsverfahren):
Unterteilen Sie ein Intervall [-a, a] in z.B. 1000 Unterintervalle und berechnen Sie dort jeweils am Ende des Unterintervalls den Funktionswert f(x) und vergleichen ihn mit f(-x).

b) Verallgemeinern Sie die Lösung für ein Polynom n-ten Grades:
Stellen Sie fest, ob die Kurve achsensymmetrisch zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

1.4 Ableitung

a) Berechnen Sie die Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle, indem die Tangente durch eine Sekante angenähert wird.

b) Verallgemeinern Sie die Lösung für ein Polynom n-ten Grades.

1.5 Trigonometrische Funktionen

a) Geben Sie ein Intervall auf der x-Achse vor.
b) Geben Sie eine trigonometrische Funktion vor (sin, cos, tan)
c) Bestimmen Sie die Nullstellen in diesem Intervall.

1.6 Längenberechnung

a) Gegeben sei folgende Funktion:
$f(x) = 1 - x^2$
Erstellen Sie ein Programm, das die Länge des zu f gehörigen Parabelsegments, das durch die x-Achse und die y-Achse begrenzt wird, berechnet.
Die Lösung soll eine Näherung sein (Verbinden zweier benachbartere Punkte in Abstand Δx durch eine Linie).

b) Verallgemeinern Sie die Lösung für ein Polynom n-ten Grades.

1.7 Klassische Flächenberechnung

Schreiben Sie eine Funktion, die die Fläche unter einer Parabel mit der zugehörigen Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ im Intervall [a, b] mit n gleich langen Teilintervallen durch das unten beschriebene Annäherungsverfahren (Summe von Rechtecken) berechnet.

1.7.1 Konkretes Beispiel

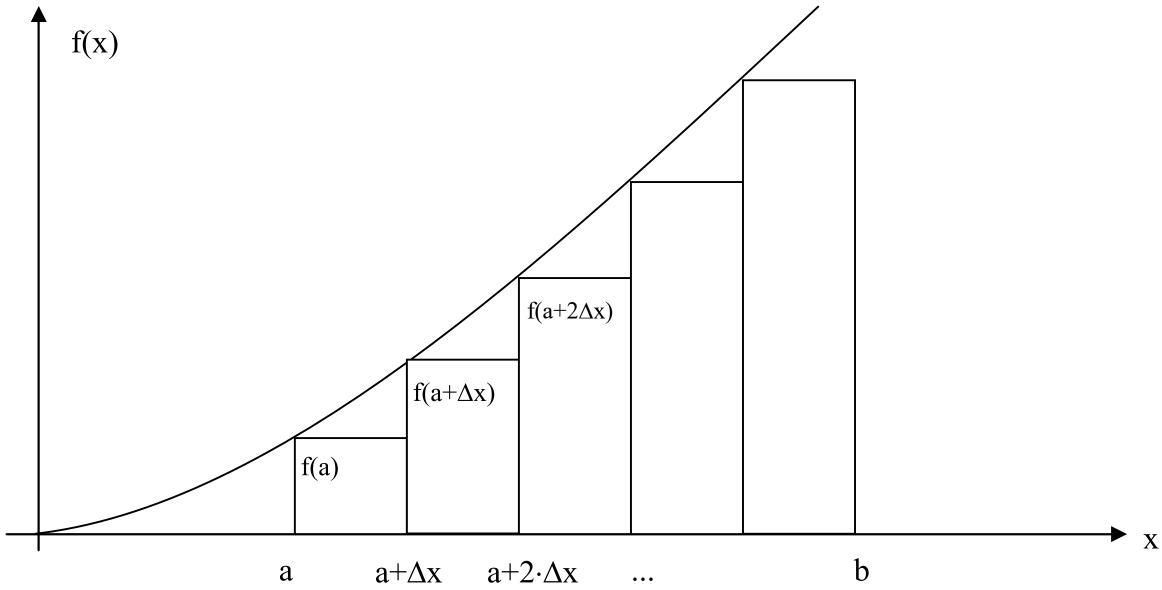
Man unterteilt das Intervall [a, b] der Länge b - a auf der x-Achse in n gleich lange Teilintervalle der Länge $\Delta x = (b-a) / n$.
Am Ende des jeweiligen Teilintervalls betrachtet man den Funktionswert an dieser Stelle und kann dann den Flächeninhalt des entsprechenden Rechtecks berechnen.

Beispiel:
Wenn man das Intervall [a ; b] z.B. in n = 5 gleich lange Intervalle mit der Breite

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

unterteilt, dann ist die Summe der Flächen der Rechtecke:
$A = f(a)\cdot\Delta x + f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+3\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+4\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$

allgemein gilt (für beliebiges n):
$A = f(a)\cdot\Delta x + f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+3\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots + f(a+(n-1\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$

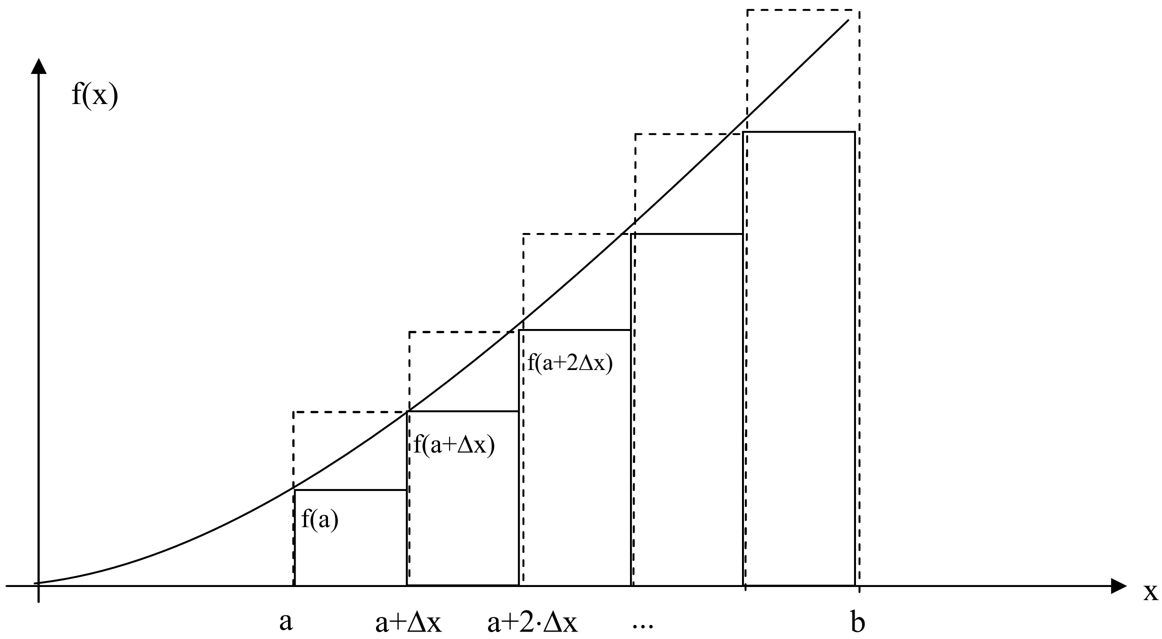


1.7.2 Allgemeiner

Man kann auch den allgemeineren Fall berücksichtigen, dass die Kurve (z.B. Parabel 4-ter Ordnung) positive und negative y-Werte annimmt. Man muss dann den Betrag der einzelnen Rechtecksflächen zur Aufsummierung nehmen.

1.7.3 Bessere Approximation (Annäherung)

Es kann eine bessere Annäherung erreicht werden, indem der Mittelwert der Untersummen und Obersummen errechnet wird (Rechtecke, die unterhalb der Kurve liegen und Rechtecke, die oberhalb (siehe gestrichelte Rechtecke) der Kurve liegen)



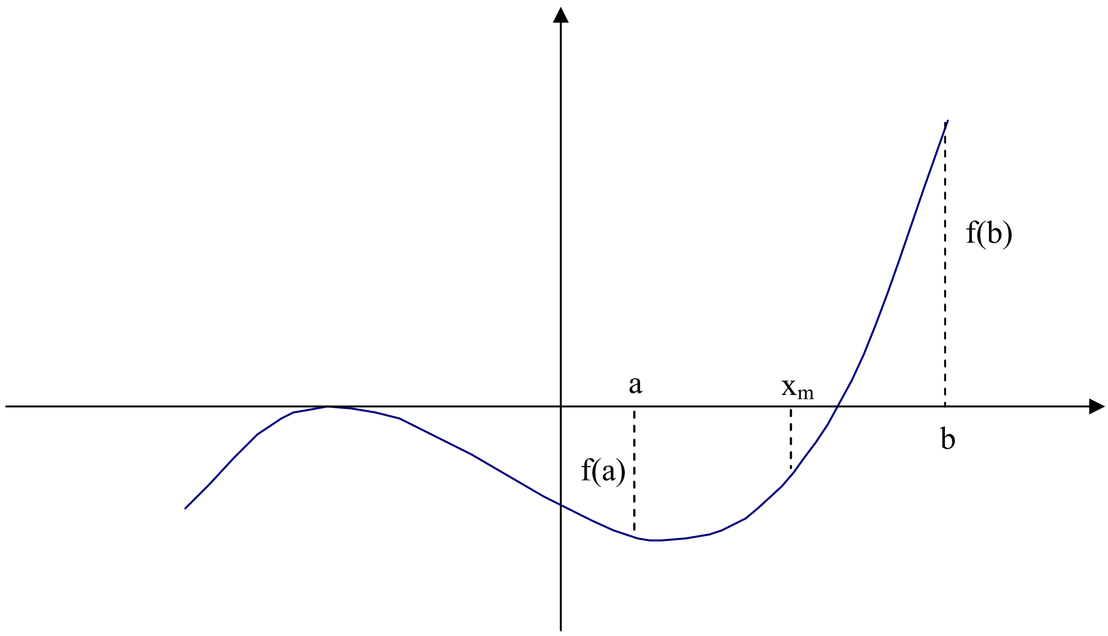
1.7.4 Verallgemeinerung

Verallgemeinern Sie die Lösung für ein Polynom n-ten Grades

1.8 Eine Nullstelle

1) Berechnen Sie im Intervall [-2, 1] die Nullstelle der Funktion:

$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$



Bemerkung (Lösungsidee zu einem Näherungsverfahren):
Setze $x_l = a$, $x_r = b$ (x_l steht für xlinks, x_r für xrechts).
Zuerst bestimmt man die Mitte x_m des Intervalls $[x_l, x_r]$.
Ist $f(x_m) < 0$, dann setzt man $x_l = x_m$ und bildet die Mitte x_m des Intervalls $[x_l, x_r]$.
Ist $f(x_m) > 0$, dann setzt man $x_r = x_m$ und bildet die Mitte x_m des Intervalls $[x_l, x_r]$
Ist $f(x_m) = 0$, dann ist man fertig, ansonsten wiederholt man diese Intervallhalbierung hinreichend oft (z.B. 1000 mal).

2) Verallgemeinern Sie die Lösung für ein Polynom n-ten Grades.

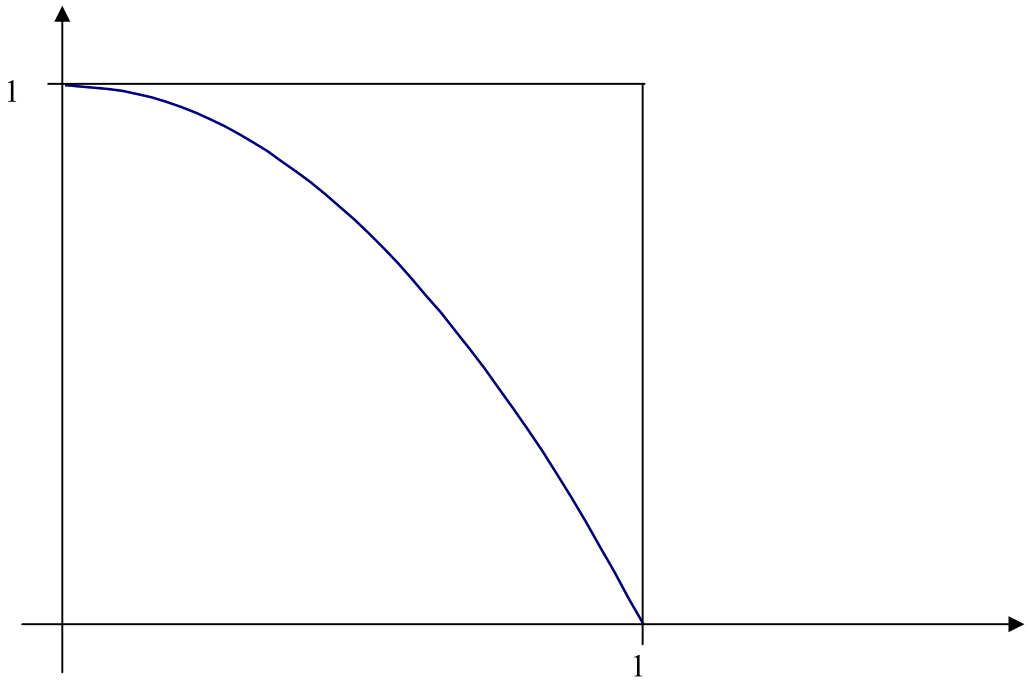
1.9 Alle Nullstellen

Berechnen Sie im Intervall [a, b] die Nullstelle einer Funktion.
Man unterteilt das Intervall [a, b] der Länge b - a auf der x-Achse in n gleich lange Teilintervalle der Länge $\Delta x = (b-a) / n$.
Am Anfang bzw. Ende des jeweiligen Teilintervalls betrachtet man den Funktionswert an dieser Stelle und schaut, ob dieser hinreichend nahe bei 0 liegt.

2 Nichtklassische "Kurvendiskussion"

2.1 Flächenberechnung mit Hilfe des Zufalls (Dartspfeilen)

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schaubilds der Funktion $f(x) = 1 - x^2$, der positiven y-Achse und der positiven x-Achse.



2) Berechnen Sie den Flächeninhalt klassisch, d.h. durch Aufsummierung der Rechteckflächen unter der Kurve.

2.1.1 Lösungsidee

Mit verbundenen Augen wirft man "blindwütig" sehr oft (N-mal) mit Darts-Pfeilen auf das Rechteck, das auf der obigen Zeichnung eingezeichnet ist. Dabei trifft man n-mal die Fläche zwischen der Parabel, der y-Achse und der x-Achse.
Bautechnisch ist garantiert, daß man immer das die Parabel umschließende Rechteck trifft (z.B. befindet sich das Rechteck am Ende eines das Rechteck umschließenden Tunnels).
.
Wenn man die Fläche unter der Parabel mit A_P und die Fläche des Quadrats mit A_Q bzeichnet, dann gilt für sehr grosse N:

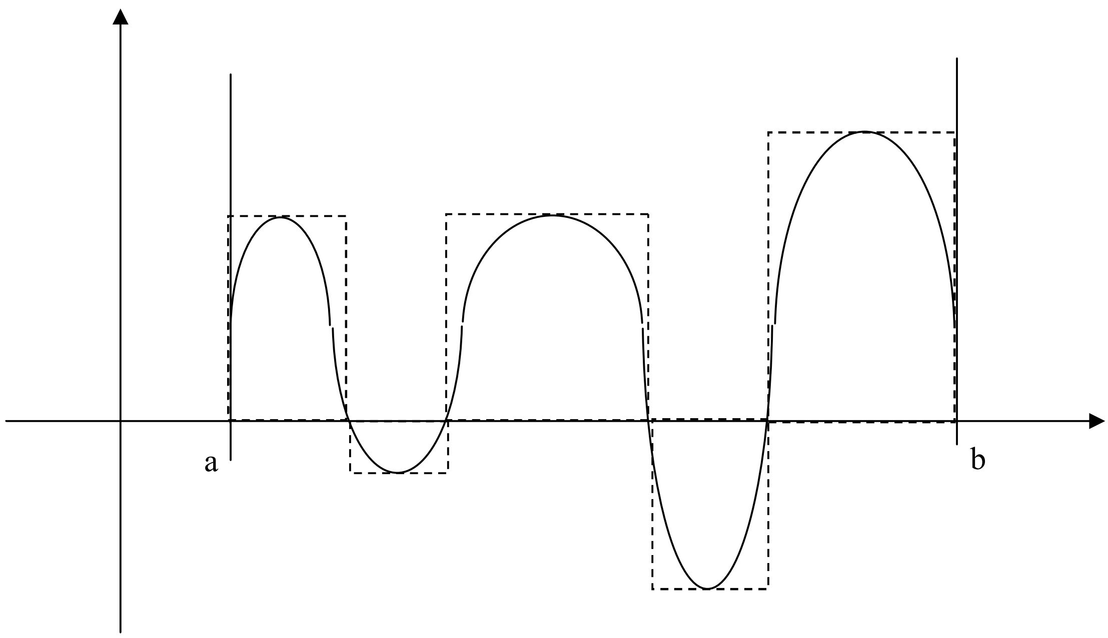
$$\frac{A_P}{A_Q} \approx \frac{n}{N}$$

Da hier $A_Q = 1$, gilt:

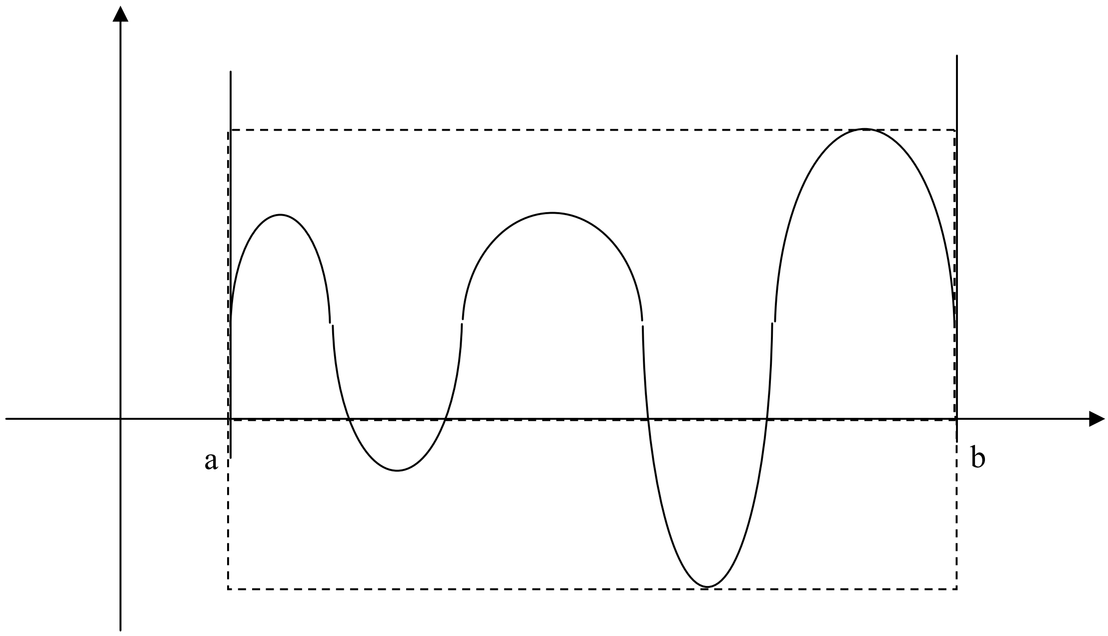
$$\boxed{A_P \approx \frac{n}{N}}$$

2.1.2 Allgemeiner

Verallgemeinern Sie die Lösung für ein Polynom n-ten Grades.
Die Kurve kann z.B. auch positive und negative y-Werte annehmen. Man muss dann den größten und kleinsten Wert der y-Werte innerhalb vorgegebener Bereiche zwischen den Nullstellen berechnen.



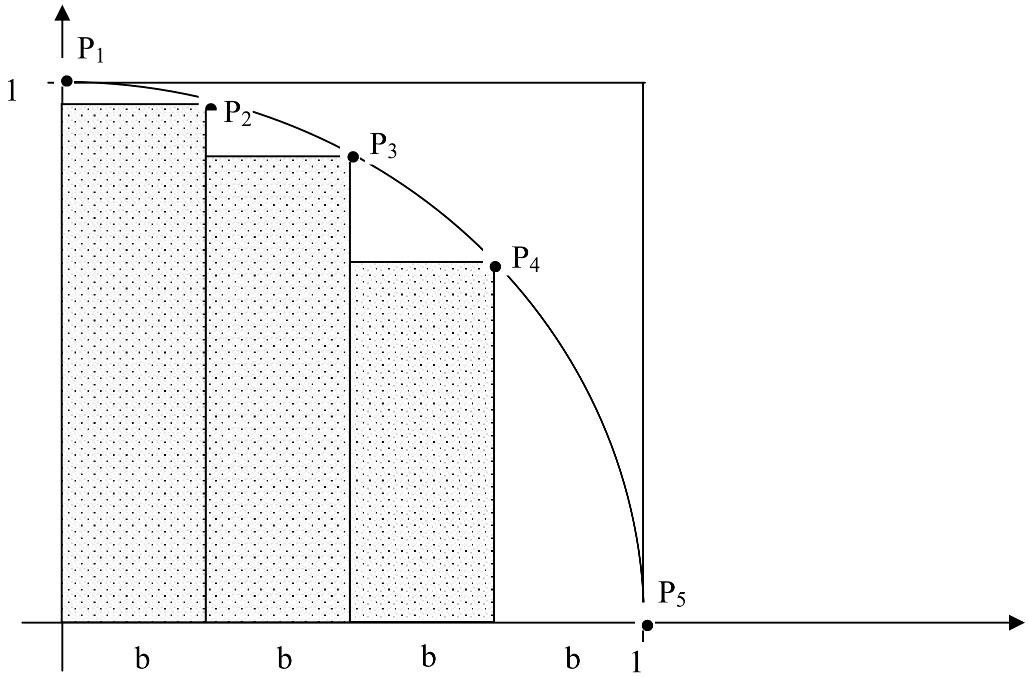
oder


a
b

3 Berechnen der Zahl π

3.1 Annäherung durch Zufallszahlen

Berechnen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts des Viertelkreises und dem Quadrat.
Dann "schießen" Sie mit verbundenen Augen "blindwütig" sehr oft (anz -mal) mit einem Pfeil auf das Quadrat. Durch eine Vorrichtung ist garantiert, dass das Quadrat auf jeden Fall getroffen wird (aber nicht unbedingt der Viertelkreis).
Der Viertelkreis wird anzErfolg - mal getroffen.
Wie kann man dadurch die Zahl π annähernd berechnen ?



3.2 Annäherung durch Berechnung der Fläche

Teilen Sie die Strecke der Länge 1 auf der x-Achse in n gleiche Strecken, die jeweils die Breite eines Rechtecks sind (in der Zeichnung $n = 4$).
Die Summe der Fläche dieser Rechtecke nähert die Fläche des Viertelkreises an.
Wie kann man dadurch die Zahl π annähernd berechnen ?

3.3 Annäherung durch Berechnung der Länge

Teilen Sie (wie oben) die Strecke der Länge 1 auf der x-Achse in n gleiche Strecken, die jeweils die Breite eines Rechtecks sind (in der Zeichnung $n = 4$).
Die Summe der Abstände zwischen den oben eingezeichneten Punkten $P_1, ..., P_5$ nähert die Länge des Viertelkreises an.
Wie kann man dadurch die Zahl π annähernd berechnen ?

3.3.1 Lösung

Viertelkreisfläche : A_V
Viertelkreislänge: l_V
Fläche des Quadrats : A_Q
Dann gilt:
$A_Q = 1$

$$A_V = \frac{\pi}{4}$$

$$l_V = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{A_V}{A_Q} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$$

1)
Für sehr große x gilt:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{A_V}{A_Q} \approx \frac{anz}{anzErfo\lg}$$

also:

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{anz}{anzErfo\lg}$$

also:

$$\pi \approx \frac{4 \cdot anz}{anzErfo\lg}$$

2)

$$A_V = \frac{\pi}{4}$$

also:

$$\pi = 4 \cdot A_V$$

s_F sei die Summe der Rechtecksflächen. Dann gilt: $A_V \approx s_F$
also:
$\pi \approx 4s_F$

3)

$$l_V = \frac{\pi}{2}$$

also:

$$\pi = 2 \cdot l_V$$

s_L sei die Summe der Abstände der Punkte. Dann gilt: $l_V \approx s_L$
also:
$\pi \approx 2s_L$

4 Projektaufteilung

4.1 Wichtige Vorbemerkungen

1) Erstellen Sie zuerst die Beschreibung der Funktion (das Design), mit Hilfe des von uns benutzten Schemas.

2) Falls eine Projektgruppe eine Funktion erstellt, die eine andere Projektgruppe nutzen kann, müssen sich diese Projektgruppen untereinander über das gewünschte Design absprechen. Vielleicht kann z.B. kann eine Gruppe, die die Fläche einer Kurve berechnet, die Berechnung der Nullstellen verwenden.

4.2 Projektgruppen

4.2.1 Projektgruppe1

Nullstellenberechnung

4.2.2 Projektgruppe2

Klassische Flächenberechnung

4.2.3 Projektgruppe3

Nichtklassische Flächenberechnung

4.2.4 Projektgruppe4

absolute, relative Extremwerte berechnen.
Symmetrie, Ableitung, Längenberechnung.